Il principio della dinamica per sistema di N punti materiali:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Scomposizione forza totale su punto i-esimo:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(ext)} + \mathbf{F}_i^{(int)} = \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_i^{(j)}$$

Sommando su tutti i punti:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_i^{(j)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(ext)} = \mathbf{F}^{(ext)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_i^{(j)} = \mathbf{F}^{(int)}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(int)} + \mathbf{F}^{(ext)}$$

Primo termine: in principio difficile da calcolare...

III principio della dinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i^{(j)} = -\mathbf{F}_j^{(i)} \\ \text{Inoltre: Stessa retta d'azione} \end{cases}$$

Forma 'forte' del III principio

[Forma 'debole': non richiesta la collinearita' di azione e reazione]

Sommando su tutti i punti:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_i^{(j)}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_i^{(j)} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(ext)} = \mathbf{F}^{(ext)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ext)}$$

I equazione cardinale della meccanica dei sistemi

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1,N} m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1,N} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1,N} m_i \mathbf{r}_i$$

Definizione:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1,N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1,N} m_i} = \frac{\sum_{i=1,N} m_i \mathbf{r}_i}{M}$$ posizione c. di massa

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1,N} m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1,N} m_i} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt}$$ velocita' c. di massa

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1,N} m_i \mathbf{a}_i}{\sum_{i=1,N} m_i} = \frac{d^2\mathbf{r}_{CM}}{dt^2}$$ accelerazione c. di massa

$$\rightarrow \mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$$

$$\rightarrow \mathbf{F}^{(ext)} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\mathbf{v}_{CM}\right)$$

M costante $\rightarrow \mathbf{F}^{(ext)} = M\,\dfrac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = M\mathbf{a}_{CM}$

Forma alternativa della I equazione cardinale
della meccanica dei sistemi

$\rightarrow \mathbf{F}^{(ext)} = 0 \rightarrow \mathbf{P} = \text{cost}, \mathbf{v}_{CM} = \text{cost se } M$ costante

$\rightarrow$ Conservazione della quantita' di moto totale

per i sistemi isolati

$\rightarrow$ Legge di inerzia per i sistemi isolati:

Moto del CM di un sistema isolato = Rettilineo & Uniforme

Esempio

Un proiettile di massa m, lanciato dall'origine su traiettoria parabolica, esplode in 2 frammenti all'apice della traiettoria, quando la distanza orizzontale dall'origine e' x_0; i 2 frammenti hanno massa $\frac{m}{4}$ e $\frac{3m}{4}$ e vengono proiettati con velocita' iniziale orizzontale.

Si osserva che il frammento piu' leggero atterra nell'origine;

dove atterra il frammento piu' pesante?

Il CM si muove sulla traiettoria parabolica originale;

quindi "atterra" nella posizione simmetrica rispetto all'apice

quindi a $x = 2x_0$. Quindi:

$$x_{CM} = \frac{x_1 \frac{m}{4} + x_2 \frac{3m}{4}}{m} = 2x_0 \rightarrow 2x_0 = \frac{x_2 \frac{3m}{4}}{m} = \frac{3}{4} x_2$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{8}{3} x_0$$

CM per distribuzioni continue di massa

$$\boldsymbol{r}_{CM} \sim \frac{\sum_{i=1,N} \Delta m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1,N} \Delta m_{ii}} \rightarrow \boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\int_{massa} \boldsymbol{r} dm}{\int_{massa} dm}$$

Densita' volumetrica di massa:

$$\rho \sim \frac{\Delta M}{\Delta V} \rightarrow \rho = \frac{dm}{dV}$$

In generale:

$$\rho = \rho(x, y, z) = \rho(\boldsymbol{r})$$

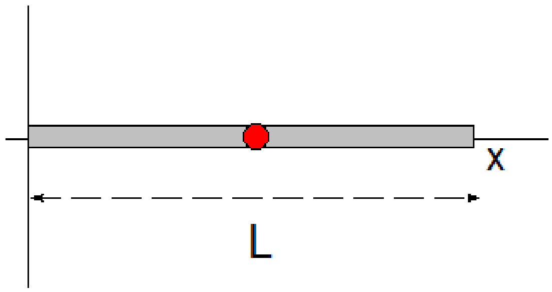
$\rho =$ cost per corpo omogeneo

$$\rightarrow \boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\int_{massa} \boldsymbol{r} dm}{\int_{massa} dm} = \frac{\int_{massa} \boldsymbol{r} \rho dV}{M}$$

Spesso conveniente:

$\lambda = \dfrac{dm}{ds}$ densita' lineare di massa

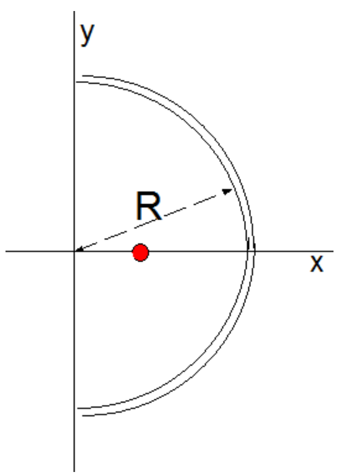
$\sigma = \dfrac{dm}{dA}$ densita' superficiale di massa



Sbarra omogenea di massa M e lunghezza L

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$\rightarrow x_{CM} = \frac{\int_0^L \lambda x dx}{M} = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x dx = \frac{\lambda}{M}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L^2}{2M}\frac{M}{L} = \frac{L}{2}$$



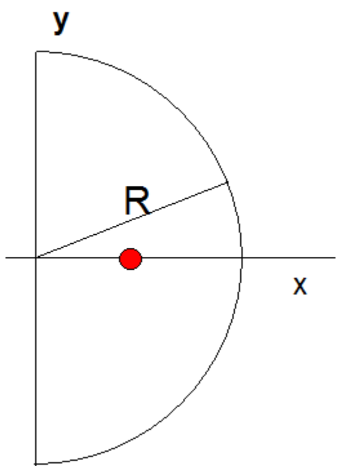
Semianello omogeneo di massa M e raggio R:

$$\lambda = \frac{M}{\pi R}$$

$y_{CM} = 0$ simmetria

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}R}^{+\frac{\pi}{2}R} x\lambda ds = \frac{\lambda}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} xRd\theta = \frac{\lambda}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R\cos\theta R d\theta$$

$$\rightarrow x_{CM} = \frac{\lambda}{M}R^2\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2\lambda R^2 = \frac{2}{\pi}R$$



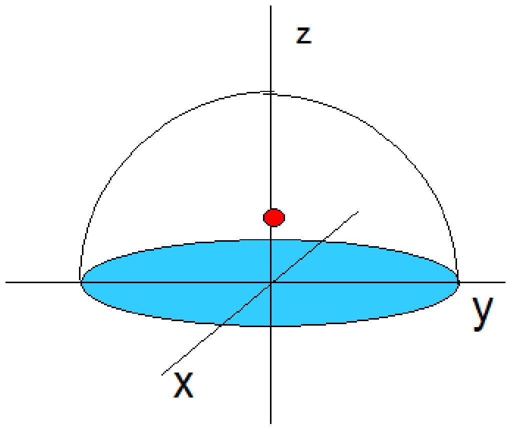
Semicerchio omogeneo di massa M e raggio R:

$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$y_{CM} = 0$ simmetria

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x\sigma r dr d\theta = \frac{\sigma}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta dr d\theta = \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$x_{CM} = \frac{2R^3}{M}\frac{2M}{3\pi R^2} = \frac{4}{3\pi}R$$



Semisfera omogenea di massa M e raggio R:

$$\rho = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

$x_{CM} = y_{CM} = 0$ simmetria

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^R \rho r^2 dr \int_0^{+\frac{\pi}{2}} z \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$z_{CM} = \frac{2\pi\rho}{M}\int_0^R r^3 dr \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{2\pi\rho}{M}\frac{R^4}{4}\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$z_{CM} = \frac{2\pi}{M}\frac{R^4}{8}\frac{3M}{2\pi R^3} = \frac{3}{8}R$$