Momento angolare

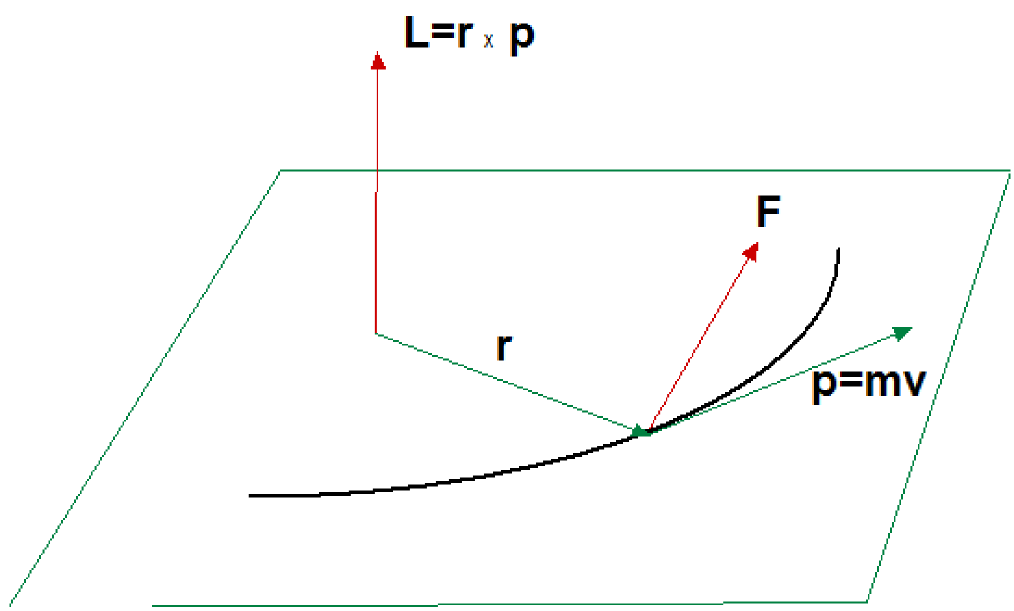
(= Momento della quantita' di moto)

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$

In generale,vettore variabile

Per moti piani:

$\rightarrow \boldsymbol{L} \perp$ al piano del moto



Per moto circolare:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Identita' vettoriale:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

[Comprensione minima:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \perp (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

$$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \perp piano(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$$

$$\rightarrow \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \in piano(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$$

$$\rightarrow \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} + b\boldsymbol{C}]$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\left[(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - \left(\underbrace{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}}_{=0}\right)\boldsymbol{r}\right] = mr^2\boldsymbol{\omega}$$

$I = mr^2$ Momento di inerzia

Grandezza caratteristica del moto circolare:

lega momento angolare e velocita' angolare

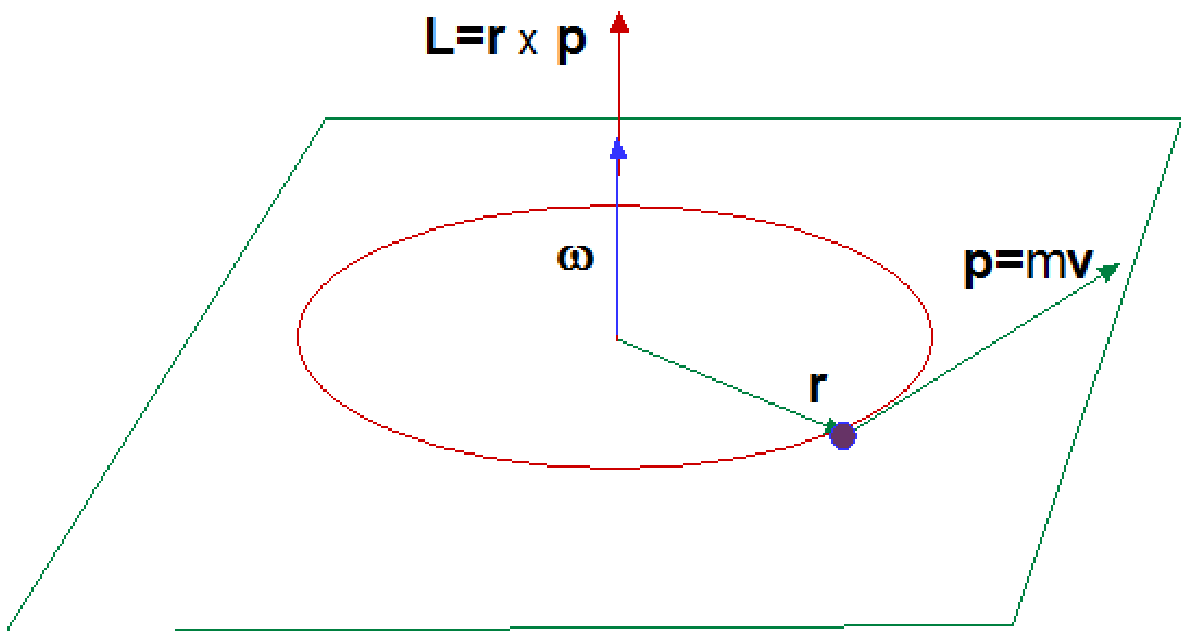
$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

Semplice per punto materiale,

meno per corpi estesi

Per punto materiale:

$$\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$$




In genere non vero per un sistema di punti materiali, o un corpo esteso

Moto curvilineo:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\theta$$

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

Velocita' radiale non contribuisce al momento angolare

Prodotto esterno: espressione in componenti

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_x\hat{\boldsymbol{i}}+a_y\hat{\boldsymbol{j}}+a_z\hat{\boldsymbol{k}}\right)\times\left(b_x\hat{\boldsymbol{i}}+b_y\hat{\boldsymbol{j}}+b_z\hat{\boldsymbol{k}}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\underbrace{a_x\hat{\boldsymbol{i}}\times b_x\hat{\boldsymbol{i}}}_{=0}+\underbrace{a_x\hat{\boldsymbol{i}}\times b_y\hat{\boldsymbol{j}}}_{=a_xb_y\hat{\boldsymbol{k}}}+\underbrace{a_x\hat{\boldsymbol{i}}\times b_z\hat{\boldsymbol{k}}}_{=-a_xb_z\hat{\boldsymbol{j}}}+$$

$$\underbrace{a_y\hat{\boldsymbol{j}}\times b_x\hat{\boldsymbol{i}}}_{=-a_yb_x\hat{\boldsymbol{k}}}+\underbrace{a_y\hat{\boldsymbol{j}}\times b_y\hat{\boldsymbol{j}}}_{=0}+\underbrace{a_y\hat{\boldsymbol{j}}\times b_z\hat{\boldsymbol{k}}}_{=a_yb_z\hat{\boldsymbol{i}}}+$$

$$\underbrace{a_z\hat{\boldsymbol{k}}\times b_x\hat{\boldsymbol{i}}}_{=a_zb_x\hat{\boldsymbol{j}}}+\underbrace{a_z\hat{\boldsymbol{k}}\times b_y\hat{\boldsymbol{j}}}_{=-a_zb_y\hat{\boldsymbol{i}}}+\underbrace{a_z\hat{\boldsymbol{k}}\times b_z\hat{\boldsymbol{k}}}_{=0}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{\boldsymbol{i}}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{\boldsymbol{j}}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Formalmente, usando la definizione
di determinante di una matrice:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\det\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$$

Momento meccanico della forza $\boldsymbol{F}$

NB: $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$ devono essere riferiti allo stesso punto O (polo)

Equazione fondamentale dei moti rotatori; piu' importante in dinamica dei sistemi & corpi rigidi

Corrispondente legge di conservazione:

$\boldsymbol{M} = 0 \rightarrow \boldsymbol{L} =$ cost

Conservazione del momento angolare

Esempio: punto materiale libero

$$F = 0 \rightarrow \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} = 0$$

$\rightarrow \boldsymbol{L} =$ cost

Esempio: forze centrali

$\boldsymbol{F}$ radiale $\Leftrightarrow \boldsymbol{F} = a(r,\theta,\varphi)\hat{\boldsymbol{u}}_r$

$\boldsymbol{F}$ centrale: $\boldsymbol{F}$ radiale & $a(r,\theta,\varphi)$ a simmetria sferica

$a(r,\theta,\varphi) \equiv a(r)$ indipendente dagli angoli

$\boldsymbol{F}$ centrale $\rightarrow \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = r\hat{\boldsymbol{u}}_r \times a\ \hat{\boldsymbol{u}}_r = 0$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} = 0$$

$\rightarrow \boldsymbol{L} =$ cost

Momento angolare conservato

$\boldsymbol{L} \perp (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{L} =$ cost $\rightarrow$ Moto piano per forze centrali

Coordinate polari nel piano del moto:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost} \rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost'}$$

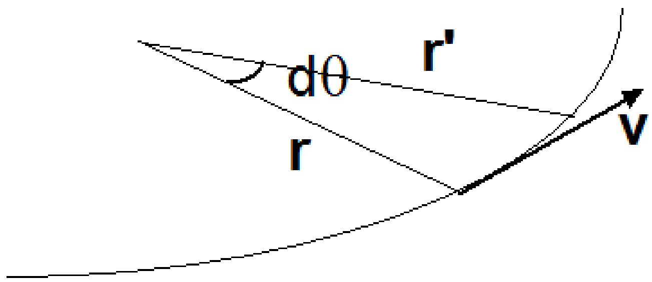
Elemento di area 'spazzato' dal vettore posizione:

$$dA = \frac{1}{2} r d\theta r = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = L = \text{cost}$$

Vel. areolare costante per forze centrali

Significato di vel. areolare:




Area (istantanea) descritta dal raggio vettore per unita' di tempo

Riassumendo

Per force *centrali* e a *simmetria sferica* (ossia, t.c. $|\boldsymbol{F}|$ dipende solo da *r*), risultano conservate:

$$\left.\begin{array}{ll} E_{meccanica} & \text{forza conservativa} \\ \boldsymbol{L} & \text{forza centrale} \end{array}\right\} \text{4 grandezze}$$

Essendo costanti, possibile esprimerle in termini delle condizioni iniziali

Conteggio condizioni iniziali

> $3$ posizione + $3$ velocita' = $6$, meno $1$ (istante iniziale irrilevante) = $5$

Conteggio  quantita' conservate

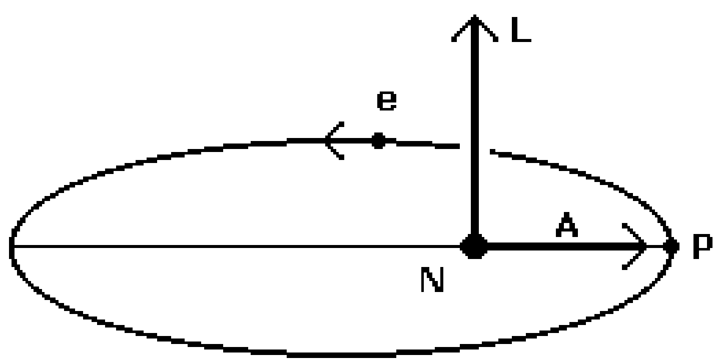
$3\ (\boldsymbol{L}) + 1\ (E) = 4$

In principio, ci possono essere casi in cui una quinta quantita' risulta conservata: quali?

Risposta: OK per forza gravitazionale
$\rightarrow$ *vettore di Laplace-Runge-Lenz* $\mathbf{A} \perp \mathbf{L}$

Importante nello studio del moto kepleriano:

Orientazione dell'ellisse nel piano del moto




$\mathbf{A}$ costante $\rightarrow$ Orbita chiusa