Cenni al moto generale di rotazione di un corpo rigido

Tensore d'inerzia: identificato dalle sue componenti cartesiane

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, I_{ij} = I_{ji}$$

I matrice reale simmetrica $\rightarrow$ Teo. spettrale: I diagonalizzabile

1) Ricerca autovalori

$$\left| I - \lambda 1 \right| = 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ Eq. cubica per $\lambda \rightarrow 3$ soluzioni reali $\lambda_1 \equiv I_1, \lambda_2 \equiv I_2, \lambda_3 \equiv I_3$

$$I \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

2) Ricerca autovettori

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{xx} - I_1 & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I_1 & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

+ Simili per I_2, I_3

$\rightarrow$ 3 autovettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ che si possono normalizzare

$\rightarrow$ Identificati 3 *assi principali d'inerzia*, esistenti per ogni corpo rigido

Mutuamente ortogonali $\rightarrow$ Definizione di una terna solidale con il c. rigido

Espressione di mom. angolare ed en. cinetica in assi principali:

$\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ versori assi principali

$\rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = I_1 \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2 \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2 \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \cdot \left(\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \right)$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_1 \omega_2^2 \right)$$

Se $\boldsymbol{\omega}$ diretta lungo uno degli assi principali $\rightarrow \mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$

Terna solidale con il c. rigido, diretta secondo assi principali: *Body frame*

Terna fissa nel rif. inerziale: *Space frame*

Relazione fra derivata di un vettore nel S-frame e nel B-frame:

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

[Cfr. trasformazione velocita' fra s. inerziale e s. in rotazione:
regola indipendente dal fatto che il vettore sia il vettore posizione]

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\rightarrow \left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_S = \frac{d}{dt}\left(I_1\omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3\right) +$$

$$+\left(\omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3\hat{\mathbf{e}}_3\right)\times\left(I_1\omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3\right)$$

$$= I_1\frac{d\omega_1}{dt}\hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\frac{d\omega_2}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\frac{d\omega_3}{dt}\hat{\mathbf{e}}_3 +$$

$$+\omega_1\omega_2 I_2\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_2}_{\hat{\mathbf{e}}_3} + \omega_1\omega_3 I_3\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_3}_{-\hat{\mathbf{e}}_2} + \omega_2\omega_1 I_1\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2\times\hat{\mathbf{e}}_1}_{-\hat{\mathbf{e}}_3} +$$

$$+\omega_2\omega_3 I_3\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2\times\hat{\mathbf{e}}_3}_{\hat{\mathbf{e}}_1} + \omega_3\omega_1 I_1\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_3\times\hat{\mathbf{e}}_1}_{\hat{\mathbf{e}}_2} + \omega_3\omega_2 I_2\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_3\times\hat{\mathbf{e}}_2}_{-\hat{\mathbf{e}}_1}$$

$\rightarrow$ Eq. di Eulero:

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_S = \left[I_1\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_1$$

$$+\left[I_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$

$$+\left[I_3\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

II eq. cardinale:

$$\tau_x = I_1\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right)$$

$$\tau_y = I_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right)$$

$$\tau_y = I_3\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right)$$

Descrive l'evoluzione temporale del vettore $\boldsymbol{\omega}$ nel B-frame

Esempio: Simmetria assiale, rotazione libera

$$I_1 = I_2 = I_0 \neq I_3$$

$$\boldsymbol{\tau} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_0\right) = 0 \\ I_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} - \omega_1\omega_3\left(I_3 - I_0\right) = 0 \\ I_3 \dfrac{d\omega_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega_3 = \text{cost} = A$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_0 \dfrac{d\omega_1}{dt} + A\omega_2\left(I_3 - I_0\right) = 0 \\ I_0 \dfrac{d\omega_2}{dt} - A\omega_1\left(I_3 - I_0\right) = 0 \end{cases}$$

$$I_0 \frac{d^2\omega_1}{dt^2} + A\frac{d\omega_2}{dt}\left(I_3 - I_0\right) = 0$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = A\omega_1 \frac{I_3 - I_0}{I_0}$$

$$\rightarrow \frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \underbrace{A^2\left(\frac{I_3 - I_0}{I_0}\right)^2}_{\equiv k^2} \omega_1 = 0$$

Eq. dei moti armonici; scegliendo opportunamente l'istante iniziale

$$\rightarrow \omega_1\left(t\right) = C\cos kt$$

$$\rightarrow \omega_2 = -\frac{I_0}{A\left(I_3 - I_0\right)}\frac{d\omega_1}{dt} = C\sin kt \rightarrow \omega_2\left(t\right) = C\sin kt$$

$\rightarrow$ Precessione di $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse z

$$\left.\begin{aligned} A &= \left|\boldsymbol{\omega}\right|\cos\alpha \\ C &= \left|\boldsymbol{\omega}\right|\sin\alpha \end{aligned}\right\} \alpha \text{ angolo (costante) fra } \boldsymbol{\omega} \text{ e asse z}$$

Caso della Terra:
Non esattamente sferica, rigonfiamento equatoriale, simmetria assiale
Ellissoide schiacciato:

$$I_0 = \frac{1}{5}M\left(r^2 + c^2\right), I_3 = \frac{2}{5}Mr^2, c \simeq r$$

$$\frac{I_3 - I_0}{I_0} = \frac{r^2 - c^2}{r^2 + c^2} = \frac{\left(r-c\right)\left(r+c\right)}{r^2 + c^2} \simeq \frac{2r\left(r-c\right)}{2r^2} = \frac{r-c}{r} = 1 - \frac{c}{r} \simeq 0.0033$$

$$\omega_3 = A = 2\pi \ rad\,/\,giorno$$

$$\rightarrow k = \frac{I_3 - I_0}{I_0} A \approx 0.0033 \cdot 2\pi = 0{,}021 \ rad\,/\,giorno$$

$C \sim 0{,}3''$ sperimentale

Attenzione a un possibile equivoco:

La velocita' angolare $\boldsymbol{\omega}$ e' quella del corpo rigido nel rif. inerziale
Cosa significa riferirla al B-frame?
Non dovrebbe essere = 0, visto che il B-frame e' solidale con il corpo?

Il significato *non* e' quello di trasformare la vel. angolare fra diversi riferimenti
E' invece quello di scomporla secondo i versori del B-frame,
che nel S-frame sono mobili
In altre parole, c'e' un solo vettore $\boldsymbol{\omega}$, che ha componenti diverse
secondo versori diversi