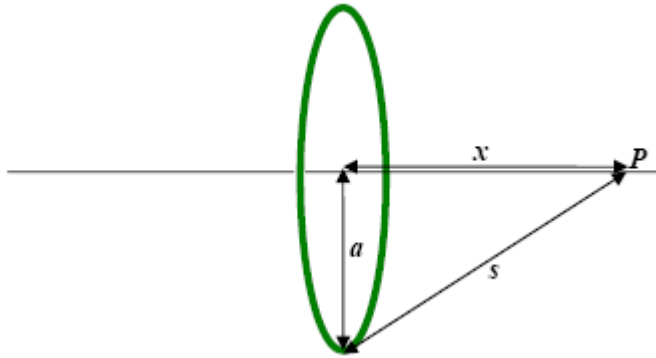


Anello di massa M : campo sull'asse



$$g_x = -G \frac{Mx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \text{ come per coppia di punti}$$

Infatti:

L'anello si può pensare scomposto in tante coppie di masse "puntiformi" m, m in posizioni diametralmente opposte su una circonferenza di raggio a . Ogni coppia dà il contributo visto prima, che si somma a quello identico di tutte le altre coppie.

Guscio sferico di massa M

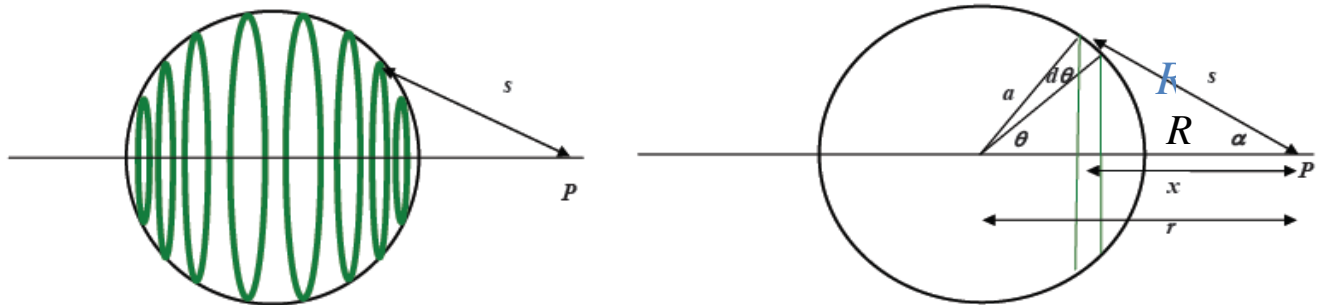
Campo esterno

NB Ogni punto esterno: su un asse che passa per il centro...

Guscio scomposto in anelli di larghezza infinitesima.

Ogni anello: contributo visto prima

Ogni anello: ad una distanza diversa dal punto P



Raggio dell' anello espresso in termini dell' angolo θ :

$$R = a \sin \theta$$

Larghezza dell' anello:

$$dw = a d\theta$$

→ Area dell' anello:

$$dA = 2\pi R dw = 2\pi a \sin \theta a d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

σ = densita' superficiale di massa del guscio

→ Massa dell'anello:

$$dm = \sigma dA = \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

Campo dell' anello sull' asse:

$$dg_x = -G \frac{x dm}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = -G \frac{x \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow g_x = -\int_0^\pi G \frac{x \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = -\int_0^\pi G \frac{x \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{s^3}$$

Ora:

$$s^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta \rightarrow \int s ds = \int ar \sin \theta d\theta; \begin{cases} s^2 (\theta = 0) = (r - a)^2 \\ s^2 (\theta = \pi) = (r + a)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow g_x = -\int_0^\pi G \frac{x \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{s^3} = -\int_{r-a}^{r+a} G \frac{x \sigma 2\pi a^2}{s^3} \frac{s}{ar} ds$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G \sigma 2\pi a^2}{ar} \int_{r-a}^{r+a} \frac{x}{s^2} ds$$

$$g_x = -\frac{G \sigma 2\pi a^2}{ar} \int_{r-a}^{r+a} \frac{x}{s^2} ds$$

$$\begin{cases} x = s \cos \alpha \\ a^2 = s^2 + r^2 - 2sr \cos \alpha \end{cases} \rightarrow x = \frac{s^2 + r^2 - a^2}{2r}$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G \sigma 2\pi a^2}{ar} \int_{r-a}^{r+a} \frac{s^2 + r^2 - a^2}{2rs^2} ds = -\frac{G \sigma 2\pi a^2}{2ar^2} \int_{r-a}^{r+a} \frac{s^2 + r^2 - a^2}{s^2} ds$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \int_{r-a}^{r+a} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{s^2}\right) ds = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[s + \left(-\frac{1}{s}\right)(r^2 - a^2) \right]_{r-a}^{r+a}$$

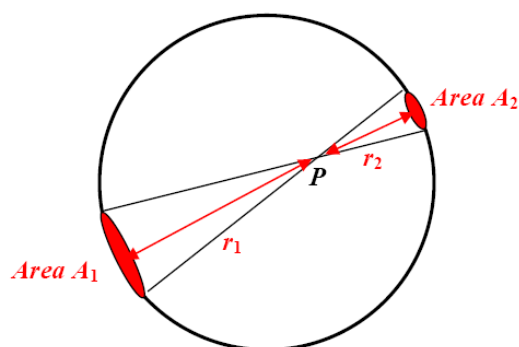
$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[(r+a) - (r-a) - \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r-a}\right)(r^2 - a^2) \right]$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} \left[2a - \left(\frac{-2a}{r^2 - a^2}\right)(r^2 - a^2) \right] = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2} 4a = -\frac{G\sigma 4\pi a^2}{r^2}$$

$M = \sigma 4\pi a^2$ Massa totale = densita' superficiale $\times$ superficie

$$\rightarrow g_x = -\frac{GM}{r^2} \equiv |\mathbf{g}| \quad \text{unica componente} = \text{radiale}$$

Campo interno:



Campo in P

Contributo da elemento di massa $m_1 \propto \frac{m_1}{r_1^2} \propto \frac{\sigma A_1}{r_1^2}$

Contributo da elemento di massa $m_2 \propto \frac{m_2}{r_2^2} \propto \frac{\sigma A_2}{r_2^2}$

$$\begin{cases} A_i = r_i^2 \Delta\Omega_i \\ \Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2 \end{cases} \rightarrow \text{Contributi uguali e opposti}$$

$\rightarrow$ Campo totale = 0 !

Sfera solida

Soluzione semplice:

Costruita con infiniti gusci sferici di raggio crescente

Quindi:

Campo esterno:

= quello di un punto di massa M nel centro della sfera (Newtoniano)

Campo interno:

Per campo a raggio r :

Contributi dai gusci di raggio $> r$: 0

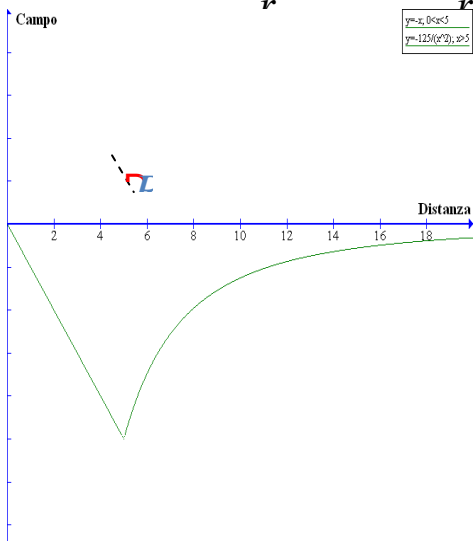
Contributi dei gusci di raggio $< r$: Newtoniani

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{Densità volumetrica di massa}$$

Massa contenuta entro il volume di raggio r

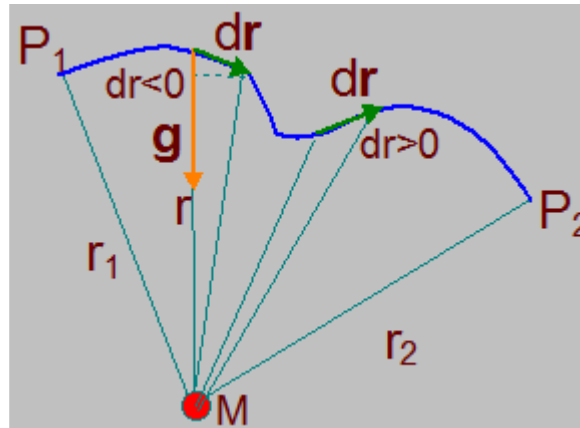
$$\rightarrow m(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}$$

$$\rightarrow g(r) = -G \frac{m(r)}{r^2} = -G \frac{\frac{Mr^3}{R^3}}{r^2} = -\frac{GM}{R^3} r$$



Campo interno ed esterno

Punto materiale di massa m , spostato di $d\mathbf{r}$ nel campo (newtoniano) di una massa puntiforme M : lavoro compiuto dalla forza di gravitazione



$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{g}(r) \cdot d\mathbf{r} = -mg(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -mg(r)dr \quad \text{Campo centrale}$$

Segno $-$: $dr > 0 \rightarrow$ lavoro $-vo$

Spostamento finito lungo un percorso qualunque C :

$$W = \int_C dW = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b m\mathbf{g}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b -mG \frac{M}{r^2} dr$$

$$\rightarrow W = -mMG \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b = mMG \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

W indipendente dal percorso, dipendente solo da posizioni radiali iniziale e finale

$\rightarrow \exists$ en. potenziale gravitazionale:

$$U = U(x, y, z)$$

$$W = -\Delta U$$

$$\rightarrow mMG \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = -\Delta U \rightarrow \Delta U = mMG \left(\left(-\frac{1}{b} \right) - \left(-\frac{1}{a} \right) \right) = mMG \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

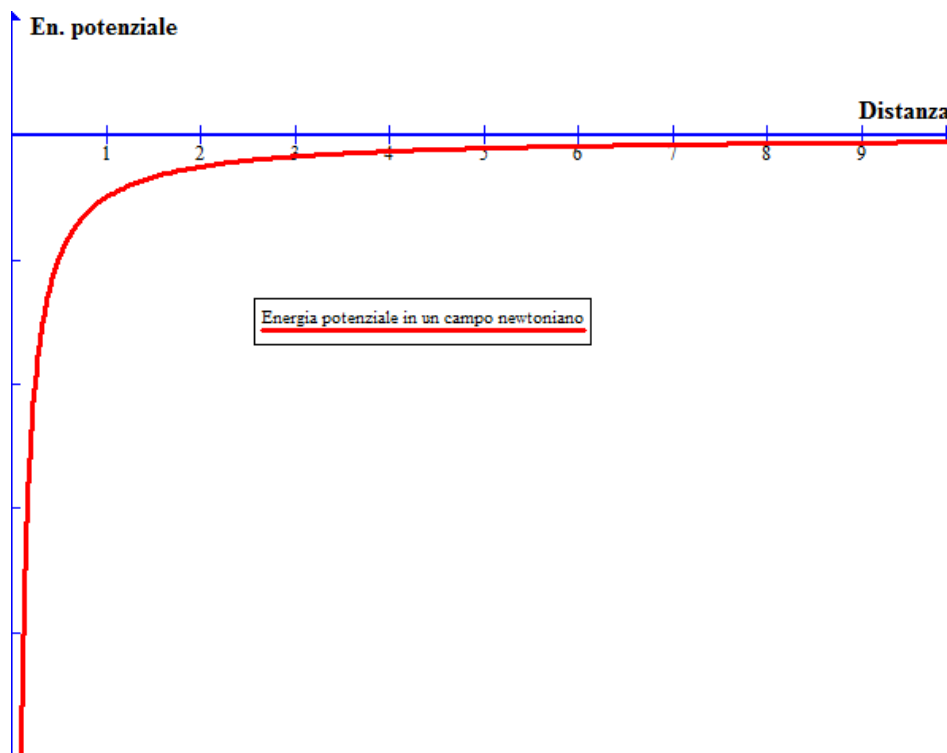
$$U(r) = -\frac{GmM}{r} + C, C \text{ costante arbitraria}$$

Convenzione:

Si considera un percorso arbitrario,
con inizio a distanza $r_0 \rightarrow \infty$ e termine a distanza r

$$\rightarrow U(r) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[GmM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{GmM}{r}$$

equivalente a porre $C = 0$



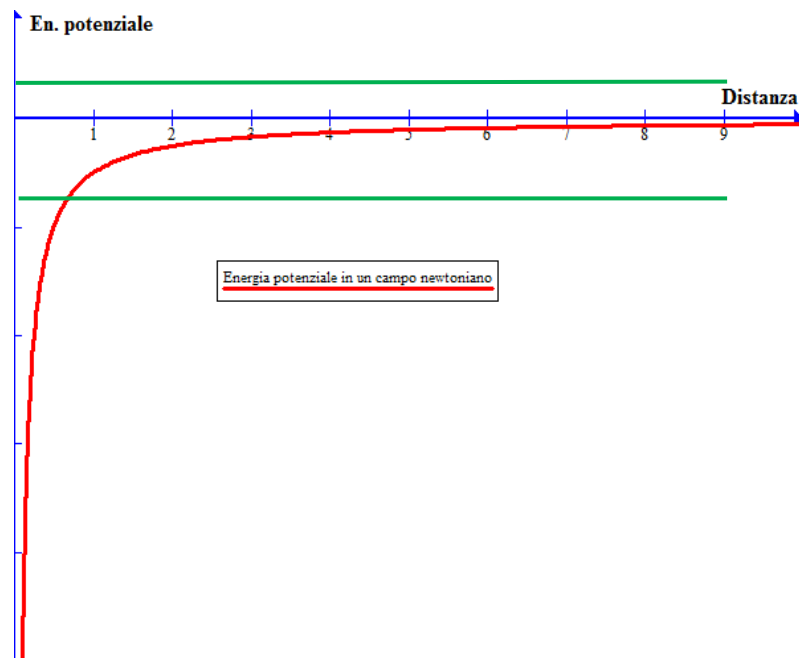
En. meccanica totale per una massa m : Cinetica + Potenziale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

$E = \text{costante}$

$E < 0$: Stato legato

$E > 0$: Stato libero



Bilancio delle forze per un corpo di massa m in orbita circolare attorno ad un corpo pesante di massa M :

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \quad \text{Forza gravitazionale} = \text{Forza centripeta}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r = \frac{GM}{v^2} \\ v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \end{cases}, \text{ indipendente da } m$$

En. meccanica totale:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}U(r)$$

$$\rightarrow \text{En. cinetica} = -\frac{1}{2}\text{En. potenziale}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = -\frac{1}{2}U(r) + U(r) = \frac{1}{2}U(r) \quad \text{En. totale}$$

En. potenziale gravitazionale vicino alla superficie della Terra:



$$r = R_T + h \rightarrow U(r) = U(R_T + h) = -\frac{GmM}{R_T + h}$$

$$\rightarrow U(R_T + h) = -\frac{GmM}{R_T \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)} = -\frac{GmM}{R_T} \frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}}$$

$$U(r) \underset{h \ll R_T}{\approx} -\frac{GmM}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T}\right) = \underbrace{-\frac{GmM}{R_T^2}}_A + \underbrace{\frac{GM}{R_T^2}}_g mh = mgh + A$$

Ridefinizione della costante arbitraria

→ En. potenziale della forza di gravita'!

Campo gravitazionale alla superficie della Terra

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}, M_T, R_T \text{ massa e raggio della Terra}$$

$$g(r) = G \frac{M}{r^2}, r \text{ distanza dal centro della Terra}$$

Se h e' l'altezza sulla superficie terrestre:

$$r = h + R_T \rightarrow g(r) = G \frac{M}{(h + R_T)^2} \underset{h \ll R_T}{\approx} G \frac{M}{R_T^2}$$

$$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

$$R_T = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$GM = gR_T^2 = 9.81 \cdot 40 \cdot 10^{12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \sim 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Misura di g : misura del prodotto GM_T , non le singole quantita' :

$$GM_T \sim 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Dopo Cavendish:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\rightarrow M_T \sim \frac{4 \cdot 10^{14}}{6.67 \cdot 10^{-11}} \sim 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Minima velocità iniziale necessaria a un corpo per vincere l'attrazione gravitazionale terrestre ed allontanarsi indefinitivamente dalla Terra?

Bilancio energetico:

$$\frac{1}{2}mv_{in}^2 + U_{in} = 0$$

v_{in} velocità iniziale minima necessaria ad uscire dalla "buca"

$$U_{in} = U(R_T) = -G \frac{mM}{R_T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{in}^2 - G \frac{mM}{R_T} = 0$$

$$\rightarrow v_{in} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6.4 \cdot 10^6}} \sim 11 \text{ km s}^{-1}, \text{ indipendente da } m$$

Velocita' di fuga (da Wikipedia)

Location	with respect to	$V_e^{[1]}$	with respect to	V_e
Sun ,	the Sun's gravity:	617.5 km/s		
Mercury ,	Mercury's gravity:	4.3 km/s	the Sun's gravity:	67.7 km/s
Venus ,	Venus' gravity:	10.3 km/s	the Sun's gravity:	49.5 km/s
Earth ,	the Earth's gravity:	11.2 km/s	the Sun's gravity:	42.1 km/s
Moon ,	the Moon's gravity:	2.4 km/s	the Earth's gravity:	1.4 km/s
Mars ,	Mars' gravity:	5.0 km/s	the Sun's gravity:	34.1 km/s
Jupiter ,	Jupiter's gravity:	59.5 km/s	the Sun's gravity:	18.5 km/s
Saturn ,	Saturn's gravity:	35.6 km/s	the Sun's gravity:	13.6 km/s
Uranus ,	Uranus' gravity:	21.2 km/s	the Sun's gravity:	9.6 km/s
Neptune ,	Neptune's gravity:	23.6 km/s	the Sun's gravity:	7.7 km/s
Solar System ,	the Milky Way 's gravity:	≥ 525 km/s		