Leggi di Kepler:

Fenomenologiche, dedotte dalle osservazioni e misure accurate di Brahe e Kepler stesso raccolte in molti anni

i) *Le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il Sole occupa uno dei fuochi*

ii) *Il raggio vettore che misura la posizione di un pianeta rispetto al Sole spazza aree uguali in tempi uguali*

iii) *Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita*

Ben verificate dai dati osservativi

Moto di un pianeta intorno al Sole: determinato dalla legge fondamentale della dinamica, e dalla legge di gravitazione universale

Realta':

Problema a molti corpi (influenza anche degli altri pianeti, satelliti, …)

Separazione del *moto del centro di massa* del Sistema Solare (con ottima approssimazione: moto uniforme, visto che il S.S. e' pressoche' isolato) e del *moto relativo* di ogni parte rispetto al centro di massa

Effetto del Sole *dominante* su quello degli altri pianeti

Separazione moto CM da moto relativo:

$$\mathbf{F}_T = m_T \mathbf{a}_T$$

$$\mathbf{F}_S = M\mathbf{a}_S = -\mathbf{F}_T$$

$$\rightarrow 0 = m_T\mathbf{a}_T + M\mathbf{a}_S = \left(M + m_T\right)\mathbf{a}_{CM}$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \text{cost}$$

$$\frac{\mathbf{F}_T}{m_T} = \mathbf{a}_T, \frac{\mathbf{F}_S}{M} = \mathbf{a}_S = -\frac{\mathbf{F}_T}{M}$$

$$\rightarrow \mathbf{a}_T - \mathbf{a}_S = \frac{\mathbf{F}_T}{m_T} + \frac{\mathbf{F}_T}{M} = \mathbf{F}_T\left(\frac{1}{m_T} + \frac{1}{M}\right)$$

$$\rightarrow \mathbf{a}_{TS} = F\,\frac{m_T + M}{m_T M} = \frac{F}{\mu_{TS}},\ \mu_{TS} \equiv m \ \text{ massa ridotta } \sim m_T$$

Eq. fondamentale della dinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \end{cases} \rightarrow m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \text{Equazioni del moto}$$

Sistema isolato:
grandezze conservate

Quantita' di moto totale
$\mathbf{P} =$ costante $\rightarrow \mathbf{v}_{CM} =$ cost

Momento angolare:
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} =$ costante, $\mathbf{r}$ posizione, $\mathbf{p}$ quantita' di moto del pianeta rispetto al Sole

Energia totale:
$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{costante} = E$$

$\mathbf{L} =$ costante $\rightarrow$ Moto in un piano

Infatti:

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{L} \perp \mathbf{r}, \mathbf{p}$

$\rightarrow$ Piano individuato da $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ ad ogni istante:
sempre la stessa normale

$\rightarrow$ Orbita piana

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \Big(\underbrace{\cancel{\mathbf{v}_r}}_{\mathbf{v_r} \parallel \mathbf{r}} + \mathbf{v}_\varphi \Big) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi$$

$$\rightarrow |\mathbf{L}| = mrv_\varphi = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{costante} = L$$

Moto analizzato in coordinate polari
meglio che in coordinate cartesiane

$\begin{cases} E = \text{cost} \\ L = \text{cost} \end{cases}$ in coordinate polari:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - G \frac{mM}{r} = E$$

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = L \rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{L}{m} \right)^2 \frac{1}{r^2} - G \frac{mM}{r}}_{U_{eff}(r)} = E$$

$$U_{eff}\left(r\right)=\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{1}{r^2}-G\frac{mM}{r}=\frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\frac{1}{r^2}-G\frac{mM}{r}$$

$$\frac{dU_{eff}}{dr}=-\frac{L^2}{m}\frac{1}{r^3}+G\frac{mM}{r^2}$$

$$\frac{dU_{eff}}{dr}=0\rightarrow\frac{L^2}{m}\frac{1}{r^3}=G\frac{mM}{r^2}\rightarrow\frac{L^2}{m}\frac{1}{r}=GmM$$

$$\rightarrow r_0=\frac{L^2}{Gm^2M}$$

$$\rightarrow U_{eff}\left(r_0\right)=\frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\frac{1}{r_0^2}-G\frac{mM}{r_0}$$

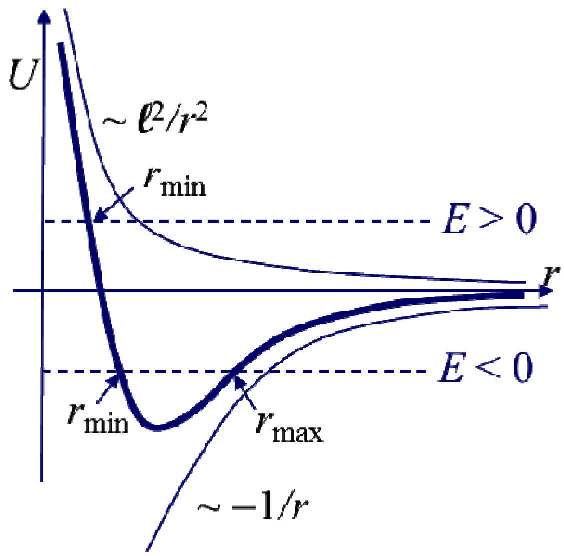
$$\rightarrow U_{eff}\left(r_0\right)=\frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\frac{G^2m^4M^2}{L^4}-G\frac{mM}{L^2}Gm^2M$$

$$\rightarrow U_{eff}\left(r_0\right)=\frac{1}{2}\frac{G^2m^3M^2}{L^2}-\frac{G^2m^3M^2}{L^2}=-\frac{1}{2}\frac{G^2m^3M^2}{L^2}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+U_{eff}(r)=E$$

$$U_{eff}(r)=\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{1}{r^2}-G\frac{mM}{r}$$

Situazione simile a conservazione energia
in moto 1-dimensionale, con en. potenziale $U_{eff}(r)$



Ragionamenti sul grafico di $U_{eff}(r)$:

$E>0$: orbite aperte ($r>0$ illimitato)

$E<0$: orbite chiuse $(r_{\min}<r<r_{\max})$, non circolari ($r\neq$ cost)

Caso limite: $E=U_{\min}$ orbite circolari ($r=$ cost)

Caratteristiche generali:

Forza nel moto 1-dimensionale equivalente:

$$F(r)=-\frac{dU}{dr}>0 \quad r<r_0: \text{ repulsiva}$$

$$F(r)=-\frac{dU}{dr}<0 \quad r>r_0: \text{ attrattiva}$$

Eq. dell'orbita:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{L}{m}$$

$$d\varphi=\frac{L}{mr^2}dt$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2}{m}\left[E-\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{1}{r^2}+G\frac{mM}{r}\right]$$

$$dr=\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{1}{r^2}+G\frac{mM}{r}\right]}dt$$

$$\rightarrow dr=\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-\frac{L^2}{2mr^2}+G\frac{mM}{r}\right]}\frac{mr^2}{L}d\varphi$$

$$\rightarrow d\varphi=\frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m\left[E-\frac{L^2}{2mr^2}+G\frac{mM}{r}\right]}}$$

$$\rightarrow \varphi-\varphi_0=\int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}\frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m\left[E-\frac{L^2}{2mr^2}+G\frac{mM}{r}\right]}}$$

$$r=\frac{1}{u}\rightarrow dr=-\frac{1}{u^2}du$$

$$\rightarrow \varphi-\varphi_0=\int_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi)}-\frac{Lu^2\frac{1}{u^2}du}{\sqrt{2m\left[E-\frac{L^2}{2m}u^2+GmMu\right]}}$$

$$\rightarrow \varphi-\varphi_0=-\int_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi)}\frac{Ldu}{\sqrt{\left[-L^2u^2+2Gm^2Mu+2mE\right]}}$$

Da tavole di integrali: $R=\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$\int \frac{dx}{R} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \qquad (\text{for } a<0,\ 4ac-b^2<0,\ |2ax+b|<\sqrt{b^2-4ac})$$

$$\to \int \frac{Ldu}{\sqrt{\left[-L^2u^2+2Gm^2Mu+2mE\right]}} = \int \frac{du}{\sqrt{\left[-u^2+\frac{2Gm^2M}{L^2}u+\frac{2mE}{L^2}\right]}}$$

$$a=-1, b=\frac{2Gm^2M}{L^2}, c=\frac{2mE}{L^2}$$

$$\varphi-\varphi_0 = -\arcsin \frac{-2u+\frac{2Gm^2M}{L^2}}{\sqrt{\left(\frac{2Gm^2M}{L^2}\right)^2+\frac{8mE}{L^4}L^2}}+C$$

$$\to \varphi_0-\varphi = \arcsin \frac{-uL^2+Gm^2M}{\sqrt{\left(Gm^2M\right)^2+2mEL^2}}-C = \arcsin \frac{u\frac{L^2}{Gm^2M}-1}{\sqrt{1+\frac{2mEL^2}{\left(Gm^2M\right)^2}}}-C$$

$\varphi_0+C \equiv \frac{\pi}{2}$ sempre possibile per l'arbitrarieta' di C

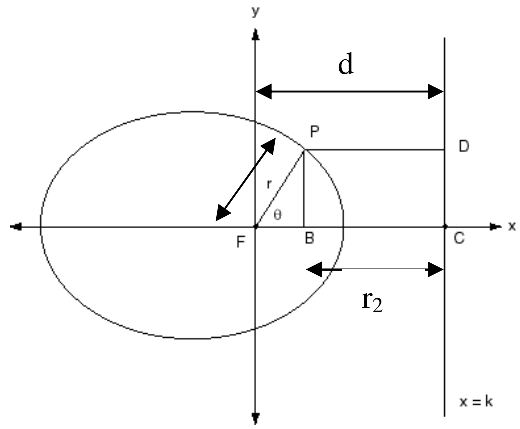
$$\to \frac{\pi}{2}-\varphi = \arcsin \frac{u\frac{L^2}{Gm^2M}-1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2m}{G^2m^4M^2}}}$$

$$\to \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \cos\varphi = \frac{\frac{1}{r}\frac{L^2}{Gm^2M}-1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}}}$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}} = \sqrt{1+\frac{4Er_0}{GmM}} \\ c &= \frac{L^2}{Gm^2M} = 2r_0 \end{aligned}\right\} \to \cos\varphi = \frac{\frac{c}{r}-1}{e} \to \frac{c}{r} = e\cos\varphi+1$$

$$\to r = \frac{c}{1+e\cos\varphi}$$

Conica: luogo dei punti del piano le cui distanze da un punto (fuoco) e da una retta (direttrice) fissati sono in rapporto fisso e
Conica con direttrice a $d>0$:



$$\frac{r_1 = r}{r_2} = e \rightarrow \frac{r}{d - r\cos\theta} = e \rightarrow r = e\left(d - r\cos\theta\right) \rightarrow r\left(1 + e\cos\theta\right) = ed$$

$$\rightarrow r = \frac{ed}{1 + e\cos\varphi}$$

Eccentricita': $0 < e < 1$ ellisse, $e = 1$ parabola, $e > 1$ iperbole

In coordinate cartesiane:

$$\frac{\left(x - x_c\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Centro, semiassi: $x_c = \dfrac{e^2 d}{1 - e^2}, a = \dfrac{ed}{1 - e^2}, b = \dfrac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}$

Area ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\rightarrow A = \int_{-a}^{+a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dxdy = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_{-a}^{+a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$\rightarrow A = \frac{2b}{a}\left\{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]\right\}_{-a}^{+a} = ab\left[\arcsin\left(1\right) - \arcsin\left(-1\right)\right] = \pi ab$$

Orbita kepleriana:

$$r = \frac{c}{1 + e\cos\varphi}$$

Afelio, Perielio: $r_{\max} = r(\pi) = \frac{c}{1-e}, r_{\min} = r(0) = \frac{c}{1+e}$

$$c = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}}$$

$$E_{\min} = -\frac{1}{2}\frac{G^2m^3M^2}{L^2}$$

Se $E_{\min} < E < 0$:

$$\rightarrow -1 < \frac{2EL^2}{G^2m^3M^2} < 0 \rightarrow 0 < e < 1 \rightarrow ellisse$$

$a = -\frac{GmM}{2E}$ semiasse maggiore

$b = \frac{L}{\sqrt{-2Em}}$ semiasse minore

I legge:

$r(\varphi)$ ellisse

II Legge:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{cost}$$

III legge:

$A = \pi ab = \dfrac{LT}{2m}$, T durata rivoluzione

$$\to T = \frac{2mA}{L} = \frac{2\pi abm}{L}$$

$$a = -\frac{GmM}{2E}$$

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2Em}}$$

$$c = \frac{L^2}{Gm^2M} \to b = \sqrt{ca}\left(= \sqrt{-\frac{L^2}{Gm^2M}\frac{GmM}{2E}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}} \quad \text{OK} \right)$$

$$\to T = \frac{2\pi abm}{L} = \frac{2\pi m\sqrt{c}a^{3/2}}{L} \to T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 c}{L^2}a^3$$