Impulso di una forza:

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \Delta\mathbf{p}$$

Caso interessante:

$\mathbf{F}$ grande, Δt piccolo

Esempio:

$$F(t) = a\tau t - at^2 \rightarrow \langle F \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(a\tau t - at^2\right) dt = a\frac{\tau^2}{6}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = a\tau t - at^2$$

$$\rightarrow mv(\tau) - mv(0) = \int_0^\tau \left(a\tau t - at^2\right) dt = a\tau\frac{\tau^2}{2} - \frac{a\tau^3}{3} = a\frac{\tau^3}{6}$$

$$\rightarrow \Delta v = a\frac{\tau^3}{6m} = \frac{\langle F \rangle \tau}{m}$$

$$\rightarrow v(t) - v(0) = a\tau\frac{t^2}{2m} - \frac{at^3}{3m}$$

$$\rightarrow x(\tau) - x(0) = \int_0^\tau \left[a\tau\frac{t^2}{2m} - \frac{at^3}{3m} + v(0)\right] dt = \frac{a\tau}{2}\frac{\tau^3}{3m} - \frac{a\tau^4}{12m} + v(0)\tau$$

$$\rightarrow x(\tau) - x(0) = \frac{a\tau^4}{12m} + v(0)\tau$$

$$\rightarrow \Delta x = a\frac{\tau^4}{12m} + v(0)\tau \approx a\frac{\tau^4}{12m} = \frac{\langle F \rangle \tau^2}{2m}$$

Se $\langle F \rangle \nearrow,\ \tau \searrow,\ \langle F \rangle \tau \sim$ cost:

$\rightarrow \Delta v \sim$ cost, $\Delta x \sim 0$ forza impulsiva

Collisioni

Forze interne:

molto intense, breve durata

→Forze esterne di solito trascurabili durante la collisione

→Sistema isolato

Conservazione:

Quantita' di moto:
sempre

Mom. angolare:
sempre

(Energia cinetica:
se forze interne conservative)

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}$$

$$\mathbf{L}_{in} = \mathbf{L}_{fin}$$

$(E_{in} = E_{fin}$ se collisione elastica)

Punti materiali $\sim$ Oggetti privi di gradi di liberta' interni

Forze interne 'di contatto' $\rightarrow$ Urti 1-dimensionali

[Ossia: Esiste un SRI in cui l'urto e' 1-dimensionale]

Es. collisioni fra carri ferroviari in movimento

su binario rettilineo

Conservazione q. di moto:

$$m_1 v_{1x0} + m_2 v_{2x0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

Situazione tipica:

Dati $m_1, v_{1x0}, m_2, v_{2x0}$, trovare v_{1x}, v_{2x}

2 incognite, 1 equazione $\rightarrow$ Sol. non determinata

Osservazione sperimentale (Newton!):

$$v_{1x} - v_{2x} = -e\left(v_{1x0} - v_{2x0}\right)$$

e coeff. di restituzione $\rightarrow 0 < e < 1$:

dipende da caratteristiche dei corpi

2 incognite, 2 equazioni $\rightarrow$ Sol. determinata

$$\begin{cases} m_1 v_{1x0} + m_2 v_{2x0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ v_{1x} - v_{2x} = -e\left(v_{1x0} - v_{2x0}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_{1x} = \dfrac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \dfrac{m_2\left(1+e\right)}{m_1 + m_2} v_{2x0} \\ v_{2x} = \dfrac{m_1\left(1+e\right)}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \dfrac{m_2 - e m_1}{m_1 + m_2} v_{2x0} \end{cases}$$

Casi limite interessanti:

$e=1$ urto elastico

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2x0} \\ v_{2x} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2x0} \end{cases}$$

$m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{cases} v_{1x} = v_{2x0} \\ v_{2x} = v_{1x0} \end{cases} \text{ vel. scambiate}$$

$e=0$ urto completamente elastico

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2x0} \\ v_{2x} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1x0} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2x0} \end{cases}$$

$$\rightarrow v_{1x} = v_{2x} = \frac{m_1 v_{1x0} + m_2 v_{2x0}}{m_1 + m_2} = v_{CM}$$

Variazione en. cinetica (dopo un po' di algebra estrema..):

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1x0}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2x0}^2$$

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(1 - e^2\right) \left(v_{1x0} - v_{2x0}\right)^2 = -\frac{1}{2} \mu_{12} \left(1 - e^2\right) v_{\substack{rel \\ in}}^2$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \begin{cases} 0 & \text{urto elastico} \\ -\dfrac{1}{2} \mu_{12} v_{\substack{rel \\ in}}^2 & \text{urto anelastico} \end{cases}$$

Scoperta del neutrone

Bothe & Becker 1930:

${}_2^4\alpha + {}_4^9Be \to X + {}_6^{12}C$ e altre simili

X radiazione neutra, penetrante

Joliot-Curie 1931:

$X + {}_1^1p \to {}_1^1p + \cdots,\ \ E_p \le 5.3MeV : X = \gamma$???

Chadwick 1932:

Se $X = \gamma, E_p \le 5.3MeV \to E_\gamma \le 50MeV$

$\to$ Impossibile: $E_\gamma \le 11MeV$

Se $X = {}_0^1n, E_p \le 5.3MeV \to E_n \le 6MeV$

OK: Perche'?

$$p_2 = p_{10}\frac{2m_2}{m_1+m_2}$$

$\to$ Determinazione di m_1 da p_2, p_{10}, m_2

p_{10} di fatto sconosciuta

$\to$ 2 diversi nuclei: ${}_1^1H, {}_7^{14}N$

m_2', m_2''

$\to p_2', p_2''$ misurate

$$\to \begin{cases} p_2' = p_{10}\dfrac{2m_2'}{m_1+m_2'} \to v_2' = m_1\dfrac{2}{m_1+m_2'}v_{10} \\ p_2'' = p_{10}\dfrac{2m_2''}{m_1+m_2''} \to v_2'' = m_1\dfrac{2}{m_1+m_2''}v_{10} \end{cases}$$

$$\to \frac{v_2'}{v_2''} = \frac{m_1+m_2''}{m_1+m_2'} \to v_2'(m_1+m_2') = (m_1+m_2'')v_2''$$

$$\frac{v_2'}{v_2''}(m_1 + m_2') = m_1 + m_2'' \rightarrow m_1\left(1 - \frac{v_2'}{v_2''}\right) = m_2'\frac{v_2'}{v_2''} - m_2''$$

$$\rightarrow m_1 = \frac{m_2'\frac{v_2'}{v_2''} - m_2''}{1 - \frac{v_2'}{v_2''}}$$

Masse nucleari note
Velocita' di rinculo dei nuclei misurate
(es. camera a nebbia: lunghezza percorso da' velocita')

Dalle misure:
$m_1 \sim 1.15 m_p \pm 10\%$

Forze interne 'a distanza' $\rightarrow$ Urti obliqui

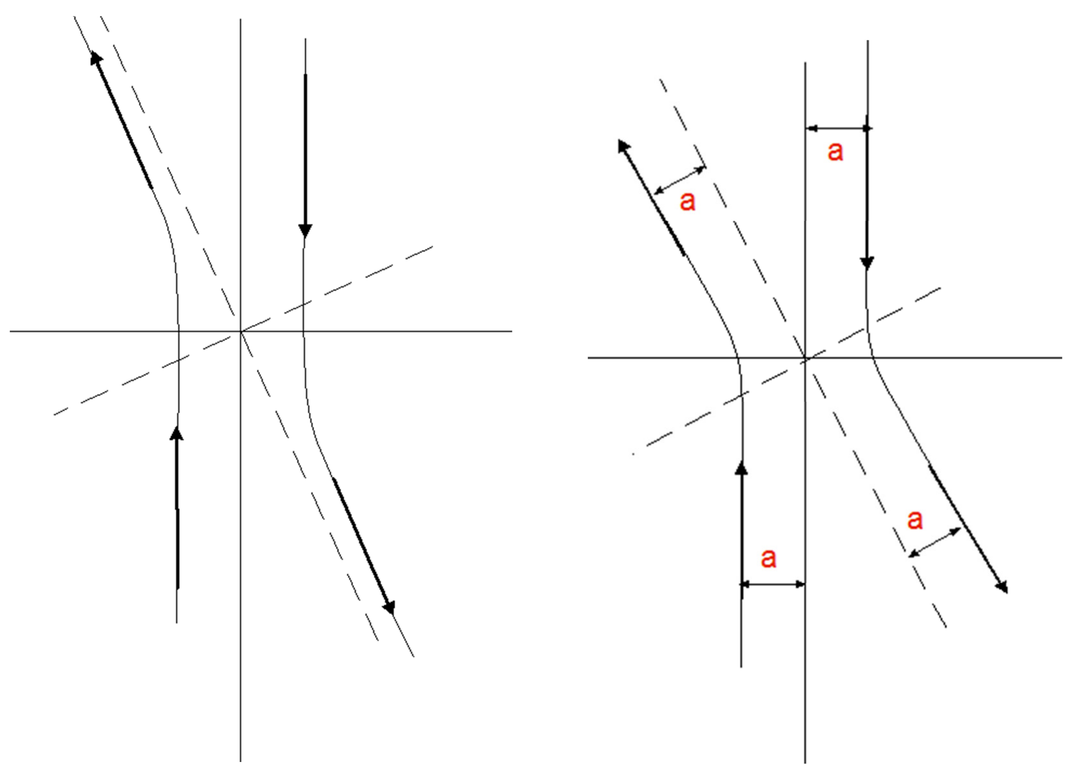
[Ossia: Non esiste un SRI in cui l'urto sia 1-dimensionale]

Es.: 'Collisioni' fra comete e Sole, mediate
dalla forza di gravitazione

Conservazione mom. angolare

$\rightarrow$ Vincolo sul *parametro d'urto* finale

Es. Collisione elastica fra masse eguali, SRI del CM



Non permesso Permesso

Urto elastico:

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Situazione tipica:

Trovare $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$ note masse e vel. iniziali

6 incognite, 4 equazioni: Sol. non determinata

$\rightarrow$ Per sol. determinata occorre conoscere la forza fra le masse

Tuttavia: possibile trovare relazioni fra le grandezze finali

Due SRI particolarmente utili (e comuni):

Centro di massa (CM) : $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$

Laboratorio (LAB) : $\mathbf{p}_2 = 0$

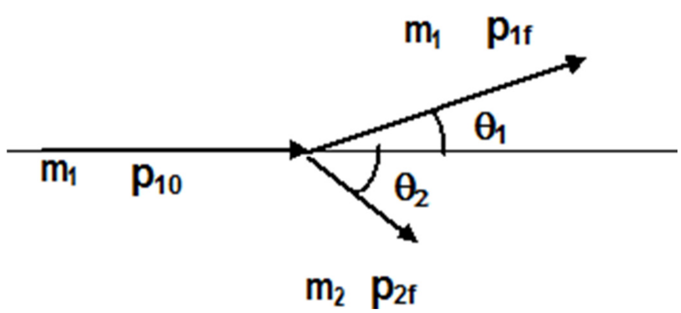
In entrambi i SRI: Conservazione di $\mathbf{p}_{tot}$ $\rightarrow$ Urto *piano*

[Non vero, in generale, in altri SRI]

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$\rightarrow \text{Nel Lab}: \begin{cases} \mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \end{cases}$$



Proiettando sugli assi:

$$\begin{cases} p_{10} = p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2 \\ 0 = p_1 \sin\theta_1 - p_2 \sin\theta_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \rightarrow \frac{p_{10}^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{10} - p_1 \cos\theta_1 = p_2 \cos\theta_2 \\ p_1 \sin\theta_1 = p_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_{10}^2 + p_1^2 \cos^2\theta_1 - 2 p_{10} p_1 \cos\theta_1 = p_2^2 \cos^2\theta_2 \\ p_1^2 \sin^2\theta_1 = p_2^2 \sin^2\theta_2 \end{cases}$$

$$p_{10}^2 + p_1^2 - 2 p_{10} p_1 \cos\theta_1 = p_2^2 = \frac{m_2}{m_1}\left(p_{10}^2 - p_1^2\right)$$

$$\rightarrow p_1 = p_{10}\left[\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}}\right]$$

$m_2 < m_1$:

Due soluzioni con segni $\pm$

$$\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \geq 0 \rightarrow \theta_1 \leq \theta_{\max}$$

$\cos^2\theta_{\max} = 1 - \dfrac{m_2^2}{m_1^2}$ Angolo max. di deflessione

$m_2 \ll m_1$: $\theta_{\max} \approx 0$

2 valori di p_1 per ogni valore di $\theta_1 \leq \theta_{\max}$

$m_2 > m_1$: $\theta_{\max} = \pi$

Solo soluzione col segno $+$:

Argomento della radice $> \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1$, p_1 definito non negativo

1 valore di p_1 per ogni valore di $\theta_1 \leq \pi$

$m_2 = m_1$:

$$p_1 = p_{10}\cos\theta_1 \rightarrow p_2 = p_{10}\sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

Collisione 'head-on': $\theta_1 = 0$

Determinazione delle masse dalle en. cinetiche

$$p_1 = p_{10}\left[\frac{m_1}{m_1+m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\frac{m_2+m_1}{m_1+m_2}}\right]$$

$$\rightarrow p_1 = p_{10}\frac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2}, p_2 = p_{10}\frac{2m_2}{m_1+m_2}$$

$$\rightarrow E_k^2 = E_{k0}^1\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{2}{\frac{m_1}{m_2}+1}\right)^2 \rightarrow 4\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)^2$$

$$\rightarrow 4\frac{E_{k0}^1}{E_k^2}\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\frac{m_1}{m_2} + 1$$

$$\rightarrow \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\left(1 - 2\frac{E_{k0}^1}{E_k^2}\right)\frac{m_1}{m_2} + 1 = 0$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = -\left(1 - 2\frac{E_{k0}^1}{E_k^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - 2\frac{E_{k0}^1}{E_k^2}\right)^2 - 1}$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} - 1 \pm \sqrt{-4\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} + 4\left(\frac{E_{k0}^1}{E_k^2}\right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2\left[\frac{E_{k0}^1}{E_k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_{k0}^1}{E_k^2}\right)^2 - \frac{E_{k0}^1}{E_k^2}}\right] - 1$$