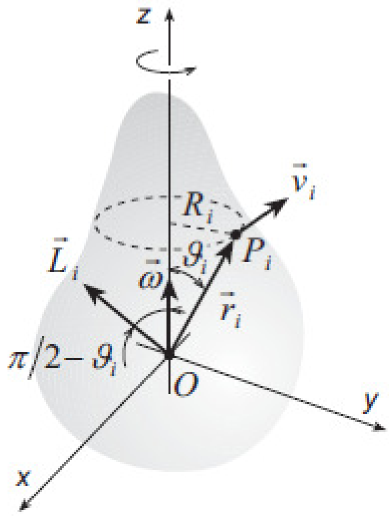
Rotazione rispetto ad asse fisso

Asse z : asse di rotazione



$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

$$R_i \equiv r_i \sin \vartheta_i$$

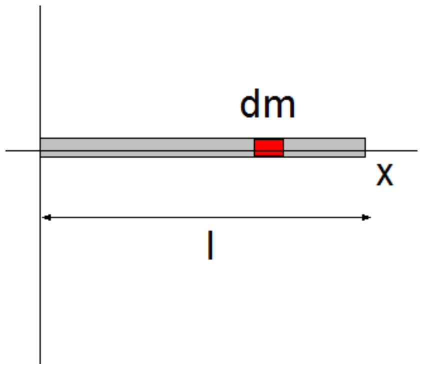
$$L_{i\,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_i\right) = L_i \sin \vartheta_i = m_i r_i \sin \vartheta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega .$$

$$L_z = \sum_i L_{i\,z} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega = I_z \omega ,$$

$$I_z \equiv \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}L_z\omega = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

Mom. di inerzia: proprieta' di ogni corpo rigido
Dipende da:
massa, forma e dimensioni del corpo
asse rispetto al quale lo si considera

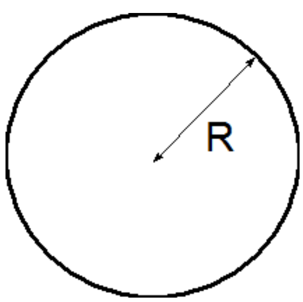


Asta omogenea: lunghezza l, massa m

$\lambda = \frac{m}{l}$ densita' lineare di massa $\rightarrow$ costante se omogenea

$\rightarrow dm = \lambda dx$ elemento di massa

$$\rightarrow I = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \lambda \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2$$

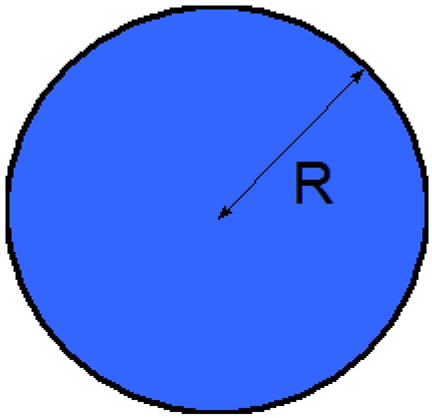


Anello omogeneo, massa m, raggio R:

$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$ densita' lineare di massa $\rightarrow$ costante se omogenea

$dm = \lambda ds$

$$\rightarrow I = \int_0^{2\pi R} \lambda R^2 ds = \int_0^{2\pi} \lambda R^2 R d\theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \lambda R^3 = \frac{2\pi m R^3}{2\pi R} = mR^2$$



Disco omogeneo, massa m, raggio R:

$\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$ densita' superficiale di massa $\rightarrow$ costante se omogenea

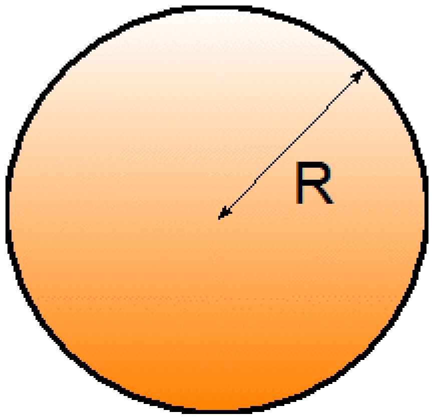
$$dm = \sigma dA$$

Coordinate polari piane:

$$dA = r dr d\theta$$

$$\rightarrow I = \int_{disco} \sigma r^2 dA = \int_{disco} \sigma r^2 r dr d\theta = \sigma \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \sigma 2\pi \frac{1}{4} R^4$$

$$\rightarrow I = \frac{m}{\pi R^2} \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$



Sfera omogenea, massa m, raggio R :

$\rho = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ densita' volumetrica di massa, costante se omogenea

$\rightarrow dm = \rho dV$

Coordinate polari sferiche:

$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$

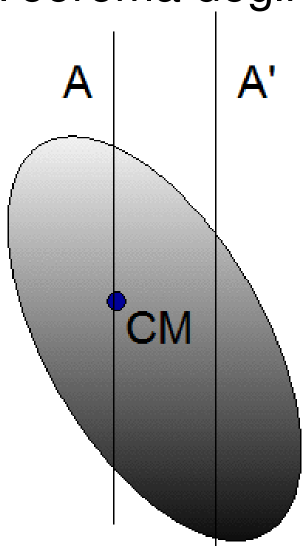
$$\rightarrow I = \int_{sfera} r^2 \rho dV = \rho \int_{sfera} r^2 \sin^2\theta r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

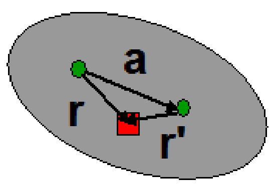
$$\rightarrow I = 2\pi\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\left(\cos\theta\right)$$

$$\rightarrow I = 2\pi\rho \frac{1}{5} R^5 \left(\int_1^{-1} 1 - \cos^2\theta \right) d\left(\cos\theta\right) = 2\pi \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{1}{5} R^5 \left[2 - \frac{2}{3} \right]$$

$$\rightarrow I = \frac{3}{2}\frac{1}{5} m R^2 \frac{4}{3} = \frac{2}{5} m R^2$$

Teorema degli assi paralleli:





$\mathbf{r}_i$ pos. elemento di massa *rispetto al CM*

$\mathbf{r}_i'$ pos. elemento di massa rispetto ad asse parallelo

$$I_i = m_i r_i^2$$

$$I' = m_i r_i'^2$$

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$$

$$\rightarrow r_i'^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{a})^2 = r_i^2 + a^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}$$

$$\rightarrow I_i' = m_i \left(r_i^2 + a^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}\right)$$

$$\rightarrow I_i' = m_i \left(r_i^2 + a^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}\right) = I_i + m_i a^2 - 2m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}$$

$$\rightarrow I' = \sum_i I_i' = \sum_i I_i + a^2 \sum_i m_i - 2\mathbf{a} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i = I + Ma^2 + 2\mathbf{a} \cdot M \underbrace{\mathbf{r}_{CM}}_{=0}$$

$$\rightarrow I' = I + Ma^2$$

Estensione al caso di un corpo rigido qualsiasi:

II eq. cardinale

$$\mathbf{M}_P = \frac{d\mathbf{L}_P}{dt}, \quad P \text{ polo sull'asse}$$

Proiezione sull'asse:

$$\underbrace{\mathbf{M}_P \cdot \hat{\mathbf{u}}}_{M_a} = \frac{d\,\overbrace{\mathbf{L}_P \cdot \hat{\mathbf{u}}}^{L_a}}{dt}, \; \hat{\mathbf{u}} \text{ versore dell'asse}$$

$$\rightarrow M_a = \frac{dL_a}{dt}$$

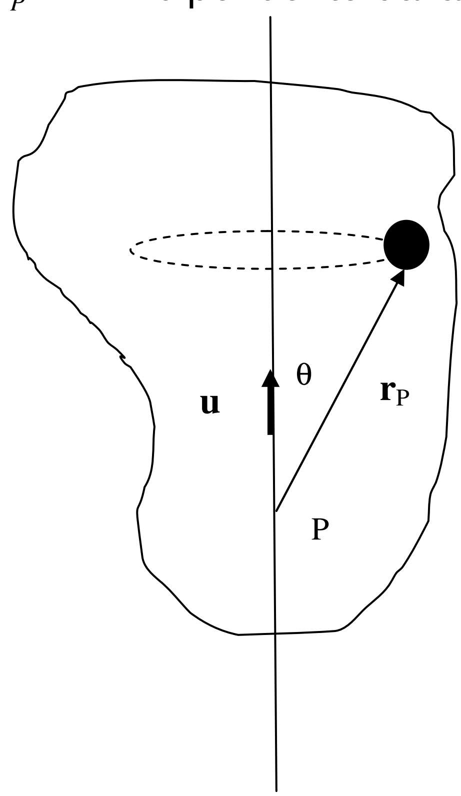
M_a indipendente da scelta di P, purche' sull'asse

Infatti:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} \rightarrow M_a = (\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{F}$$

Al variare di P sull'asse,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P \text{ conserva la stessa direzione} \\ |\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P| = r_P \sin\theta \text{ indipendente dalla coordinata di } P \end{cases}$$



Parallelo fra dinamica di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso e dinamica del punto:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \qquad \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$L_z = I_z\omega \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

$$M_z = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\alpha \qquad \boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}$$

$$dW = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt$$

$$\rightarrow dW = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\right) dt$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{\left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i\right)}_{\boldsymbol{M}_i} dt = \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_i \boldsymbol{M}_i dt$$

$$\rightarrow dW = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M} dt \qquad dW = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt$$

$$dW = M_z\omega dt = M_z d\varphi \qquad dW = F dx$$

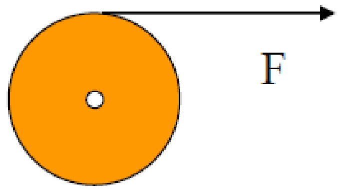
$$dW = M_z d\varphi = I_z\frac{d\omega}{dt}d\varphi$$

$$= I_z\frac{d\varphi}{dt}d\omega = I_z\omega d\omega$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2}I_z\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_1^2 = \Delta E_k \qquad W = \Delta E_k$$

$$P = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M} \qquad P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

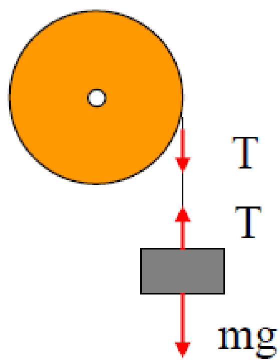
Esempio: accelerazione di una carrucola



$$M = FR = I\alpha$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{FR}{I} = \frac{FR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2F}{mR}$$

Esempio: altra carrucola



$$TR = I\alpha$$

$$mg - T = ma$$

$\alpha R = a$ assenza di scivolamento

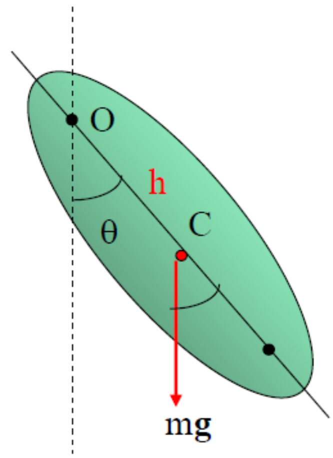
$$\rightarrow TR = I\frac{a}{R} \rightarrow T = I\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}Ma$$

$$\rightarrow mg - \frac{1}{2}Ma = ma \rightarrow a\left(m + \frac{1}{2}M\right) = mg$$

$$\rightarrow a = g\frac{m}{m + \frac{1}{2}M}$$

$$\rightarrow T = g\frac{\frac{1}{2}mM}{m + \frac{1}{2}M}$$

Esempio: pendolo fisico



Asse z: perpendicolare al foglio, verso il lettore

$$\rightarrow M_z = -mgh\sin\theta$$

$$M_z = I_z \alpha$$

$$\rightarrow -mgh\sin\theta = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\rightarrow I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgh}{I_z}}_{\omega_0^2}\theta \simeq 0$$ limite di piccole oscillazioni

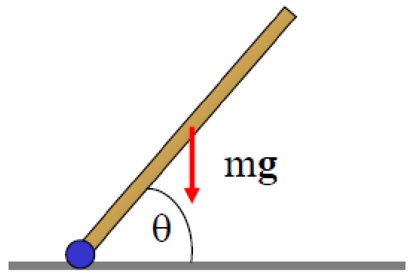
$$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$$

Es.: disco sospeso a distanza h sopra il centro

$$\rightarrow I_z' = I_z + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mh^2 = m\left(\frac{1}{2}R^2 + h^2\right)$$

$$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_z'}} = \sqrt{\frac{2gh}{R^2 + 2h^2}}$$

Esempio: Conservazione dell'energia meccanica nella rotazione attorno ad un asse fisso



$$\begin{cases} E_i = mg\dfrac{\ell}{2}\sin\theta \\ E_f = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{3}\ell^2\right)\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{3g\sin\theta}{\ell}}$$

Relazione fra L_z' e ω:

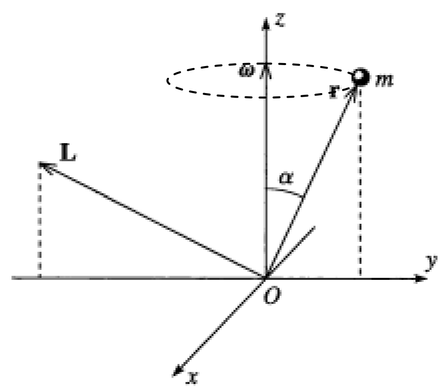
$L_z' = I_z\omega$

Relazione fra E_k' e ω:

$$E_k' = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Ma: $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\omega}$ quantita' vettoriali

Relazione fra $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$?



Per questo sistema:

$$\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega), \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\left(-\omega xz, -\omega yz, \omega\left(x^2+y^2\right)\right) = m\left(-xz, -yz, \left(x^2+y^2\right)\right)\omega$$

$$\rightarrow \begin{cases} L_z = I_z\omega \equiv I_{zz}\omega & \text{mom. di inerzia rispetto a } z \\ L_x = \underbrace{-mxz}_{I_{xz}}\omega & \text{prodotto di inerzia } x, z \\ L_y = \underbrace{-myz}_{I_{yz}}\omega & \text{prodotto di inerzia } y, z \end{cases}$$

$\rightarrow L$ non $\parallel$ $\boldsymbol{\omega}$ $\rightarrow I$ non quantita' scalare ($\leftarrow$ *matrice 3 × 3*)

Momento d'inerzia: *tensore* (estensione dell'idea di vettore)

Generalizzazione a sistema di punti e corpo esteso:

$$\boldsymbol{L} = \left(I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega \right)$$

$$\begin{cases} I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \\ I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i \\ I_{zz} = -\sum_i m_i z_i^2 \end{cases}$$

Generalizzazione a $\boldsymbol{\omega}$ in direzione qualsiasi:

Se $\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z \right)$:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{(x)} + \boldsymbol{L}_{(y)} + \boldsymbol{L}_{(z)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{L}_{(x)} = \left(I_{xx}\omega_x, I_{yx}\omega_x, I_{zx}\omega_x \right) \\ \boldsymbol{L}_{(y)} = \left(I_{xy}\omega_y, I_{yy}\omega_y, I_{zy}\omega_y \right) \\ \boldsymbol{L}_{(z)} = \left(I_{xz}\omega_z, I_{yz}\omega_z, I_{zz}\omega_z \right) \end{array} \right\} I_{ij} \text{ componenti } \textit{tensore di inerzia}$$

Osservazione 1:

$L_z =$ cost

$L_x, L_y =$ oscillanti $\left(\leftarrow \right.$ moto di *precessione* di $\boldsymbol{L}$ attorno a $\left. \boldsymbol{\omega} \right)$

$\rightarrow$ Nel caso generale, $\boldsymbol{L}$ *non* costante

Osservazione 2:

Dinamica del punto: $\boldsymbol{v} =$ cost $\rightarrow \boldsymbol{F} = 0$

Rotazione del corpo rigido: $\boldsymbol{\omega} =$ cost $\cancel{\rightarrow}$ $\boldsymbol{M} = 0$

perche' nel caso piu' generale $\boldsymbol{L}$ ruota attorno a $\boldsymbol{\omega}$ e $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$