Forza di gravita': approssimativamente la forza che agisce sui corpi vicino alla superficie della Terra

Forza costante in modulo e direzione
Costante:

Nel tempo (non varia da un istante al successivo)

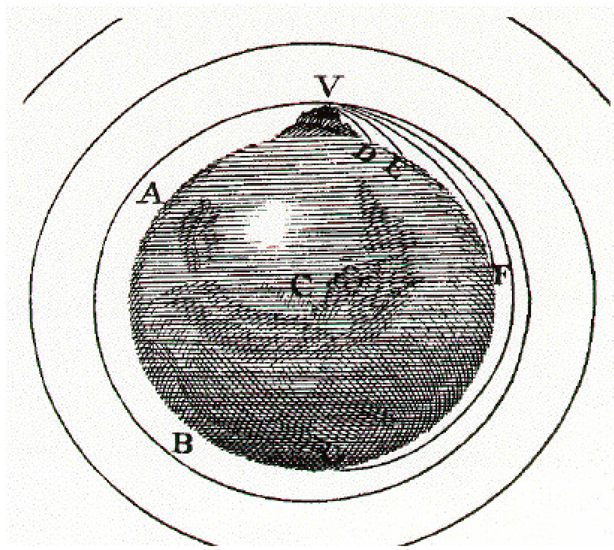
Nello spazio (non varia da un punto all'altro)

Utile come banco di prova per verifica delle leggi di Newton

Forza-modello o forza empirica?

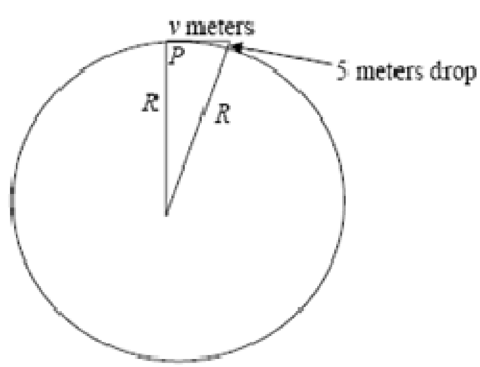
Nessuna delle due: caso limite di una forza fondamentale

Cosa accade se un cannone molto potente spara da una montagna molto alta?




La forza peso non e' piu' costante, varia in direzione a causa della curvatura della Terra

Se la caduta della palla di cannone in un intervallo di tempo $\Delta$t e' uguale allo spostamento verso il basso della superficie terrestre dovuto alla sfericita' della Terra, il proiettile restera' alla stessa altezza da cui e' stato sparato…




v

$$\begin{cases} \Delta y = \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2 \\ \sqrt{\left(R+\Delta y\right)^2 - R^2} = v\Delta t \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(R+\Delta y\right)^2 - R^2 = \left(v\Delta t\right)^2$$

$$\rightarrow 2R\Delta y \approx v^2 \left(\Delta t\right)^2 = v^2 \frac{2\Delta y}{g}$$

$$R = 6400 \quad km$$

$$g = 9.81 \quad ms^{-2}$$

$$\rightarrow v \approx \sqrt{gR} \approx \sqrt{9.81 \cdot 6.4\ 10^6} \approx 8\ 10^3 \quad \text{ms}^{-1}$$

Quindi: Un proiettile sparato ad $8\ km/s$ restera' in orbita

NB Press'a poco la velocita' dei satelliti in orbita bassa....

E se la forza di gravita' si estendesse anche alla distanza a cui si trova la Luna? (Leggenda della mela...)

Possibile che la Luna "cada" verso la Terra nel suo moto proprio come il proiettile?

$$\left.\begin{array}{l} v_{Luna} = 1\ kms^{-1} \approx \dfrac{1}{8} v \\ R_{Luna} = 384000\ km \approx 60\ R \end{array}\right\} \text{Ben noti al tempo d iNewton}$$

[Ma: $R_{Luna}$ del tempo inaccurato; rimisurato su un periodo di molti anni, concausa del ritardo nella pubblicazione dei *Principia..*]

Accelerazione centripeta

$$\rightarrow a_{Luna} = \frac{v_{Luna}^2}{R_{Luna}} \approx \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{60} a_{proiettile} \sim \frac{1}{60 \cdot 60} a_{proiettile} = \frac{1}{3600} a_{proiettile}$$

$$\rightarrow \frac{a_{Luna}}{a_{proiettile}} \approx \left(\frac{R}{R_{Luna}}\right)^2$$

$$\rightarrow a \propto \frac{1}{r^2}$$

In base alla II legge di Newton, un’accelerazione richiede una forza: i corpi, inclusa la Luna, quindi sentono una forza attrattiva da parte della Terra che varia come $1/r^2$ , essendo $r$ la loro distanza dal centro della Terra

Sappiamo anche qualcosa in piu’: se la forza cercata ha le stesse proprieta’ della forza di gravita’ (accelerazione uguale per tutte le masse), la forza sentita da ogni corpo deve essere proporzionale alla sua massa.

Ma in base alla III legge di Newton, la forza sentita dal corpo a causa della Terra e’ uguale e opposta alla forza sentita dalla Terra a causa del corpo: quindi entrambe devono essere proporzionali al prodotto delle due masse.

Forza di gravitazione fra Terra e Luna :

$F = G\dfrac{mM}{r^2}$ $G$ costante universale di proporzionalita'

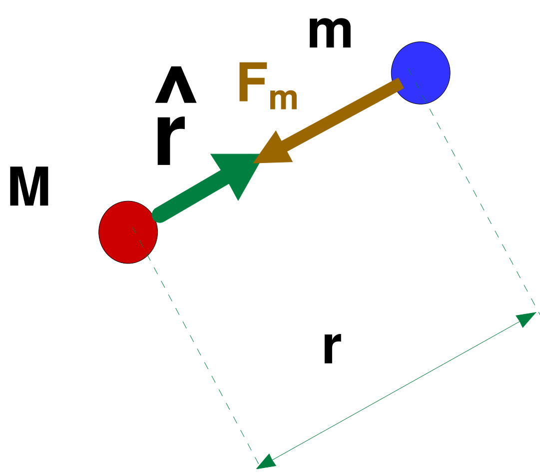
Caratteristiche di universalita’: uguale per ogni coppia di masse, es Terra e Sole

Le forze sono vettori

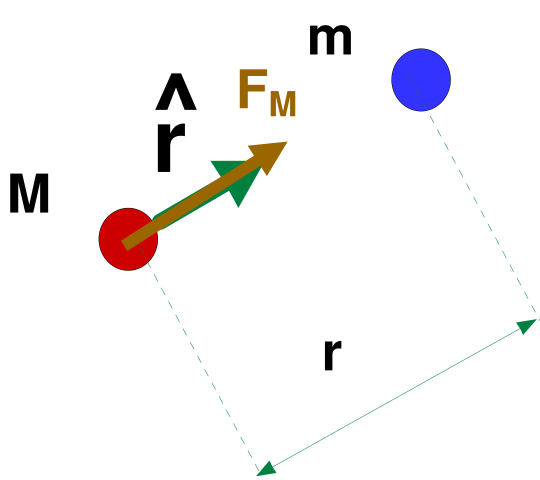
Legge di gravitazione scritta in forma vettoriale

$$\mathbf{F}_m = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$\mathbf{F}_m$: Forza gravitazionale che si esercita su $m$ a causa di $M$




$\hat{\mathbf{r}}$ versore direzione $M \rightarrow m$




Reciprocamente:

$$\mathbf{F}_M = -G\frac{mM}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}}) = G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$\mathbf{F}_M$: Forza gravitazionale che si esercita su $M$ a causa di $m$

Costante di Newton: una delle costanti fondamentali della natura

Dimensioni:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \to G = \frac{Fr^2}{mM}$$

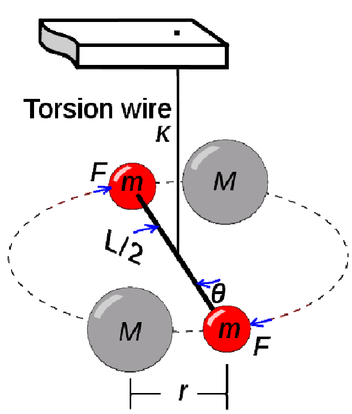
$$[G] = [F]\left[L^2\right]\left[M^{-2}\right] = [M][L]\left[T^{-2}\right]\left[L^2\right]\left[M^{-2}\right] = \left[L^3\right]\left[M^{-1}\right]\left[T^{-2}\right]$$

Valore:

$$6.67\ 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2},\ \ Nm^2kg^{-2},\ \ Jmkg^{-2}$$

Piccola: Forza di gravitazione importante solo per masse grandi, quindi nei sistemi astronomici; trascurabile a livello nucleare, atomico, molecolare

Impossibile da misurare con osservazioni astronomiche: misurata per la prima volta da Cavendish alla fine del '700 con la bilancia di torsione




$$k\theta = LF$$

$$F = G\frac{mM}{r^2} \to k\theta = LG\frac{mM}{r^2}$$

$$\to G = \frac{k\theta r^2}{LmM}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}, I = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{2} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{2k}}$$

$$\to k = \frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}$$

$$\to G = \frac{k\theta r^2}{LmM} = \frac{\theta r^2}{LmM}\frac{2\pi^2 mL^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 r^2 L\theta}{MT^2}$$

Punto di vista newtoniano:

Ognuna delle due masse, $M$ ed $m$, esercita una forza a distanza sull'altra

Punto di vista moderno:

La massa $M$ da' origine ad un campo gravitazionale in ogni punto dello spazio

Il campo gravitazionale originato da $M$ esercita un'azione (forza) sulla massa $m$ quando essa e' immersa nel campo stesso (e viceversa)

Punti di vista sostanzialmente equivalenti in condizioni statiche

Molto diversi in condizioni non statiche (peraltro inesistenti nella gravitazione di Newton)

La massa $M$ da' origine ad un campo gravitazionale in ogni punto dello spazio

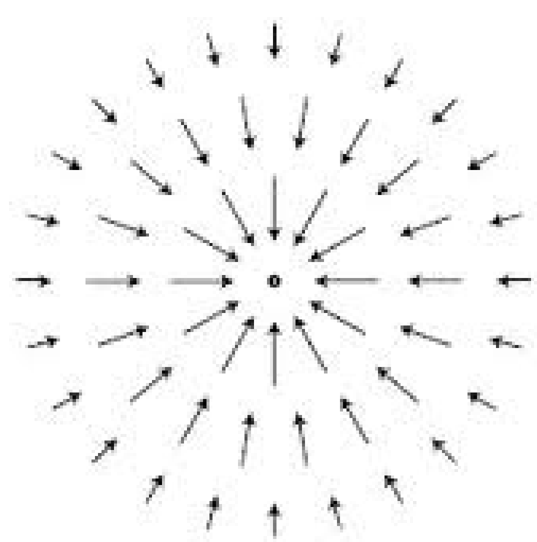
In ogni punto dello spazio dobbiamo immaginare sia definito un vettore $\boldsymbol{g}$ (in generale variabile da punto a punto, ma costante nel tempo), tale che una massa di prova $m$ e' soggetta a una forza gravitazionale

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

P es, il campo generato da una massa $M$ puntiforme:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_m}{m} = \left( -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \right)\frac{1}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Rappresentazione geometrica, linee di forza:



Il campo gravitazionale e’ una grandezza fisica *lineare*:

L’effetto di una somma di cause e’ la somma (lineare) degli effetti

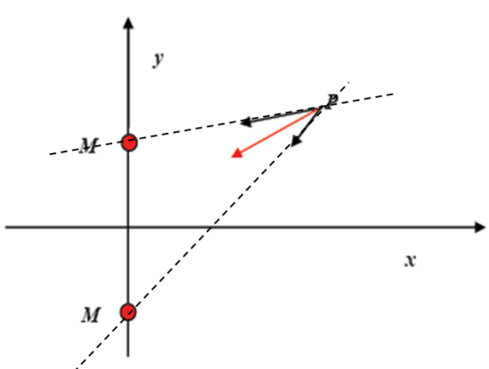
→Il campo gravitazionale di un insieme di masse e’ la somma dei singoli contributi individuali

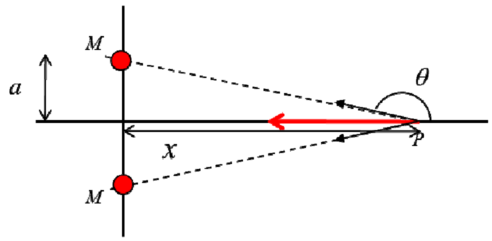
Il campo gravitazionale e’ una grandezza fisica *vettoriale*:

La sua matematica e’ la matematica dei vettori

→I singoli contributi individuali si sommano con la regola del parallelogramma

Esempio: 2 masse $m$ uguali a distanza $2°$






2 masse $m$ uguali a distanza $2a$: campo sull' asse

Risultante: sull' asse del segmento

$Infatti$: Componenti $y$ dei 2 contributi: uguali e opposte

$\rightarrow Totale_y = 0$

Componenti $x$ dei 2 contributi: uguali

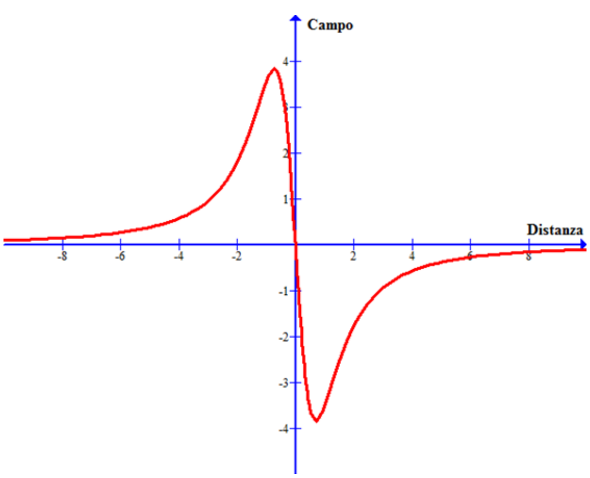
$\rightarrow Totale_x = 2 \cdot g_x$

$g_x = g \cos\theta$

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{x^2+a^2}, \quad \cos\theta = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\rightarrow g_{xTOT} = -2G\frac{M}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = -G\frac{2Mx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

Segno - : campo diretto *verso* l'origine




$$g_x = -G\frac{Mx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$g_x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -G\frac{Mx}{x^3} = -G\frac{M}{x^2}$$ Limite Newtoniano

$$g_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -G\frac{Mx}{a^3} = -\frac{GM}{a^3}x$$

Quindi, nel limite di scostamenti da $O$ piccoli rispetto ad $a$, la forza su una massa di prova e' come quella elastica