

Impulso di una forza:

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \Delta \mathbf{p}$$

Caso interessante:

$\mathbf{F}$ grande, Δt piccolo

Esempio:

$$F(t) = a\tau t - at^2 \rightarrow \langle F \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (a\tau t - at^2) dt = a \frac{\tau^2}{6}$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = a\tau t - at^2$$

$$\rightarrow mv(\tau) - mv(0) = \int_0^{\tau} (a\tau t - at^2) dt = a\tau \frac{\tau^2}{2} - \frac{a\tau^3}{3} = a \frac{\tau^3}{6}$$

$$\rightarrow \Delta v = a \frac{\tau^3}{6m} = \frac{\langle F \rangle \tau}{m}$$

$$\rightarrow v(t) - v(0) = a\tau \frac{t^2}{2m} - \frac{at^3}{3m}$$

$$\rightarrow x(\tau) - x(0) = \int_0^{\tau} \left[a\tau \frac{t^2}{2m} - \frac{at^3}{3m} + v(0) \right] dt = \frac{a\tau}{2} \frac{\tau^3}{3m} - \frac{a\tau^4}{12m} + v(0)\tau = \frac{a\tau^4}{12m} + v(0)\tau$$

$$\rightarrow \Delta x = a \frac{\tau^4}{12m} + v(0)\tau \approx a \frac{\tau^4}{12m} = \frac{\langle F \rangle \tau^2}{2m}$$

Se $\langle F \rangle \nearrow$, $\tau \searrow$, $\langle F \rangle \tau \sim \text{cost}$:

$\rightarrow \Delta v \sim \text{cost}$, $\Delta x \sim 0$ forza impulsiva

Collisioni

Forze interne:

molto intense, breve durata

→ Forze esterne di solito trascurabili durante la collisione

→ Sistema isolato

Conservazione:

Quantità di moto:
sempre

Mom. angolare:
sempre

(Energia cinetica:
se forze interne conservative)

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}$$

$$\mathbf{L}_{in} = \mathbf{L}_{fin}$$

$$(E_{in} = E_{fin} \text{ se collisione elastica})$$

Punti materiali $\sim$ Oggetti privi di gradi di libert  interni

Forze interne 'di contatto' $\rightarrow$ Urti 1-dimensionali

[Ossia: Esiste un SRI in cui l'urto   1-dimensionale]

Es. collisioni fra carri ferroviari in movimento su binario rettilineo

Conservazione q. di moto:

$$m_1 v_{1x0} + m_2 v_{2x0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

Situazione tipica:

Dati $m_1, v_{1x0}, m_2, v_{2x0}$, trovare v_{1x}, v_{2x}

2 incognite, 1 equazione $\rightarrow$ Sol. non determinata

Osservazione sperimentale (Newton!):

$$v_{1x} - v_{2x} = -e(v_{1x0} - v_{2x0})$$

e coeff. di restituzione $\rightarrow 0 < e < 1$:

dipende da caratteristiche dei corpi

2 incognite, 2 equazioni $\rightarrow$ Sol. determinata

$$\begin{cases} m_1 v_{1x0} + m_2 v_{2x0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ v_{1x} - v_{2x} = -e(v_{1x0} - v_{2x0}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_{1x} = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \frac{m_2(1+e)}{m_1 + m_2} v_{2x0} \\ v_{2x} = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} v_{2x0} \end{cases}$$

Casi limite interessanti:

$e = 1$ urto elastico

$$\begin{cases} v_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2x0} \\ v_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2x0} \end{cases}$$

$m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{cases} v_{1x} = v_{2x0} \\ v_{2x} = v_{1x0} \end{cases} \quad \text{vel. scambiate}$$

$e = 0$ urto completamente elastico

$$\begin{cases} v_{1x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2x0} \\ v_{2x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2x0} \end{cases}$$

$$\rightarrow v_{1x} = v_{2x} = \frac{m_1 v_{1x0} + m_2 v_{2x0}}{m_1 + m_2} = v_{CM}$$

Variazione en. cinetica (dopo un po' di algebra estrema..):

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1x0}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2x0}^2$$

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_{1x0} - v_{2x0})^2 = -\frac{1}{2} \mu_{12} (1 - e^2) v_{rel\ in}^2$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \begin{cases} 0 & \text{urto elastico} \\ -\frac{1}{2} \mu_{12} v_{rel\ in}^2 & \text{urto anelastico} \end{cases}$$

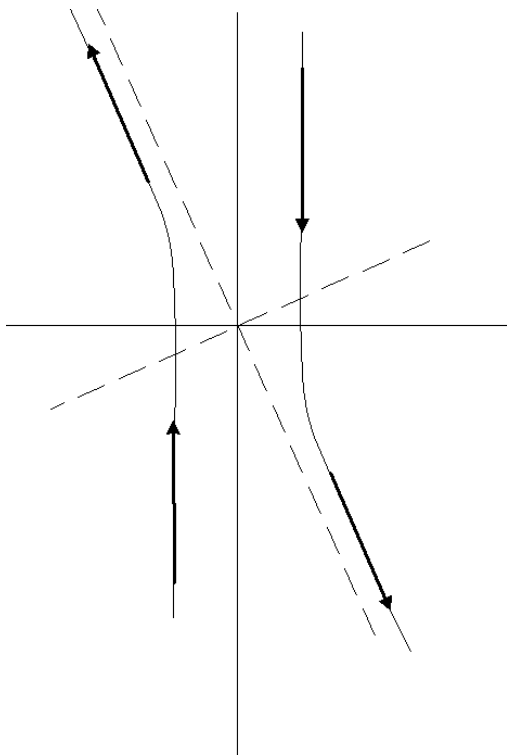
Forze interne 'a distanza' $\rightarrow$ Urti obliqui

[Ossia: Non esiste un SRI in cui l'urto sia 1-dimensionale]

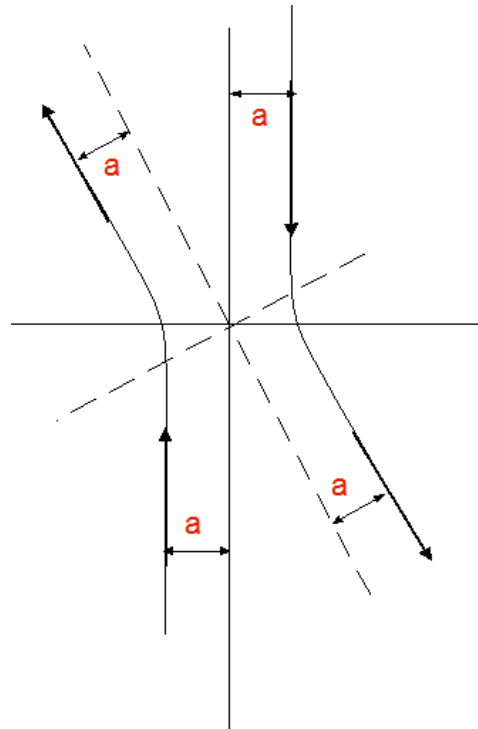
Es.: 'Collisioni' fra comete e Sole, mediate dalla forza di gravitazione

Conservazione mom. angolare $\rightarrow$ Vincolo sul *parametro d'urto* finale

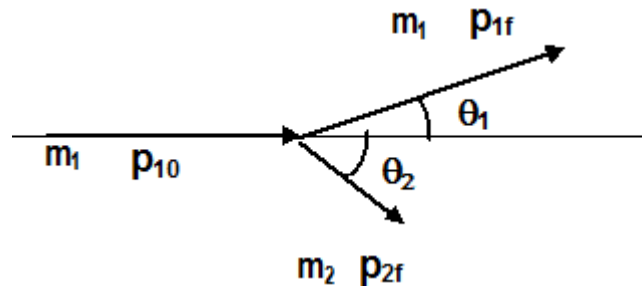
Es. Collisione elastica fra masse eguali, SRI del CM



Non permesso



Permesso



Urto elastico:

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Situazione tipica:

Trovare $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ note masse e vel. iniziali

6 incognite, 4 equazioni: Sol. non determinata

→ Per sol. determinata occorre conoscere la forza fra le masse

Tuttavia: possibile trovare relazioni fra le grandezze finali

Due SRI particolarmente utili (e comuni):

Centro di massa (CM) : $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$

Laboratorio (LAB) : $\mathbf{p}_2 = 0$

In entrambi i SRI: Conservazione di $\mathbf{p}_{tot} \rightarrow$ Urto *piano*

[Non vero, in generale, in altri SRI]

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$\rightarrow \text{Nel Lab:} \begin{cases} \mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Proiettando sugli assi:

$$\begin{cases} p_{10} = p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos \theta_2 \\ 0 = p_1 \sin \theta_1 - p_2 \sin \theta_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \rightarrow \frac{p_{10}^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{10} - p_1 \cos \theta_1 = p_2 \cos \theta_2 \\ p_1 \sin \theta_1 = p_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_{10}^2 + p_1^2 \cos^2 \theta_1 - 2p_{10}p_1 \cos \theta_1 = p_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ p_1^2 \sin^2 \theta_1 = p_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{cases}$$

$$p_{10}^2 + p_1^2 - 2p_{10}p_1 \cos \theta_1 = p_2^2 = \frac{m_2}{m_1}(p_{10}^2 - p_1^2)$$

$$\rightarrow p_1 = p_{10} \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}} \right]$$

$$p_1 = p_{10} \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}} \right]$$

$$m_2 < m_1 :$$

$$\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \geq 0 \rightarrow \theta_1 \leq \theta_{\max}$$

$$\cos^2 \theta_{\max} = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \quad \text{Angolo max. di deflessione}$$

$$m_2 \ll m_1 :$$

$$\theta_{\max} \approx 0$$

2 valori di p_1 per ogni valore di $\theta_1 \leq \theta_{\max}$

$$m_2 > m_1 :$$

$$\theta_{\max} = \pi$$

1 valore di p_1 per ogni valore di $\theta_1 \leq \pi$ (segno +)

$$m_2 = m_1 :$$

$$p_1 = p_{10} \cos \theta_1 \rightarrow p_2 = p_{10} \sin \theta_1 \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

$$p_1 = p_{10} \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}} \right]$$

$$\theta_1 = 0$$

$$\rightarrow p_1 = p_{10} \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{m_2 + m_1}{m_1 + m_2}} \right]$$

$$\rightarrow p_1 = p_{10} \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2}, p_2 = p_{10} \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\rightarrow E_k^2 = E_{k0}^1 \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \right)^2 \rightarrow 4 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)^2$$

$$\rightarrow 4 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} + 1$$

$$\rightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 2 \left(1 - 2 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \right) \frac{m_1}{m_2} + 1 = 0$$

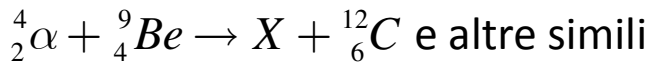
$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = - \left(1 - 2 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \right) \pm \sqrt{\left(1 - 2 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \right)^2 - 1}$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} - 1 \pm \sqrt{-4 \frac{E_{k0}^1}{E_k^2} + 4 \left(\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2 \left[\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \right)^2 - \frac{E_{k0}^1}{E_k^2}} \right] - 1$$

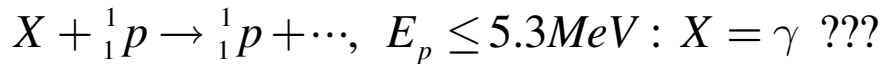
Scoperta del neutrone

Bothe & Becker 1930:



X radiazione neutra, penetrante

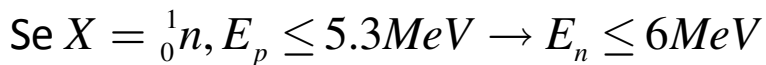
Joliot-Curie 1931:



Chadwick 1932:



$\rightarrow$ Impossibile: $E_\gamma \leq 11\text{MeV}$



OK: Perché?

$$p_2 = p_{10} \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

$\rightarrow$ Determinazione di m_1 da p_2, p_{10}, m_2

p_{10} di fatto sconosciuta

$\rightarrow$ 2 diversi nuclei: ${}^1_1\text{H}, {}^{14}_7\text{N}$

m_2', m_2''

$\rightarrow p_2', p_2''$ misurate

$$\rightarrow \begin{cases} p_2' = p_{10} \frac{2m_2'}{m_1 + m_2'} \\ p_2'' = p_{10} \frac{2m_2''}{m_1 + m_2''} \end{cases} \rightarrow \frac{p_2'}{p_2''} \frac{m_2''}{m_2'} = \frac{m_1 + m_2''}{m_1 + m_2'}$$

$$\rightarrow m_1 + m_2'' = (m_1 + m_2') \frac{p_2'}{p_2''} \frac{m_2''}{m_2'}$$

$$\rightarrow m_1 \left(1 - \frac{p_2'}{p_2''} \frac{m_2''}{m_2'} \right) = m_2' \frac{p_2'}{p_2''} \frac{m_2''}{m_2'} - m_2''$$

$$\rightarrow m_1 = \frac{m_2' m_2'' (p_2' - p_2'')}{p_2'' m_2' - p_2' m_2''}$$

Dalle misure:

$$m_1 \sim 1.15 m_p \pm 10\%$$