Corpo rigido: Insieme di punti materiali (← corpo esteso) le distanze fra i quali sono invariabili

Gradi di liberta': n. quantita' necessarie e sufficienti a definire la posizione del corpo

→3 + 3 = 6

3 per posizione di un punto (es CM)

3 per orientazione assi propri rispetto ad assi fissi

[Conteggio: 3 assi individuati dai 3 versori

Ogni versore:

3 componenti lungo assi fissi → 3 x 3 = 9 componenti

Modulo = 1 → 1 x 3 = 3 condizioni

Versori ortogonali a coppie: 3 condizioni

→9 – 6 = 3 parametri]

Forze interne: non hanno ruolo (punti a posizione fissa) → solo forze esterne

Spostamento infinitesimo del corpo:

2 parti

Traslazione(rigida)

Rotazione(rigida)

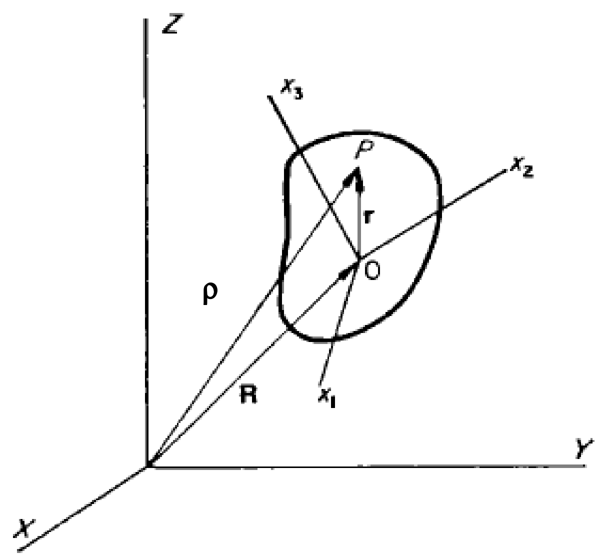
$\mathbf{r}$ pos. di un punto rispetto al CM

$\boldsymbol{\rho}$ pos. del punto rispetto al rif. fisso

$\mathbf{R}$ pos. del CM nel rif. fisso

$\rightarrow d\boldsymbol{\rho} = d\mathbf{R} + d\phi \times \mathbf{r}$ Teorema di Chasles (non dimostrato)

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



$d\mathbf{R}$ Traslazione infinitesima del CM

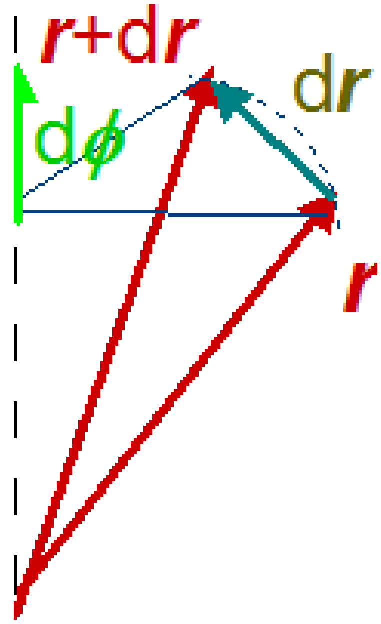
$d\phi \times \mathbf{r}$ Rotazione infinitesima attorno ad un asse per il CM

Giustificazione non rigorosa della decomposizione di Chasles:

$(\mathbf{r}+d\mathbf{r})^2 = \mathbf{r}^2$ Corpo rigido

$\rightarrow r^2 + (dr)^2 + 2d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \approx r^2 + 2d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2$

$\rightarrow d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 0 \rightarrow d\mathbf{r} \perp \mathbf{r}$



$|d\mathbf{r}| = r\sin\alpha d\phi$

$\rightarrow d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

In realta', non necessario che il punto sia il CM:
qualunque punto appartenente al corpo (rigido) va bene!

Richiamo: grandezze meccaniche per sistema di p. materiali
in S (rif. fisso) e S' (rif. punto Q, in moto rispetto a S)

$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - M\mathbf{v}_Q = \mathbf{P} - \mathbf{P}_Q$ q. di moto

Se $Q = CM$:

$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{P}_{CM} = 0$

$\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \mathbf{r}_Q \times \mathbf{P} + \left(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{CM}\right) \times M\mathbf{v}_Q$ m. angolare

Se $Q = fisso : \mathbf{v}_Q = 0$

$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_Q \times \mathbf{P} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}^{(Q)}$

$\mathbf{L}'$ mom. angolare del moto relativo a Q

$\mathbf{L}^{(Q)}$ contributo derivante da spostamento fisso del polo da O a Q

Se $Q = CM : \mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{CM}$

$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM}$

$\mathbf{L}'$ mom. angolare del moto *relativo al* CM

$\mathbf{L}_{CM}$ mom. angolare del moto *del* CM

Corpo esteso:

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1,N} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i' = \sum_{i=1,N} m_i \left(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'\right) \rightarrow \int_{corpo} dm \left(\mathbf{r}' \times \mathbf{v}'\right)$$

Per corpo rigido:

Moto attorno a CM = Pura rotazione

attorno ad un asse istantaneo fisso

Rotazione:

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{L}' = \int_{corpo} dm(\mathbf{r}' \times \mathbf{v}') = \int_{corpo} dm(\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'))$$

Identita' vettoriale:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\rightarrow \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} r'^2 - \mathbf{r}'(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')$$

$$\rightarrow \mathbf{L}' = \int_{corpo} dm(\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) = \int_{corpo} dm(\boldsymbol{\omega} r'^2 - \mathbf{r}'(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'))$$

Osservazione:

Oggetto planare (= 2D) o equivalente che ruota nel suo piano

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}'$$

$$\rightarrow \mathbf{L}' = \int_{corpo} dm\left(\boldsymbol{\omega} r'^2 - \mathbf{r}'\left(\underbrace{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'}_{=0}\right)\right) = \int_{corpo} \boldsymbol{\omega} r'^2 \, dm \rightarrow \mathbf{L}' \parallel \boldsymbol{\omega}$$

In generale invece $\mathbf{L}'$ *non* $\parallel$ $\boldsymbol{\omega}$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$ En. cinetica

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_i '$$

$$\rightarrow E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_i '\right) \cdot \left(\mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_i '\right)$$

$$\rightarrow E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i '^2 + \mathbf{v}_Q \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i ' = E_k^{(Q)} + E_k ' + \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{P}'$$

Se $Q = fisso : \mathbf{v}_Q = 0 \rightarrow E_k^{(Q)} = 0$

$\rightarrow E_k = E_k '$

Se $Q = CM : \mathbf{P}' = 0$

$$\rightarrow E_k = E_k^{(CM)} + E_k ' = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v '^2_i$$

$\sum_i \frac{1}{2} m_i v '^2_i$ en. cinetica del moto *relativo al* CM

$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ en. cinetica del moto *del* CM

Osservazione importante, e poco intuitiva, sul risultato:

Se $Q = fisso : \mathbf{v}_Q = 0 \rightarrow E_k^{(Q)} = 0$

$\rightarrow E_k = E_k '$

Valida anche se Q e' *istantaneamente*

(= non permanentemente) *fisso*, ossia negli istanti

in cui $\mathbf{v}_Q = 0$

Corpo esteso:

$$E_k ' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v '^2_i \rightarrow \int_{corpo} \frac{1}{2} dm v '^2$$

Per corpo rigido:

Moto attorno a un punto fisso = Pura rotazione

$\rightarrow E_k(tot) = E_k(rotaz)$ attorno ad un asse istantaneo fisso

Rotazione:

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rightarrow v'^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

Identita' vettoriale:

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ Vol. 'parallelepipedo' con lati $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

$$\rightarrow v'^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\right] = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}')$$

$$\rightarrow E_k' = \int_{corpo} \frac{1}{2} dm v'^2 = \frac{1}{2} \int_{corpo} dm \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}')$$

$$\rightarrow E_k' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{\int_{corpo} dm (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}')}_{\mathbf{L}'} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}'$$

Nel riferimento del CM:

$$\mathbf{L}_{CM} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{M}^{(ext)}\,' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}$$

$$v_{CM} = 0$$

$$\rightarrow W_{ext} + W_{\text{int}} = \Delta E_k\,' = \Delta\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i\right)$$

Per corpo rigido:

$$W_{\text{int}} = 0$$

$E_k\,' =$ pura rotazione

$$\rightarrow W_{ext} = \Delta E_k\,' = \Delta E'_{k\ rot}$$

Moto generale di rotazione:

Complicato, difficile da trattare
$\longrightarrow$ Equazioni di Eulero

Casi semplici:

Rotazione attorno a un asse fisso

Rotolamento