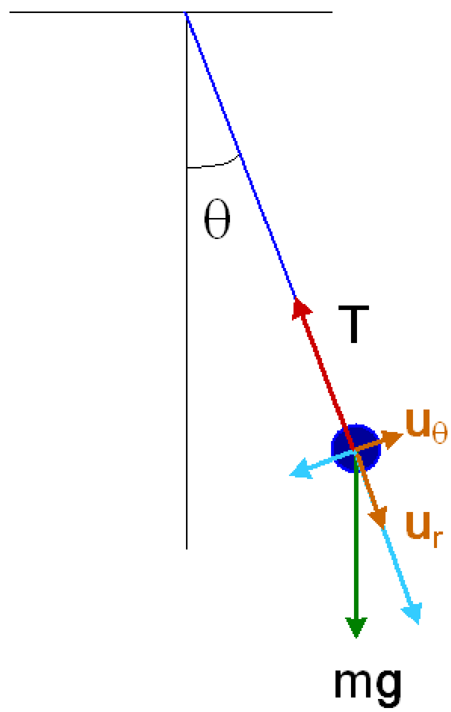
Pendolo (semplice)



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}$$

$$m\boldsymbol{g} = f_\theta \hat{\boldsymbol{u}}_\theta + f_r \hat{\boldsymbol{u}}_r$$

$$\rightarrow m\boldsymbol{g} = -mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta + mg\cos\theta\hat{\boldsymbol{u}}_r$$

$$\boldsymbol{T} = -\left|\boldsymbol{T}\right|\hat{\boldsymbol{u}}_r$$

$$\rightarrow \boldsymbol{F} = -mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta + \left(-\left|\boldsymbol{T}\right| + mg\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{u}}_r$$

$$\rightarrow m\boldsymbol{a} = -mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta - \left(\left|\boldsymbol{T}\right| - mg\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{u}}_r$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_\theta = a_T = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -g\sin\theta \\ a_r = a_N = \dfrac{v^2}{l} = \left(\dfrac{|\boldsymbol{T}|}{m} - g\cos\theta\right) \end{cases}, \quad r = l \;\; \text{fisso}$$

$$s = l\theta \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\rightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow |\boldsymbol{T}| = \left(m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta\right)$$

Approssimazione di piccoli angoli:

$$\theta \ll 1 \rightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \;\; \text{Eq. moto armonico}$$

$$\rightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \tau = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

τ ***non dipende*** da m, θ_0 (ampiezza di oscillazione)

Per angoli non piccoli:eq. diff. non lineare

$\rightarrow$ Soluzione complicata (funzioni ellittiche)

$\rightarrow \tau$ ***dipende*** da θ_0

Razzo

v vel. razzo rispetto a Terra (SRI)

v' vel. gas rispetto a Terra

$v_e = v' - v$ vel. gas rispetto a razzo

$p = mv$ quantita' di moto del sistema all'istante t

m massa all'istante t, dm variazione (< 0)

quantita' di moto del sistema all'istante t':

$$p' = (m + dm)(v + dv) + (-dm)v' \simeq mv + mdv - (v' - v)dm$$

$$\rightarrow p' = mv + mdv - v_e dm$$

$$\rightarrow dp = p' - p = mdv - v_e dm$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} - v_e \frac{dm}{dt}$$

Seconda legge:

$$\frac{dp}{dt} = F = -mg$$

$$\rightarrow m\frac{dv}{dt} - v_e \frac{dm}{dt} = -mg$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} - \frac{v_e}{m}\frac{dm}{dt} = -g$$ Equazione del razzo

$$dv - \frac{v_e}{m} dm = -g dt$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} dv - v_e \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -g \int_{0}^{t} dt$$

$$\rightarrow v - v_0 - v_e \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -gt$$

$$\rightarrow v(t) = v_0 + v_e \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - gt = v_0 - \underbrace{v_e}_{<0} \underbrace{\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)}_{>0} - gt$$

$\left[v(t) \nearrow \right.$ perche' $\left. v_e < 0.... \right]$

Trascurate resistenza dell'aria, variazione di g con l'altezza, …

Saturn V $\left(\text{quello della Luna, } 1969\right)$

$$m_0 = 2500\ T = 2.5 \cdot 10^6 kg$$

$$\frac{dm}{dt} = 16\ \ Ts^{-1} = 1.6 \cdot 10^4 kgs^{-1}$$

$$v_e = 3\ \ kms^{-1} = 3 \cdot 10^3 ms^{-1}$$

$T = 150\ s$ tempo di accensione

$$\rightarrow m\left(t = 150\right) = (2500 - 16 \cdot 150)T = 100T$$

$$\rightarrow v\left(t = 150\right) = 310^3 \ln\left(\frac{2500}{100}\right) - 9.81 \cdot 150$$

$$\rightarrow v\left(t = 150\right) \approx 8.2 kms^{-1}$$

$$\frac{dm}{dt} = \text{cost} = a \rightarrow m\left(t\right) = m_0 - at$$

$$\rightarrow v\left(t\right) = \left|v_e\right| \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) - gt$$

Origini attrito viscoso: interazione fra corpo e moltissime molecole del fluido

Interazione non fondamentale (forza dissipativa, di natura statistica: fondamentalmente f. elettromagnetiche)

Modellata attraverso un coefficiente di proporzionalita' fra forza e una potenza della velocita'; sempre opposta alla velocita'

Coefficiente: dipende da forma e dimensioni del corpo, e da natura e stato termodinamico del fluido

Velocita' basse: proporzionale alla velocita'

$$F_a = -kv$$

Es: Fase iniziale di caduta libera in aria

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv = -k\left(v - \frac{m}{k}g\right)$$

$$\rightarrow \frac{mdv}{-k\left(v - \frac{m}{k}g\right)} = dt \rightarrow \frac{dv}{v - \frac{m}{k}g} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v - \frac{m}{k}g} = -\frac{k}{m}\int_{0}^{t} dt$$

$$\rightarrow \ln\frac{v - \frac{m}{k}g}{v_0 - \frac{m}{k}g} = -\frac{k}{m}t$$

$$\rightarrow \frac{v - \frac{m}{k}g}{v_0 - \frac{m}{k}g} = e^{-\frac{m}{k}t} \rightarrow v - \frac{m}{k}g = \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right)e^{-\frac{m}{k}t}$$

$$v_0 = 0 \rightarrow v = \left(-\frac{m}{k}g\right)e^{-\frac{m}{k}t} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{m}{k}t}\right)$$

$$v_{\text{limite}} = \frac{mg}{k}$$

Vel. elevate: prop. al quadrato della velocita'
Dominante in generale quando le velocita' non sono molto basse

$$F_a = -kv^2$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 = -k\left(v^2 - \frac{mg}{k}\right)$$

$$\rightarrow \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\rightarrow \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} = \frac{k}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\underbrace{\frac{mg}{k}}_{a^2} - v^2} = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}t, \qquad a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$ vel. caratteristica

Scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{A}{a-v} + \frac{B}{a+v} = \frac{A(a+v)}{(a+v)(a-v)} + \frac{B(a-v)}{(v-a)(v+a)}$$

$$= \frac{(A+B)a + (A-B)v}{a^2 - v^2} \rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{a} \\ A - B = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = B \rightarrow A = \frac{1}{2a} = B$$

$$\rightarrow \frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{v-a} + \frac{1}{v+a}\right)$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\int_{v_0}^{v}\left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v}\right) = \frac{1}{2a}\left(\ln\frac{a+v}{a+v_0} - \ln\frac{a-v}{a-v_0}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2a}\left(\ln\frac{a+v}{a-v} - \ln\frac{a+v_0}{a-v_0}\right) = \frac{k}{m}t$$

$$\rightarrow \ln\frac{a+v}{a-v} = 2a\frac{k}{m}t + \ln\frac{a+v_0}{a-v_0}$$

$$\rightarrow \frac{a+v}{a-v} = \frac{a+v_0}{a-v_0}e^{2a\frac{k}{m}t} \rightarrow v = (a-v)\frac{a+v_0}{a-v_0}e^{2a\frac{k}{m}t} - a$$

$$\rightarrow v\left(1 + \frac{a+v_0}{a-v_0}e^{2a\frac{k}{m}t}\right) = a\left(-1 + \frac{a+v_0}{a-v_0}e^{2a\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\rightarrow v = a\frac{\frac{a+v_0}{a-v_0}e^{2a\frac{k}{m}t} - 1}{\frac{a+v_0}{a-v_0}e^{2a\frac{k}{m}t} + 1}$$

$$v_0 = 0 \rightarrow v(t) = a\frac{e^{2a\frac{k}{m}t} - 1}{e^{2a\frac{k}{m}t} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{k}{m}t\right)$$

$$\rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right) \qquad \sqrt{\frac{mg}{k}}$$ velocita' limite