Grandezze fisiche: variabili (in senso matematico) con dimensione
Non richiedono una matematica speciale...

Che variabili sono?

Molte sono semplici: variabili *scalari* (←che assumono valori definiti da un singolo numero reale)
Es:

Tempo
Massa
Densita'
Pressione
....

Altre sono piu' complicate: variabili *vettoriali* (←che assumono valori definiti da piu' di un singolo numero reale)

Altre sono *ancora piu' complicate*: per ora non ne parliamo

Perche’ siamo condannati all’uso dei vettori?

Uso dei vettori in fisica relativamente recente: fine ‘800, inizio ‘900

Non strettamente indispensabile su basi di principio, ma *estremamente utile*

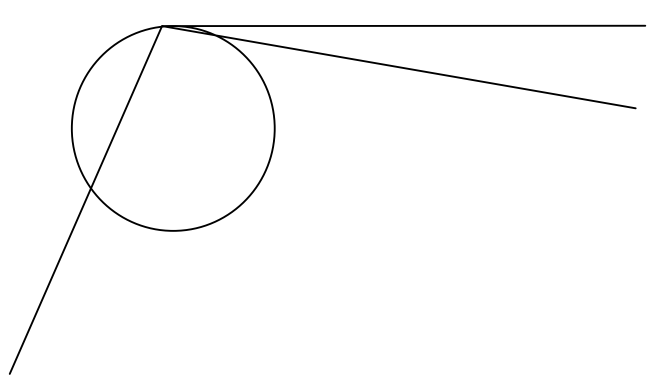
Esempi di variabili vettoriali:

Posizione di un punto nello spazio 3D

Per definirla senza ambiguita’ non basta dare la distanza del punto da un riferimento (p es *d=10 km*), occorrono anche direzione (p es *Nord-Sud*) e verso (p es *Sud*)

Velocita’ di un punto

Come sopra; dire che un punto si sposta alla vel. “costante” di 30 km/h durante un intervallo di tempo di 1 h, nota che sia la sua posizione a t=0, non consente di trarre conclusioni su dove si trovera’ alla fine dell’ora



Per avere un’informazione completa, devo sapere *la direzione* e *il verso* della velocita’, e anche se “costante” si riferisce solo al valore assoluto della velocita’ (p es quello segnato dal tachimetro), o anche a direzione e verso

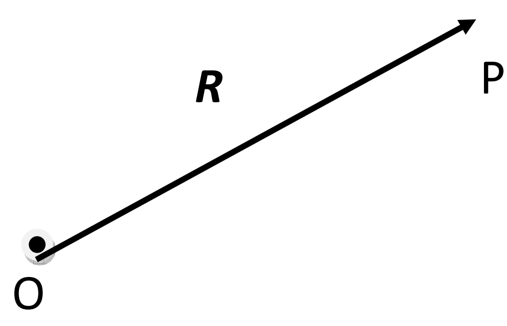
→*Devo conoscere modulo, direzione e verso della velocita’ istante per istante*

Le quantita’ vettoriali si distinguono indicandole in grassetto, o con una frecciolina sopra:

$$\boldsymbol{A}, \quad \vec{A}$$

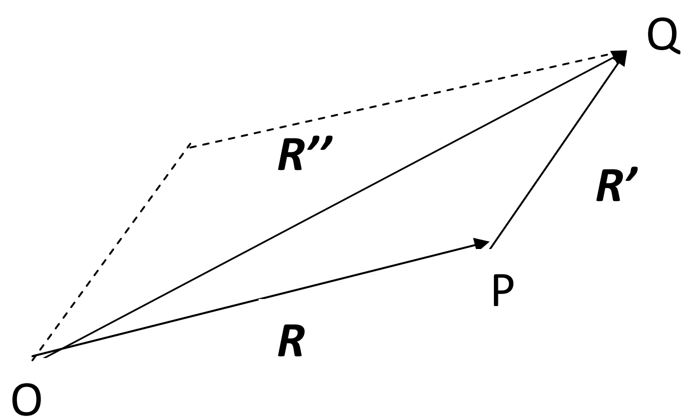
Madre di tutte le grandezze vettoriali:

Vettore posizione ***R***, del punto generico P rispetto a un’origine prefissata O



Identificato graficamente da una *freccia (segmento orientato)*, che indica la posizione di P rispetto a O

Come si combinano i vettori (posizione, ma in realta' tutti)?
Es:
Posizione di P rispetto a O: ***R***
Posizione di Q rispetto a P: ***R'***
Posizione di Q rispetto a O: ***R''***



R'' e' evidentemente il risultato dei due spostamenti successivi ***R*** e ***R'***
→***R''*** viene definito come la *somma* di ***R*** e ***R''***
Ma: somma *vettoriale*

Formalmente/simbolicamente:

$$\boldsymbol{R''} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R'}$$

R'' e' geometricamente la diagonale del parallelogramma formato dalle frecce ***R*** e ***R'***
→*Regola del parallelogramma*

Se invece di ***R*** eseguo uno spostamento ***R'*** con lunghezza doppia, con uguale direzione e verso, il nuovo spostamento sara':

$$\boldsymbol{R}' = 2\boldsymbol{R}$$

In generale, definisco il risultato della moltiplicazione di un vettore per uno scalare: vettore parallelo con lunghezza moltiplicata

$\boldsymbol{R}' = a\boldsymbol{R}$ (a con segno..)

→Restano cosi' definite due operazioni elementari sui vettori:

somma e *moltiplicazione per uno scalare*

Confronto fra vettori (ossia: >, <): non possibile
Tuttavia: definiamo il *modulo* (o la *norma*) di un vettore ***a*** come la *lunghezza della freccia*

$$a = |\boldsymbol{a}| = lunghezza(\boldsymbol{a})$$

I moduli dei vettori sono numeri non negativi→si possono confrontare

La somma di due vettori e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare sono operazioni algebriche, ma seguono un'algebra particolare: diversa da quella dei numeri reali
Es:

- lunghezza della somma # da somma delle lunghezze

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} \cdot (-1) = -\boldsymbol{R}$$

- vettore con orientazione opposta, stessa lunghezza

Tuttavia, le operazioni godono di proprieta' uguali a quelle della somma e moltiplicazione fra numeri reali (←deducibili geometricamente per il vettore posizione, e valide per tutti i vettori)
Somma:
Commutativa, Associativa

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

Moltiplicazione per uno scalare:
Associativa, Distributiva

$$s(r\boldsymbol{a}) = (sr)\boldsymbol{a}$$

$$s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = s\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$$

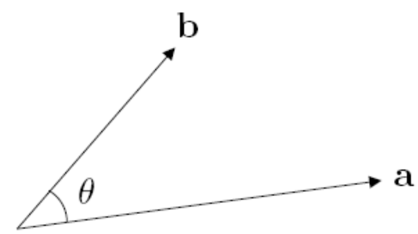
$$(s + r)\boldsymbol{a} = s\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{a}$$

Nuove operazioni: *prodotti fra vettori*

Due tipi di prodotto:
scalare (interno) e *vettoriale (esterno)*

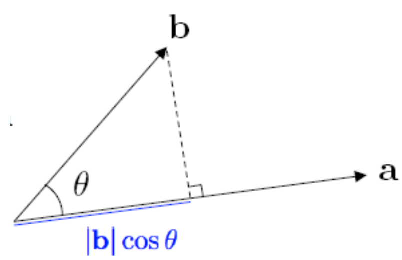
Définition :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Produit scalaire : } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \\ \theta = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in [0,\pi]\end{array}}$$



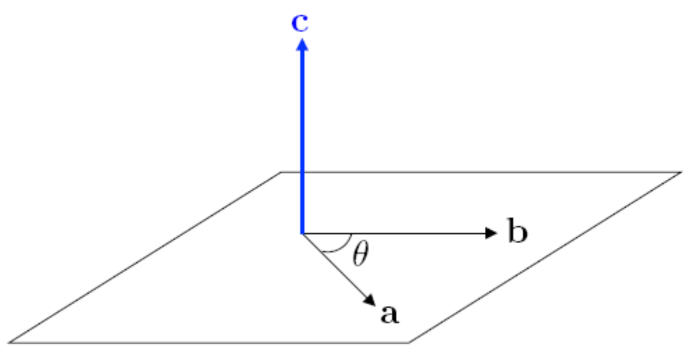
$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a}\perp\mathbf{b}}$$

$$\begin{array}{rl}
(1)\ \text{Commutativité :} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \\
(2)\ \text{Distributivité :} & \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\
(3)\ \text{Linéarité :} & \mathbf{a}\cdot(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\
(4)\ \text{Vecteurs orthogonaux :} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a}\perp\mathbf{b} \\
(5)\ \text{Norme :} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a^2
\end{array}$$

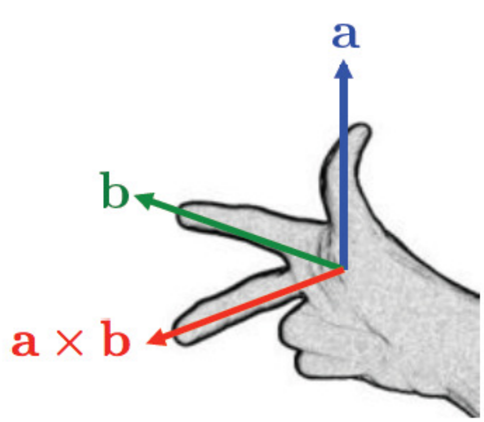


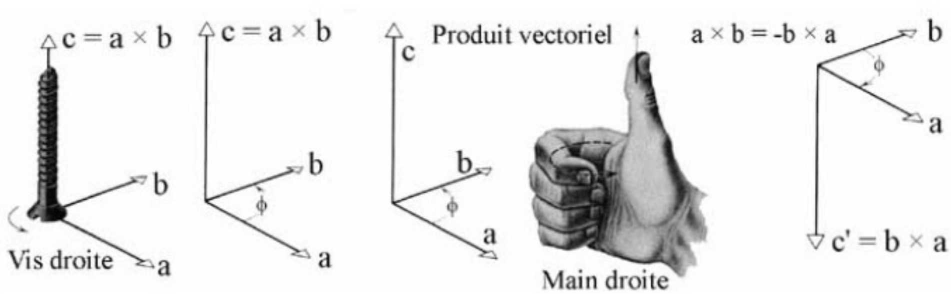
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \begin{cases} - \text{ Direction : } \mathbf{c} \perp (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ - \text{ Sens : } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ forment un trièdre direct} \\ - \text{ Norme : } |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta \;\; (\text{avec : } \theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [0, \pi]) \end{cases}$$

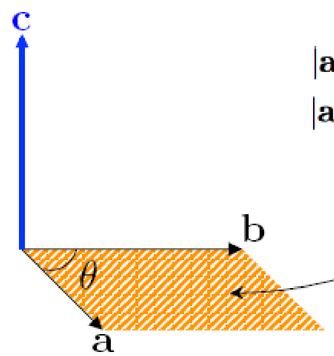
Notation : $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ou : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$



- Trièdre direct :







$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \text{aire du parallélogramme engendré par } \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \iff \mathbf{a}\parallel\mathbf{b}}$$

(1) *Anti*-commutativité : $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

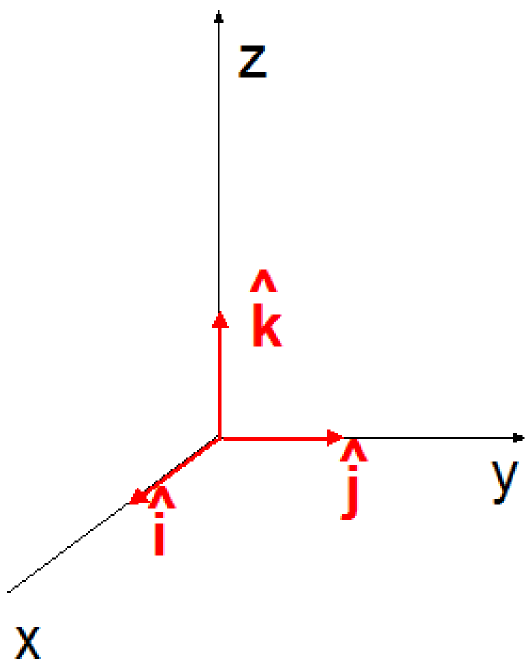
(2) Distributivité : $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$

(3) Linéarité : $\mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

(4) Vecteurs parallèles : $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \iff \mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$

Versori: vettori unimodulari, privi di dimensione fisica

Versori assi coordinati:



Scomposizione vettore posizione ($\leftarrow$ ogni altro vettore):

$$\mathbf{R} = \underbrace{\left(\mathbf{R}\cdot\hat{\mathbf{i}}\right)}_{R_x}\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\left(\mathbf{R}\cdot\hat{\mathbf{j}}\right)}_{R_y}\hat{\mathbf{j}} + \underbrace{\left(\mathbf{R}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)}_{R_z}\hat{\mathbf{k}}$$

Componenti cartesiane: proiezioni del vettore sugli assi

Prodotto scalare: componenti

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\left[\underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}\right)}_{A_x}\hat{\mathbf{i}}+\underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{j}}\right)}_{A_y}\hat{\mathbf{j}}+\underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)}_{A_z}\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[\underbrace{\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{i}}\right)}_{B_x}\hat{\mathbf{i}}+\underbrace{\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{j}}\right)}_{B_y}\hat{\mathbf{j}}+\underbrace{\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)}_{B_z}\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$=A_xB_x\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}}}_{=1}+A_xB_y\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}}}_{=0}+\ldots+A_yB_y\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}}+\ldots+A_zB_z\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}=$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Prodotto vettoriale: componenti

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\left[\underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}\right)}_{A_x}\hat{\mathbf{i}}+\underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{j}}\right)}_{A_y}\hat{\mathbf{j}}+\underbrace{\left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)}_{A_z}\hat{\mathbf{k}}\right]\times\left[\underbrace{\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{i}}\right)}_{B_x}\hat{\mathbf{i}}+\underbrace{\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{j}}\right)}_{B_y}\hat{\mathbf{j}}+\underbrace{\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)}_{B_z}\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$=A_xB_x\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{=0}+A_xB_y\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=\hat{\mathbf{k}}}+A_xB_z\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}}_{=-\hat{\mathbf{j}}}$$

$$+A_yB_x\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{=-\hat{\mathbf{k}}}+A_yB_y\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=0}+A_yB_z\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}}_{=\hat{\mathbf{i}}}$$

$$+A_zB_x\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{\hat{\mathbf{j}}}+A_zB_y\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=-\hat{\mathbf{i}}}+A_zB_z\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}}_{=0}=$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{\mathbf{k}}$$