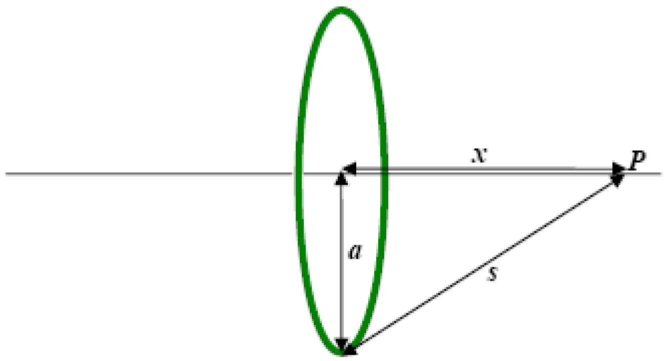
Anello di massa M: campo sull'asse



$$g_x = -G\frac{Mx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}},$$ come per coppia di punti

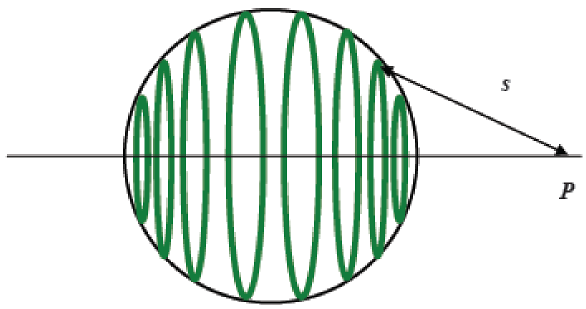
Infatti:

L'anello si puo' pensare scomposto in tante coppie di masse "puntiformi" m,m in posizioni diametralmente opposte su una circonferenza di raggio a. Ogni coppia da' il contributo visto prima, che si somma a quello identico di tutte le altre coppie.

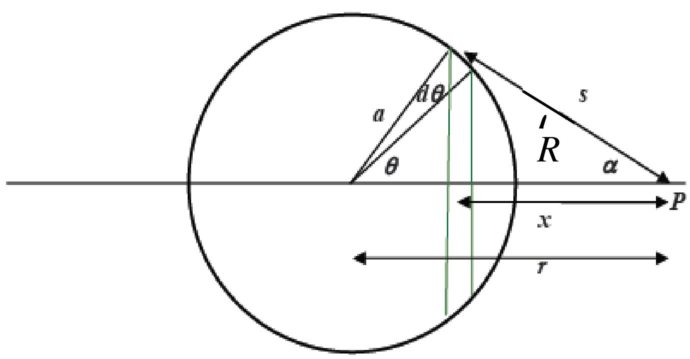
Guscio sferico di massa M

** Campo esterno **
NB Ogni punto esterno: su un asse che passa per il centro…

Guscio scomposto in anelli di larghezza infinitesima.
Ogni anello: contributo visto prima
Ogni anello: ad una distanza diversa dal punto P



Geometria:



Campo dell' anello sull' asse:

$$dg_x = -G\frac{xdm}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = -G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow g_x = -\int_0^{\pi} G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = -\int_0^{\pi} G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{s^3}$$

Ora:

$$s^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \rightarrow \cancel{2}sds = \cancel{2}ar\sin\theta d\theta; \begin{cases} s^2(\theta=0) = (r-a)^2 \\ s^2(\theta=\pi) = (r+a)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow g_x = -\int_0^{\pi} G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{s^3} = -\int_{r-a}^{r+a} G\frac{x\sigma 2\pi a^2}{s^3}\frac{s}{ar}ds$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{x}{s^2}ds$$

$$g_x = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{x}{s^2}ds$$

$$\begin{cases} x = s\cos\alpha \\ a^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\alpha \end{cases} \rightarrow x = \frac{s^2+r^2-a^2}{2r}$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{s^2+r^2-a^2}{2rs^2}ds = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{2ar^2}\int_{r-a}^{r+a}\frac{s^2+r^2-a^2}{s^2}ds$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\int_{r-a}^{r+a}\left(1+\frac{r^2-a^2}{s^2}\right)ds = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\left[s+\left(-\frac{1}{s}\right)\left(r^2-a^2\right)\right]_{r-a}^{r+a}$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\left[(r+a)-(r-a)-\left(\frac{1}{r+a}-\frac{1}{r-a}\right)\left(r^2-a^2\right)\right]$$

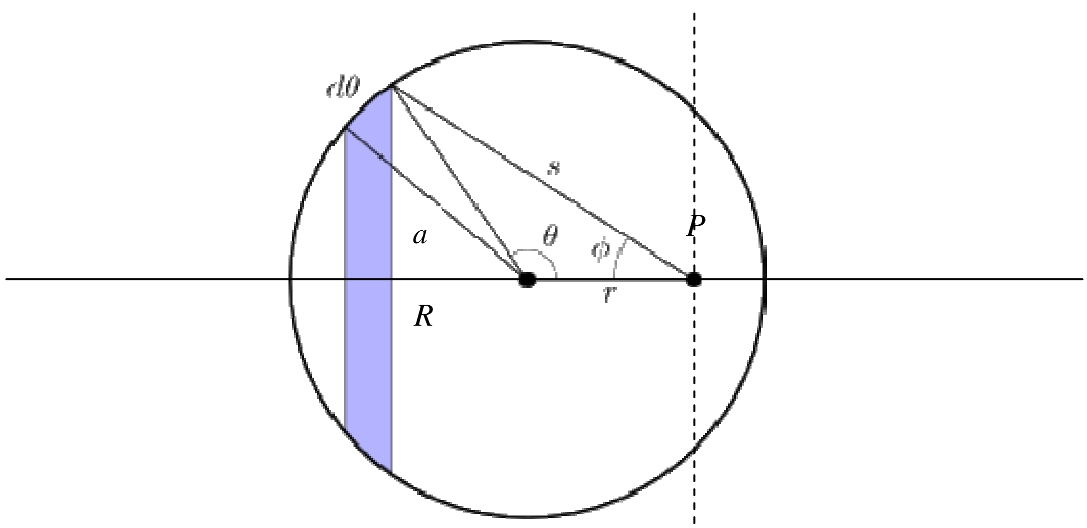
$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\left[2a-\left(\frac{-2a}{r^2-a^2}\right)\left(r^2-a^2\right)\right] = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}4a = -\frac{G\sigma 4\pi a^2}{r^2}$$

$M = \sigma 4\pi a^2$ Massa totale = densita' superficiale $\times$ superficie

$\rightarrow g_x = -\frac{GM}{r^2} \equiv |\mathbf{g}|$ unica componente = radiale

** Campo interno **

Geometria:



Contributi di segno opposto dalle due calotte a dx e sx di P

$$\rightarrow g_x = -\int_{a-r}^{0} \cdots + \int_{a+r}^{0} \cdots = \int_{a+r}^{a-r} \cdots$$

(Regole di integrazione..)

$$g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \int_{a+r}^{a-r} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{s^2}\right) ds = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[s + \left(-\frac{1}{s}\right)\left(r^2 - a^2\right) \right]_{a+r}^{a-r}$$

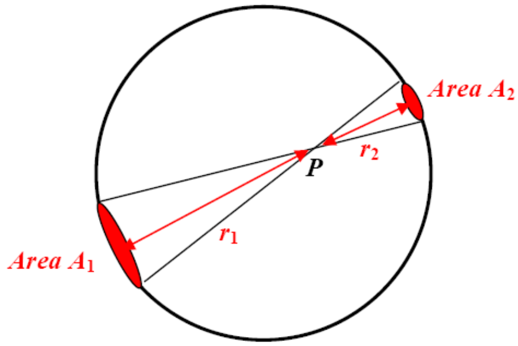
$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[-2r + \left(r^2 - a^2\right)\left(-\frac{1}{a-r} + \frac{1}{a+r}\right) \right] =$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[-2r + \left(r^2 - a^2\right)\left(\frac{a-r}{a^2 - r^2} - \frac{r+a}{a^2 - r^2}\right) \right]$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[-2r + \left(r^2 - a^2\right)\frac{-2r}{a^2 - r^2} \right]$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[-2r + \left(r^2 - a^2\right)\frac{2r}{r^2 - a^2} \right] = 0$$

Altro modo per calcolare il campo interno:



Campo in P

Contributo da elemento di massa $m_1 \propto \frac{m_1}{r_1^2} \propto \frac{\sigma A_1}{r_1^2}$

Contributo da elemento di massa $m_2 \propto \frac{m_2}{r_2^2} \propto \frac{\sigma A_2}{r_2^2}$

$\begin{cases} A_i = r_i^2 \Delta\Omega_i \\ \Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Contributi uguali e opposti $\rightarrow$ Campo totale $= 0$

Sfera solida
Soluzione semplice:
Costruita con infiniti gusci sferici di raggio crescente
Quindi:
  Campo esterno = quello di un punto di massa M nel centro della sfera (Newtoniano)
  Campo interno, a raggio r:
  Contributi dai gusci di raggio > r: 0
  Contributi dei gusci di raggio < r : Newtoniani

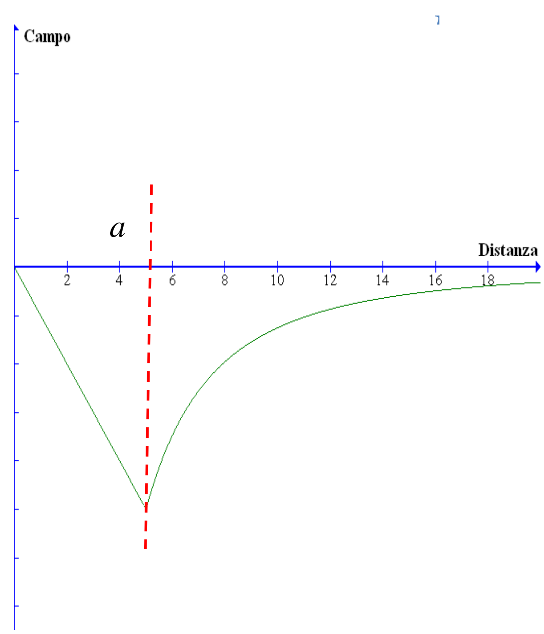
$\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ Densita' volumetrica di massa

Massa contenuta entro il volume di raggio r

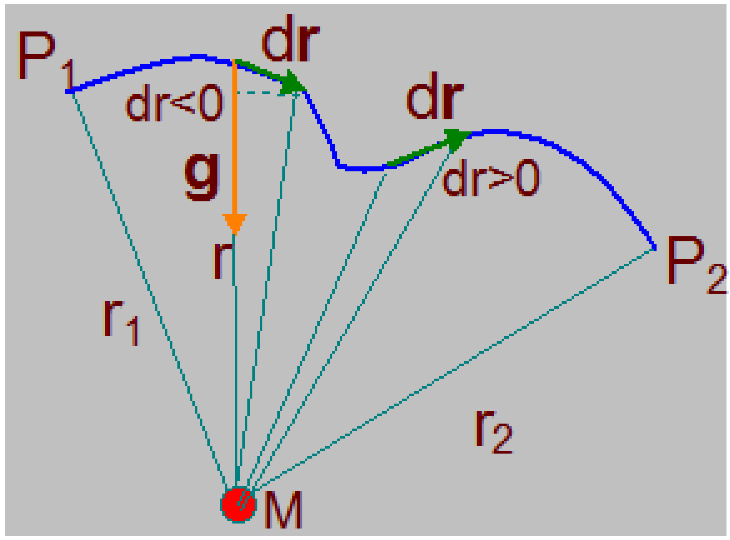
$$\rightarrow m(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}$$

$$\rightarrow g(r) = -G\frac{m(r)}{r^2} = -G\frac{\frac{Mr^3}{R^3}}{r^2} = -\frac{GM}{R^3}r$$

Campo interno ed esterno



Punto materiale di massa *m*, spostato di $d\mathbf{r}$ nel campo (newtoniano) di una massa puntiforme M: lavoro compiuto dalla forza di gravitazione



$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{g}(r)\cdot d\mathbf{r} = -mg(r)\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = -mg(r)dr$ Campo centrale

Segno $-$: $dr > 0 \rightarrow$ lavoro $-vo$

Spostamento finito lungo un percorso qualunque C:

$$W = \int_C dW = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b m\mathbf{g}(r)\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b -mG\frac{M}{r^2}dr$$

$$\rightarrow W = -mMG\left(-\frac{1}{r}\right)_a^b = mMG\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

W indipendente dal percorso, dipendente solo da posizioni radiali iniziale e finale

$\rightarrow \exists$ en. potenziale gravitazionale:

$U = U(x,y,z)$

$W = -\Delta U$

$$\rightarrow mMG\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = -\Delta U \rightarrow \Delta U = mMG\left(\left(-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{a}\right)\right) = mMG\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

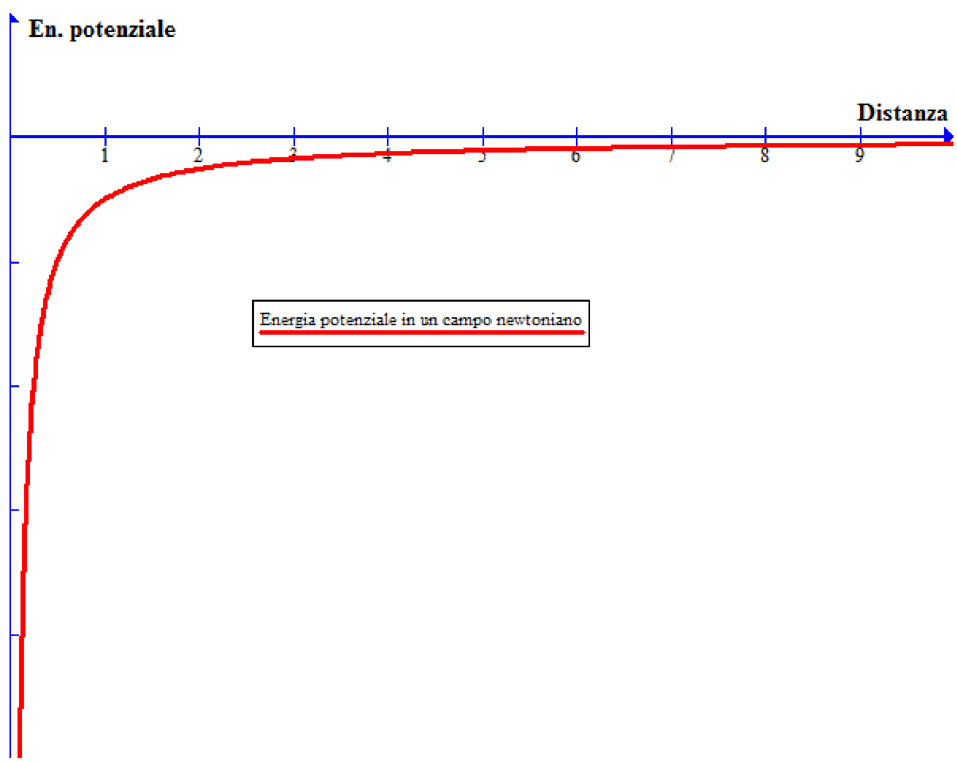
$U(r) = -\frac{GmM}{r} + C, C$ costante arbitraria

Convenzione:

Si considera un percorso arbitrario,
con inizio a distanza $r_0 \to \infty$ e termine a distanza r

$$\to U(r) = \lim_{r_0 \to \infty} \left[GmM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{GmM}{r}$$

equivalente a porre $C = 0$



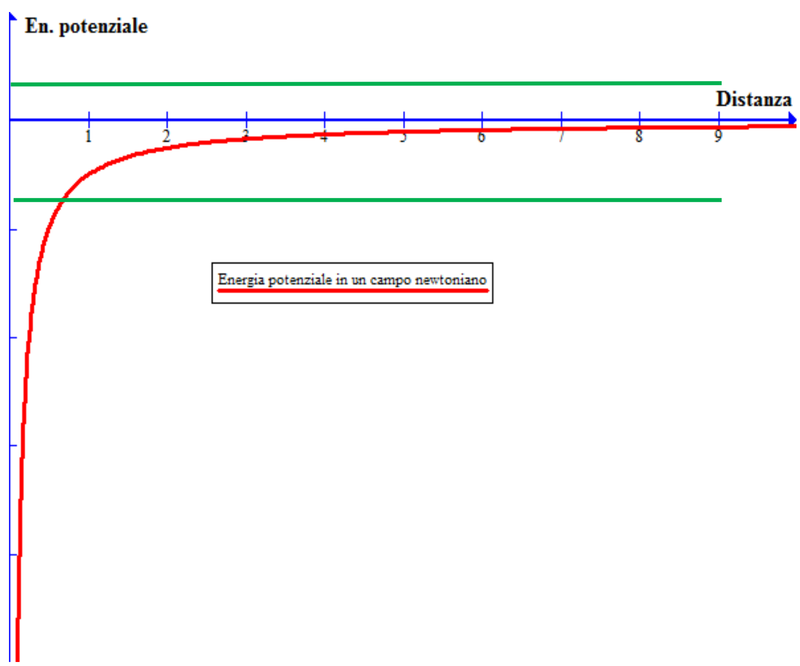
En. meccanica totale per una massa m :Cinetica $+$ Potenziale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

$E =$ costante

$E < 0$: Stato legato

$E > 0$: Stato libero



Bilancio delle forze per un corpo di massa m in orbita circolare attorno ad un corpo pesante di massa M:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$ Forza gravitazionale = Forza centripeta

$$\rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{GM}{v^2} \\ v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} \end{cases}$$, indipendente da m

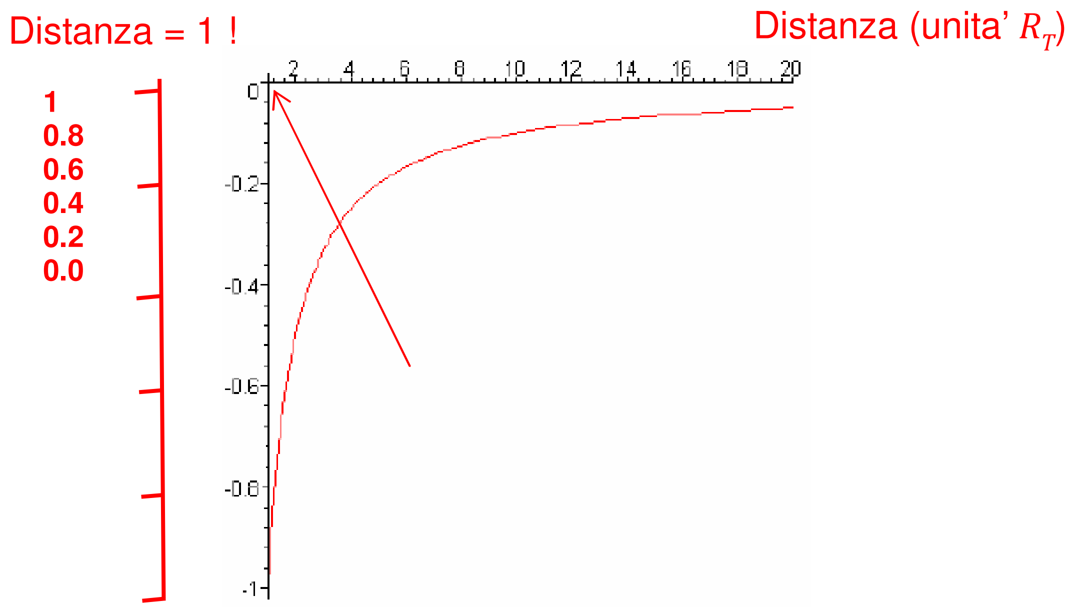
En. meccanica totale:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}U(r)$$

$$\rightarrow \text{En. cinetica} = -\frac{1}{2}\text{En. potenziale}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = -\frac{1}{2}U(r) + U(r) = \frac{1}{2}U(r)$$ En. totale

En. potenziale gravitazionale vicino alla superficie della Terra:



$$r = R_T + h \rightarrow U(r) = U\left(R_T + h\right) = -\frac{GmM}{R_T + h}$$

$$\rightarrow U\left(R_T + h\right) = -\frac{GmM}{R_T\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)} = -\frac{GmM}{R_T}\frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}}$$

$$U(r) \underset{h \ll R_T}{\approx} -\frac{GmM}{R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right) = \underbrace{-\frac{GmM}{R_T^2}}_{A} + \underbrace{\frac{GM}{R_T^2}}_{g} mh = mgh + A$$

Ridefinizione della costante arbitraria

$\rightarrow$ En. potenziale della forza di gravita'!

Campo gravitazionale alla superficie della Terra

$g = G\dfrac{M_T}{R_T^2}, M_T, R_T$ massa e raggio della Terra

$g(r) = G\dfrac{M}{r^2}, r$ distanza dal centro della Terra

Se h e' l'altezza sulla superficie terrestre:

$$r = h + R_T \rightarrow g(r) = G\frac{M}{(h+R_T)^2} \underset{h \ll R_T}{\approx} G\frac{M}{R_T{}^2}$$

$$g = 9.81\ ms^{-2}$$

$$R_T = 6400\ km = 6.4\ 10^6 m$$

$$GM = gR_T^2 = 9.81\ 40\ 10^{12} m^3 s^{-2} \sim 4\ 10^{14} m^3 s^{-2}$$

Misura di g: misura del prodotto GM_T, non le singole quantita' :

$$GM_T \sim 4\ 10^{14} m^3 s^{-2}$$

Dopo Cavendish:

$$G = 6.67\ 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$\rightarrow M_T \sim \frac{4\ 10^{14}}{6.67\ 10^{-11}} \sim 6\ 10^{24} kg$$

Minima velocita' iniziale necessaria a un corpo per vincere l'attrazione gravitazionale terrestre ed allontanarsi indefinitivamente dalla Terra?

Bilancio energetico:

$$\frac{1}{2}mv_{in}^2 + U_{in} = 0$$

v_{in} velocita' iniziale minima necessaria ad uscire dalla "buca"

$$U_{in} = U\left(R_T\right) = -G\frac{mM}{R_T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{in}^2 - G\frac{mM}{R_T} = 0$$

$$\rightarrow v_{in} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67\ 10^{-11} \cdot 6\ 10^{24}}{6.4\ 10^6}} \sim 11\ \ kms^{-1},$$ indipendente da m

Velocita' di fuga (da Wikipedia)

Location	with respect to	V_e [1]	with respect to	V_e
Sun,	the Sun's gravity:	617.5 km/s		
Mercury,	Mercury's gravity:	4.3 km/s	the Sun's gravity:	67.7 km/s
Venus,	Venus' gravity:	10.3 km/s	the Sun's gravity:	49.5 km/s
Earth,	the Earth's gravity:	11.2 km/s	the Sun's gravity:	42.1 km/s
Moon,	the Moon's gravity:	2.4 km/s	the Earth's gravity:	1.4 km/s
Mars,	Mars' gravity:	5.0 km/s	the Sun's gravity:	34.1 km/s
Jupiter,	Jupiter's gravity:	59.5 km/s	the Sun's gravity:	18.5 km/s
Saturn,	Saturn's gravity:	35.6 km/s	the Sun's gravity:	13.6 km/s
Uranus,	Uranus' gravity:	21.2 km/s	the Sun's gravity:	9.6 km/s
Neptune,	Neptune's gravity:	23.6 km/s	the Sun's gravity:	7.7 km/s
Solar System,	the Milky Way's gravity:	≥ 525 km/s		