Forze fondamentali:

Gravitazionali, elettrodeboli (elettromagnetiche + deboli), forti

Non se ne conoscono altre
(ma: materia oscura, energia oscura, ...suggeriscono che la conta potrebbe non essere finita)

Per noi, quasi sempre:

Forze ‘modello’: rappresentazioni semplificate di forze reali, derivanti da interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche

Es:

Forza di gravita’, reazioni vincolari (forze normali, tensioni delle funi), attriti vari, molle, ...

Forza di gravita': forza costante
Caso tipico: moto vicino alla sup. della Terra, forza di gravita'

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$

$\boldsymbol{g}$: uguale per tutti i corpi,verticale,diretta verso il basso
variabile (poco) da un luogo all'altro
variabile (poco) con l'altezza (montagne)

$$\rightarrow m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\boldsymbol{g}$$

Moto gia' studiato (proiettili etc.)

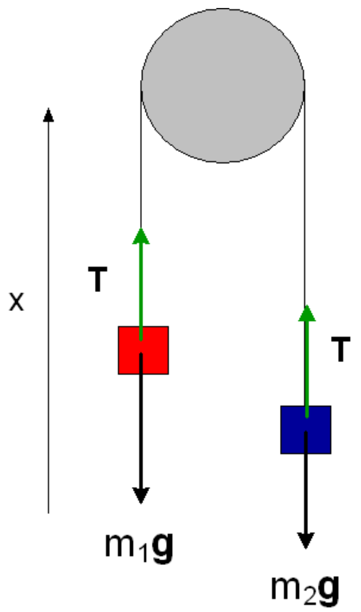
Le due 'masse' sono veramente uguali? Possiamo davvero semplificarle nell'equazione?
Rossa: m. inerziale →Misura dell'inerzia del corpo
Blu: m. gravitazionale→Misura dell'intensita' della int. gravitazionale del corpo

Sperimentalmente: identiche con accuratezza molto elevata (Eotvos)

In principio: completamente scorrelate, identita' puramente casuale

Einstein: base del *principio di equivalenza*, relativita' generale, teoria della gravitazione post-newtoniana

Macchina di Atwood



$$F_1 = -m_1 g + T \to a = \frac{-m_1 g + T}{m_1}$$

$$F_2 = -m_2 g + T \to a = -\frac{-m_2 g + T}{m_2}$$

$$\to \frac{-m_1 g + T}{m_1} = -\frac{-m_2 g + T}{m_2}$$

$$\to \left(-m_1 g + T\right) m_2 = -\left(-m_2 g + T\right) m_1$$

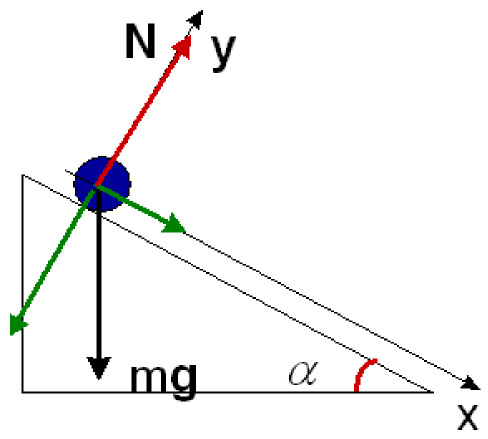
$$\to -m_1 m_2 g + T m_2 = m_2 g m_1 - T m_1$$

$$\to T\left(m_2 + m_1\right) = 2 m_1 m_2 g$$

$$\to T = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g, \qquad a = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} g$$

Piano inclinato

Niente attrito; reazione vincolare



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}$$

$$m\boldsymbol{g} = f_x\hat{\boldsymbol{i}} + f_y\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{N} = |\boldsymbol{N}|\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$f_x = mg\sin\alpha$$

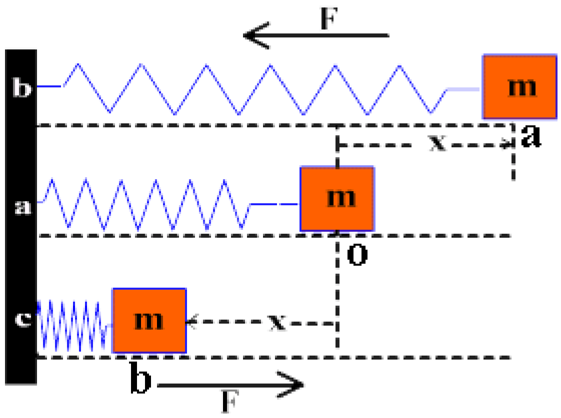
$$f_y = -mg\cos\alpha$$

$$|\boldsymbol{N}| = |f_y| = mg\cos\alpha$$

$$\rightarrow \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} = mg\sin\alpha\hat{\boldsymbol{i}} + 0\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = g\sin\alpha\hat{\boldsymbol{i}}$$

Molla: legge di Hooke



Molla: Legge di Hooke

$F = -k\left(x - x_0\right)$ lunghezza di riposo $= x_0$

$$\rightarrow \begin{cases} x > x_0 \rightarrow F < 0 \\ x < x_0 \rightarrow F > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Forza di richiamo}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - x_0\right)$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\left(x - x_0\right) = 0 \quad \text{Eq. del moto}$$

$$u = x - x_0$$

$$\rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = 0 \quad \text{Eq. dei moti armonici}$$

Uno fra i 1000 modi di risolverla:

$$\underbrace{\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du}{dt}}_{=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right)}+\frac{k}{m}\underbrace{u\frac{du}{dt}}_{=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2\right)}=0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right)+\frac{k}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{k}{m}u^2\right)=0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{k}{m}u^2=E=\text{cost}} \qquad [E]=\left[L^2T^{-2}\right]$$

$$\rightarrow \left(\frac{du}{dt}\right)^2=2E-\frac{k}{m}u^2 \rightarrow \frac{du}{dt}=\sqrt{2E-\frac{k}{m}u^2}$$

$$\rightarrow \frac{du}{\sqrt{2E-\frac{k}{m}u^2}}=dt \rightarrow \frac{du}{\sqrt{1-\frac{k}{2mE}u^2}}=\sqrt{2E}dt$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{k}{2mE}u^2}}=\sqrt{2E}\int_{t_0}^{t}dt}$$

Soluzione del problema del moto:
ricondotta a *quadrature* (← integrazioni)

1^0 integrale:

Passaggio da eq. del II ordine a eq. del I ordine
→ 1 costante arbitraria (E)

2^0 integrale:

Fornisce $u(t)$
→ 1 costante arbitraria (u_0)

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{k}{2mE}u^2}} = \sqrt{2E}\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2mE}}}\int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{\frac{k}{2mE}}du}{\sqrt{1-\frac{k}{2mE}u^2}} = \sqrt{2E}\int_{t_0}^{t} dt$$

$$y = \sqrt{\frac{k}{2mE}}u$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2mE}}}\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{2E}\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\rightarrow \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2mE}}u\right) - \underbrace{\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2mE}}u_0\right)}_{\varphi} = \sqrt{\frac{k}{2mE}}\sqrt{2E}\left(t-t_0\right)$$

$$t_0 = 0 \rightarrow \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2mE}}u\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi$$ Istante iniziale $t_0 = 0$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{k}{2mE}}u = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$$\rightarrow u = \sqrt{\frac{2mE}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$$\rightarrow x = x_0 + \sqrt{\frac{2mE}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$$\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = \left[MLT^{-2}L^{-1}M^{-1}\right]^{1/2} = \left[T^{-1}\right]$$ frequenza (angolare) di oscillazione P

$$\left[\sqrt{\frac{2mE}{k}}\right] = [T]\left[LT^{-1}\right] = [L]$$ ampiezza di oscillazione

Parametri, costanti arbitrarie, valori iniziali

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ Parametro: dipende da massa e cost. elastica

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, T = \frac{1}{\nu}$ Frequenza, periodo

x_0 Parametro: lunghezza di riposo della molla

$\sqrt{\frac{2mE}{k}} = A$ Costante arbitraria ($\leftarrow$ Contiene E)

$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2mE}} u_0\right) = \varphi$ Costante arbitraria ($\leftarrow$ Contiene E, u_0)

$\rightarrow x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$

Determinazione cost. arbitrarie: richiede *condizioni iniziali*

$x(0) = a$ Pos. iniziale

$v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = b$ Vel. iniziale

$$\rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 + A\sin(\varphi) = a \\ \frac{dx}{dt}(0) = A\omega\cos(\varphi) = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A\sin(\varphi) = a - x_0 \\ A\cos(\varphi) = \frac{b}{\omega} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{(a - x_0)^2 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2} \\ \varphi = \arctan \frac{\omega(a - x_0)}{b} \end{cases}$$