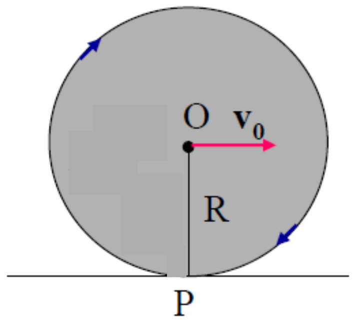
Condizione di puro rotolamento (corpi a sezione circolare):

Moto di roto-traslazione in cui il punto di contatto P ha velocita' (istantanea) nulla

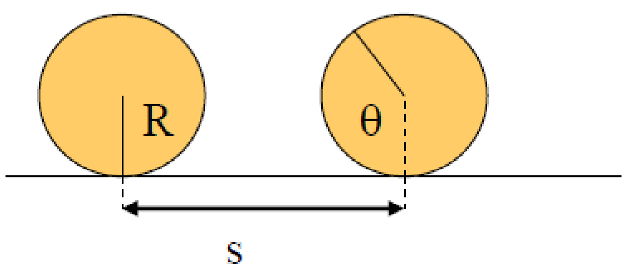


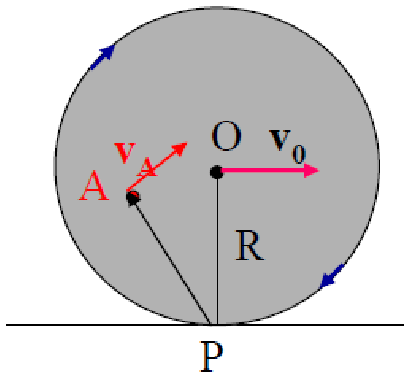
Condizione che esclude la possibilita' di strisciamento

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{v}_P = 0 \rightarrow \boldsymbol{v}_O = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$ condizione di rotolamento

$$\rightarrow \begin{cases} s = R\theta \\ v = R\omega \\ a = R\alpha \end{cases}$$ per puro rotolamento





Due modi equivalenti di considerare il rotolamento:

Rotazione attorno ad O + Traslazione di O
Asse di rotazione fisso (riferimento del CM)

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O)$$

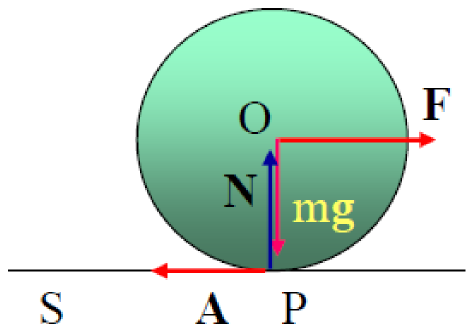
Rotazione attorno a P
Asse di rotazione istantaneo

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_P)$$

In entrambi i modi di considerare il rotolamento,
evidente la rotazione attorno ad un asse fisso:

I caso: asse (permanentemente) fisso
nel riferimento di quiete del CM
II caso: asse (istantaneamente) fisso
nel riferimento del pavimento

Dinamica del rotolamento: Come fare rotolare il corpo rigido



I modo: forza esterna applicata nel CM

Es: Asino che tira un carretto

$$\begin{cases} F - A = ma & \text{Moto del } CM \\ N - mg = 0 & \\ I\alpha = AR & \text{Rotazione attorno al } CM \\ a = \alpha R & \text{Rotolamento} \end{cases}$$

$$\rightarrow I\frac{a}{R} = AR \rightarrow a = A\frac{R^2}{I}$$

$$\rightarrow mA\frac{R^2}{I} + A = F \rightarrow A = \frac{F}{\frac{mR^2}{I} + 1}$$

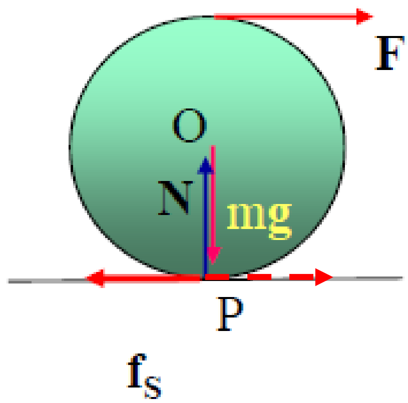
$$\rightarrow a = A\frac{R^2}{I} = F\frac{R^2}{mR^2 + I}$$

$A > 0$: Forza di attrito volvente nella direzione del disegno

$\rightarrow A$ forza resistente

Condizione di rotolamento:

$$F = A\left(\frac{I_P}{I_O}\right) \ \& \ A \leq \mu_s mg \rightarrow F \leq \mu_s mg\left(\frac{I_P}{I_O}\right)$$



Il modo: forza esterna applicata fuori dal CM

Es: YoYo che rotola sul pavimento

$$\begin{cases} F - f_s = ma & \text{Moto del } CM \\ N - mg = 0 & \\ I_P \alpha = F 2R & \text{Rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione} \\ a = \alpha R & \text{Rotolamento} \end{cases}$$

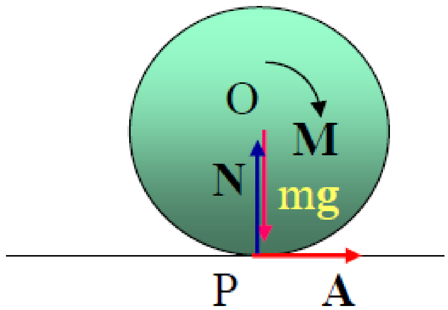
$$\rightarrow a = 2F \frac{R^2}{I_P}$$

$$\rightarrow f_s = -F \frac{2mR^2 - I_P}{\frac{I_P}{I} + 1} < 0$$

f_s -va $\rightarrow$ Opposta al verso indicato

Verso corretto: Freccia tratteggiata

$\rightarrow f_s$ forza motrice !



III modo: Mom. meccanico applicato sull'asse

Es: Bicicletta mossa dai pedali e dalla trasmissione

$$\begin{cases} A = ma & \text{Moto del } CM \\ N - mg = 0 & \\ I'\alpha = M & \text{Rotazione attorno a } P \\ a = \alpha R & \text{Rotolamento} \end{cases}$$

$$\rightarrow I'\frac{a}{R} = M \rightarrow a = \frac{MR}{I'} = \frac{R}{I + mR^2} M$$

$$\rightarrow A = ma = \frac{mMR}{I'} = \frac{mR}{I + mR^2} M$$

A: forza di attrito volvente nella direzione del disegno

$\rightarrow A$: forza motrice

Effettivamente:

CM puo' accelerare *solo* in presenza di forze esterne

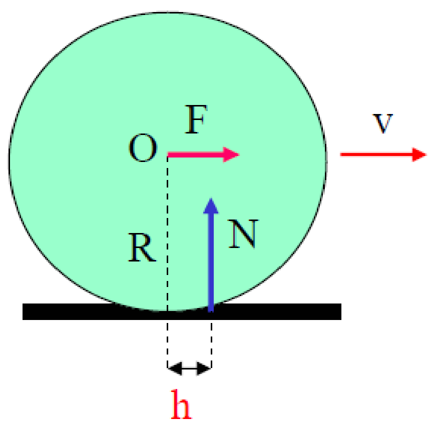
Non servono forze/momenti meccanici interni

Notare: $\boldsymbol{M}$ applicato sull'asse che passa per O

Stesso effetto se considerato all'origine della rotazione attorno a P

Forza di attrito volvente: in principio non compie lavoro
Pot. istantanea sviluppata dall'attrito sull'elemento
di massa corrispondente al punto di contatto:
$P_{\text{istantanea}} = \boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{v} = F \cdot 0 = 0$

Tuttavia, a causa delle inevitabili deformazioni
della sup. di contatto:

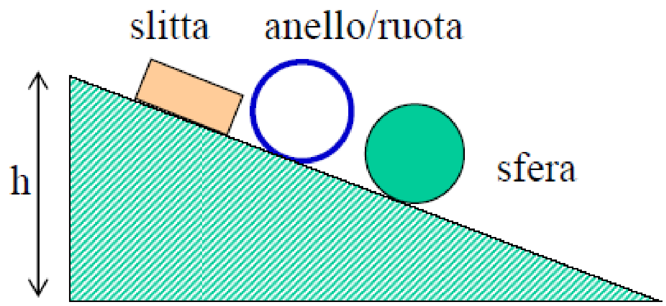


Situazione equivalente ad avere la reazione vincolare
spostata rispetto al CM
$\rightarrow$ Mom. meccanico resistente:
$M = hN = hmg$

Origine della perdita di energia nel rotolamento

Conservazione dell'en. meccanica nel rotolamento
(trascurando l'effetto di cui sopra)

Esempio:



Usando l'asse istantaneo di rotazione:

Cons. energia fra punto di partenza e punto di arrivo

$$mgh = \frac{1}{2} I' \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} \quad \text{anello, sfera}$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{slitta}$$

$$\rightarrow mgh = \frac{1}{2}\left(I + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(mR^2 + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = mv^2 \quad \text{anello}$$

$$\rightarrow mgh = \frac{1}{2}\left(I + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv^2 \quad \text{sfera}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{2gh} \ \text{slitta} \\ v = \sqrt{gh} \ \text{anello} \\ v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \ \text{sfera} \end{cases}$$

Condizione di rotolamento per il piano inclinato:

$$mg\sin\theta = A\left(\frac{I_P}{I_O}\right) \quad \& \; A \le \mu_s mg\cos\theta$$

$$\rightarrow mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta\left(\frac{I_P}{I_O}\right)$$

$$\rightarrow \tan\theta \le \mu_s\left(\frac{I_P}{I_O}\right)$$

Moto giroscopico

Giroscopio: corpo rigido con simmetria assiale posto in rapida rotazione attorno al suo asse di simmetria ($=$ un asse principale d'inerzia)

Es: Disco omogeneo fissato su un asse rigido di massa trascurabile

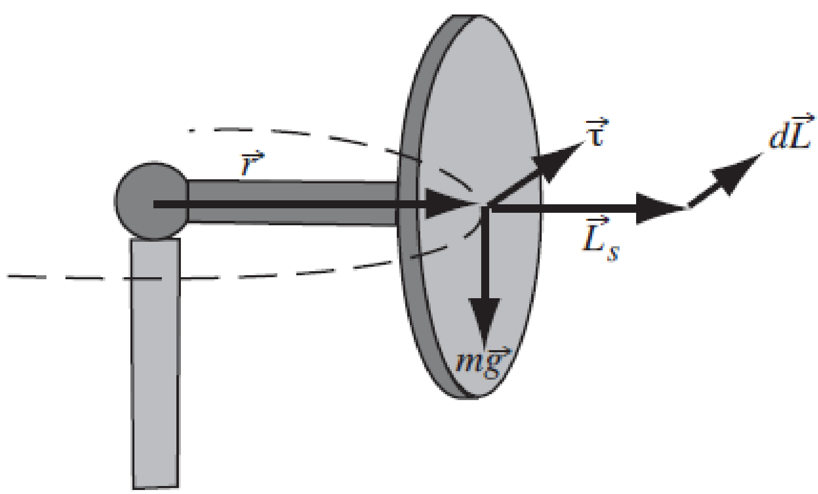
$$\text{Quando}\begin{cases}\text{sottoposto all'azione della forza di gravita'}\\ \text{estremo dell'asse fissato}\end{cases}$$

$\rightarrow$ chiamato a volte 'trottola simmetrica'

Moto generale : complicato

Caso semplice :

Asse orizzontale, Vel. angolare iniziale grande, $\parallel$ asse



In assenza di forze esterne (gravita'):

$\mathbf{L} =$ cost

$\mathbf{L} = I_0\boldsymbol{\omega} = I_0\omega\hat{\mathbf{n}}_3, \quad I_0$ mom. d'inerzia rispetto ad un asse orizzontale che passa per il punto fisso

Mom. meccanico della forza di gravita':

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_{CM} \times m\mathbf{g} = ml\hat{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{g}$

a) In assenza di rotazione attorno all'asse di simmetria:

$\boldsymbol{\omega}_{iniz} = 0 \rightarrow \mathbf{L}_{iniz} = 0$

$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = I_0\boldsymbol{\alpha}$ acc. angolare orizzontale

$\rightarrow \boldsymbol{\omega}$ orizzontale, crescente

$\rightarrow$ Rotazione nel piano verticale attorno al punto fisso

$\rightarrow$ Caduta verso la posizione di equilibrio

$\rightarrow$ Oscillazione pendolare attorno alla posizione di equilibrio

b) Se $\boldsymbol{\omega}_{iniz} = \boldsymbol{\omega} \neq 0$:

$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \dfrac{d\left(I\boldsymbol{\omega}\right)}{dt} = ml\hat{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{g}$

In generale: $I \neq I_0, \boldsymbol{\omega}$ non $\parallel \hat{\mathbf{n}}_3$

Se $\left|\boldsymbol{\tau} dt\right| = \left|ml\hat{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{g}\right| dt = \left|d\mathbf{L}\right| \ll I_0\boldsymbol{\omega}_{iniz}$

$\rightarrow \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \simeq \dfrac{ml}{I_0}\hat{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{g} = mlg\sin\theta\hat{\mathbf{n}}_2$

$\hat{\mathbf{n}}_2$ versore orizzontale $\perp \hat{\mathbf{n}}_3, \mathbf{g}$

$\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \simeq \dfrac{ml}{\omega I_0}\omega\hat{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{g} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}\dfrac{ml}{\omega I_0}$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\simeq\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{g}\frac{ml}{\omega I_0}\right)=0$$

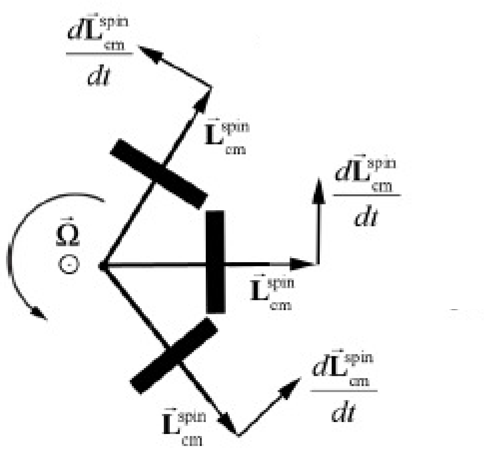
$$\rightarrow 0=\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\frac{d\left(\omega^2\right)}{dt}\rightarrow\omega^2=\text{cost}$$

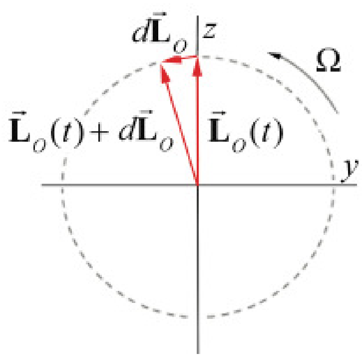
$\rightarrow \boldsymbol{\omega}$ ha modulo costante

$\rightarrow$ direzione di $\boldsymbol{\omega}$ ruota intorno ad asse verticale

$\rightarrow$ Precessione di $\boldsymbol{\omega}$

Vel. angolare della precessione:





$$\Delta L=L\Delta\theta=L\Omega\Delta t$$

$$\rightarrow\Omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\Delta L}{L\Delta t}\rightarrow\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}=\frac{\tau}{L}=\frac{mgl}{I\omega}$$