Seconda legge di Newton:

$$\boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{p}$$

Legame fra l'azione della forza agente sul punto durante l'intervallo dt e la variazione della sua quantita' di moto

Casi in cui $\boldsymbol{F}(t)$ e' nota: relativamente rari
Spesso per conoscere $\boldsymbol{F}(t)$ bisognerebbe conoscere la traiettoria, che si puo' conoscere solo se e' nota $\boldsymbol{F}(t)$!

D'altra parte: spesso $\boldsymbol{F}$ nota a priori in funzione di $\boldsymbol{r}$

→Possibile sviluppare metodi alternativi all'integrazione delle equazioni del moto

Non indipendenti, ma conseguenza della legge fondamentale della dinamica

Azione della forza (quasi sempre): spostamento $d\boldsymbol{r}$ del punto nello spazio
Definizione:

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = dW$$

Lavoro elementare compiuto da $\boldsymbol{F}$ quando il punto subisce lo spostamento $d\boldsymbol{r}$
Osservazione:

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \begin{cases} > 0 & \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \text{ concordi} \\ = 0 & \boldsymbol{F} \perp d \\ < 0 & \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \text{ discordi} \end{cases}$$

Definizione utile: il lavoro ha proprieta' interessanti

Percorso finito:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{s}_i \sim W$$

$$\rightarrow W = \int_{\text{percorso}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Integrale di linea: estensione al caso di funzioni vettoriali definite lungo linee dell'idea di integrale definito

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\left[\text{Infatti:}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = W$: Lavoro eseguito da $\boldsymbol{F}$ fra $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$

$\rightarrow$ Lavoro: Grandezza scalare definita dai valori di $\boldsymbol{F}$ in tutti i punti fra $\boldsymbol{r}(t_1)$ e $\boldsymbol{r}(t_2)$ lungo un dato percorso

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{E_k(t_1)}^{E_k(t_2)} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$\leftarrow$ Variazione di en. cinetica fra t_1 e t_2

$\frac{1}{2}mv^2 = E_k$: Energia cinetica

$\rightarrow$ En. cinetica:

Grandezza scalare definita dalla massa
e dalla velocita' (scalare) del punto

Teorema del lavoro e dell'energia cinetica:

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_{E_k(t_1)}^{E_k(t_2)} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_{E_k(t_1)}^{E_k(t_2)} dE_k = E_k(t_2) - E_k(t_1)$$

$$\rightarrow W = \Delta E_k$$

Noto anche come teorema delle forze vive

Forza: grandezza vettoriale
Spostamento: grandezza vettoriale
Lavoro, En. cinetica: grandezze scalari

In generale:

W dipende dai punti A e B, iniziale e finale, della linea, nonche' da *quale* linea viene scelta come percorso

E_k *non* dipende dalla direzione della velocita'; E_k costante *non* implica $\boldsymbol{v}$ costante, *solo* v costante

Dimensioni & Unita' di misura in SI:
grandezze derivate

$$[W]=[F][L]=[M][L][T^{-2}][L]=[M][L^2][T^{-2}]$$

$$1\ N\cdot 1\ m=1\ Joule\ \ (J)$$

$$[E_k]=[M][V^2]=[M][L^2][T^{-2}]$$

$$c.s.$$

Potenza: lavoro eseguito per unita' di tempo

$$P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{dW}{dt}$$

$$1\ Js^{-1}\ =\ 1\ Watt\ \ (W)=1\ Nms^{-1}$$

Esempio 1: Lavoro della forza peso

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B m\boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{r} = m\boldsymbol{g} \cdot \int_A^B d\boldsymbol{r} = m\boldsymbol{g} \cdot \left(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A\right)$$

$$m\boldsymbol{g} = -mg\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\rightarrow W = -mg\left(z_B - z_A\right)$$

W: indipendente dal percorso,

dipendente da altezze finale e iniziale

$U\left(z\right) = mgz$ En. potenziale gravitazionale

$$\rightarrow W = -\left(U\left(z_B\right) - U\left(z_A\right)\right) = -\Delta U$$

Lavoro forza peso = -(variazione en. pot. gravitazionale)

$W > 0 \rightarrow U \searrow$: evoluzione naturale del sistema

Conclusione si estende al caso di una forza costante qualsiasi

Esempio 2: Lavoro di una forza elastica

$$W = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -k\frac{1}{2}x^2\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$W = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

$$x_1 = 0 \rightarrow W < 0$$

Lavoro resistente (forza di richiamo)

$U = \frac{1}{2}kx^2$ En. potenziale elastica

$$\rightarrow W = -\Delta U$$

$W > 0 \rightarrow U \searrow$: evoluzione naturale del sistema

NB: Lunghezza di riposo non conta in tutto questo: per il calcolo dell'integrale si puo' scegliere l'origine nel punto $x=l_0$

Esempio 3: Lavoro della forza di attrito

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F}_a \cdot d\boldsymbol{s} = \int_A^B \left(-\mu N \hat{\boldsymbol{u}}_T \cdot d\boldsymbol{s}\right) = -\mu \int_A^B N ds$$

Forza di attrito sempre opposta a movimento

$\rightarrow$ Sempre $W < 0$: lavoro resistente

Lavoro forza di attrito (p es quando μ costante): proporzionale a lunghezza percorso

Non esiste una funzione energia potenziale che dipenda solo dalle coordinate del punto…

Esempio 4: Lavoro della forza centripeta

Sempre $\perp$ alla velocita'

$$\boldsymbol{F}_c = -m\frac{v^2}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_N \perp \boldsymbol{v} \parallel d\boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{F}_c \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$\rightarrow$Lavoro nullo

Forze conservative e non

Lavoro: integrale di linea della forza lungo il percorso
Estensione dell'idea di integrale definito a:

Funzioni a valori *vettoriali*
Percorsi *curvilinei*

Per il calcolo di integrali definiti:

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$F(x)$: primitiva di $f(x) \leftrightarrow \frac{dF}{dx} = f(x)$

Esiste un risultato analogo per gli integrali di linea? Si' e no: esiste, ma non per tutte le funzioni vettoriali, *solo per quelle conservative*

$$\int_a^b \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\left[U(\boldsymbol{r}_B) - U(\boldsymbol{r}_A)\right]$$

$U(\boldsymbol{r})$: 'primitiva' di $\boldsymbol{F}$