UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
" LA SAPIENZA "
Dipartimento di Fisica

Formulario
di
Fisica Generale 1

Prof. M. Severi

a.a. 1997-98

Servizio Fotostampa Dispense

Giugno 1998

11/ 2500

€ 1.28

Prof. M. Severi

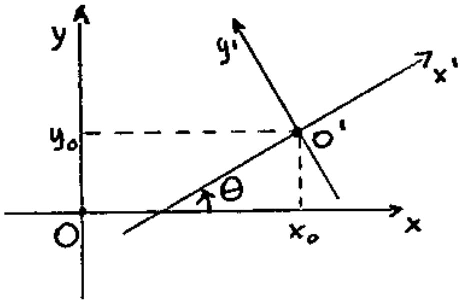
VETTORI

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) = (v\cos\alpha, v\cos\beta, v\cos\gamma)$$
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$
$$\hat{i} \equiv (1,0,0) \qquad \hat{j} \equiv (0,1,0) \qquad \hat{k} \equiv (0,0,1)$$
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad a\vec{v} \equiv (av_x, av_y, av_z)$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) \qquad \int\vec{v}dt \equiv \left(\int v_x dt, \int v_y dt, \int v_z dt\right)$$
$$\Sigma\vec{v}_i \equiv \left(\Sigma v_{ix}, \Sigma v_{iy}, \Sigma v_{iz}\right)$$
$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \vec{v}_2\cdot\vec{v}_1 = v_1 v_2\cos\theta = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}$$
$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$$
$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = -\vec{v}_2\times\vec{v}_1 = \hat{i}(v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}) + \hat{j}(v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z}) +$$
$$+\hat{k}(v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$
$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} = \vec{v}_3\times\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 =$$
$$= \vec{v}_2\times\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1$$
$$(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\times\vec{v}_3 = -\vec{v}_3\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2) = (\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3)\vec{v}_1$$
$$\text{grad}\,V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \qquad |\text{grad}\,V| = \frac{dV}{du}$$

momento del vettore $\vec{v}$ applicato in P rispetto al polo Ω
$$\vec{m}_\Omega(\vec{v}) = \vec{\Omega P}\times\vec{v}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO

— 2 DIMENSIONI

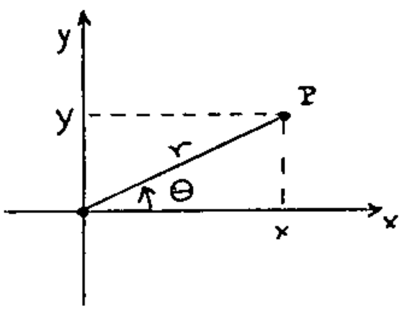


ROTOTRASLAZIONI

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = y_0 + x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = -(x-x_0)\,\mathrm{sen}\,\theta + (y-y_0)\cos\theta \end{cases}$$

COORDINATE POLARI (r, θ)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \begin{cases} \mathrm{arc}\cos\left(\frac{x}{r}\right) \\ \mathrm{arc}\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{r}\right) \end{cases} \end{cases}$$

elemento di superficie $dS = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

— 3 DIMENSIONI

ROTOTRASLAZIONI

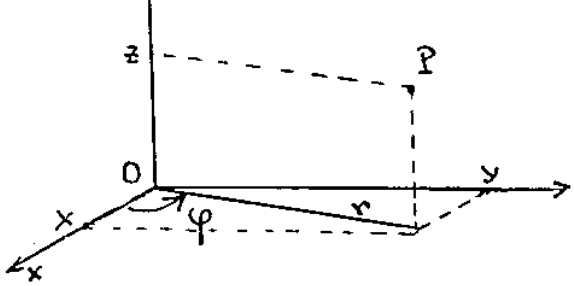
$\cos \widehat{xx'} = l_1$ $\qquad \cos \widehat{yx'} = m_1$ $\qquad \cos \widehat{zx'} = n_1$

$\cos \widehat{xy'} = l_2$ $\qquad \cos \widehat{yy'} = m_2$ $\qquad \cos \widehat{zy'} = n_2$

$\cos \widehat{xz'} = l_3$ $\qquad \cos \widehat{yz'} = m_3$ $\qquad \cos \widehat{zz'} = n_3$

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y = y_0 + m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z = z_0 + n_1x' + m_2y' + n_3z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = l_1(x-x_0) + m_1(y-y_0) + n_1(z-z_0) \\ y' = l_2(x-x_0) + m_2(y-y_0) + n_2(z-z_0) \\ z' = l_3(x-x_0) + m_3(y-y_0) + n_3(z-z_0) \end{cases}$$

COORDINATE CILINDRICHE

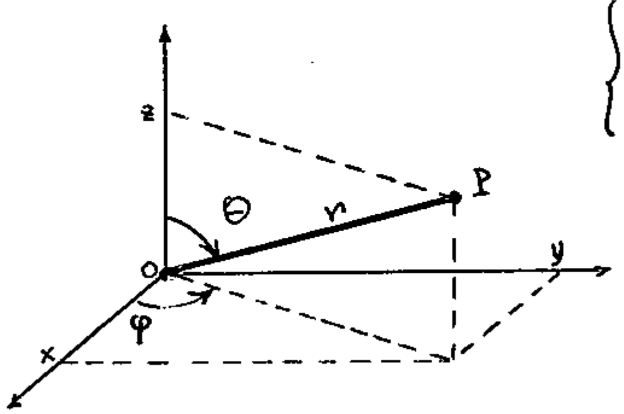


$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad z = z \quad \varphi = \begin{cases} \mathrm{arc}\cos\left(\frac{x}{r}\right) \\ \mathrm{arc}\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{r}\right) \end{cases}$$

elemento di superficie $dS = r\,d\varphi\,dz$ $(r = \mathrm{cost})$

elemento di volume $d\mathrm{vol} = dx\,dy\,dz = r\,dr\,dz\,d\varphi$

COORDINATE SFERICHE



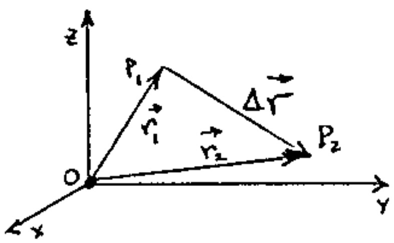
$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \arccos\frac{z}{r}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \operatorname{arc\,sen} \dfrac{\ }{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

CINEMATICA



velocità $\vec{v} \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

accelerazione $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$

velocità angolare $\vec{\omega} = \frac{1}{r^2}\,\vec{r}\times\vec{v}$ $\quad \left(\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}\right)$

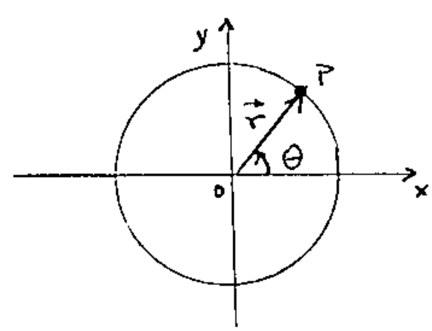
per generico vettore $\vec{u}$ se $u = \text{cost}$ $\quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}$

MOTO CIRCOLARE

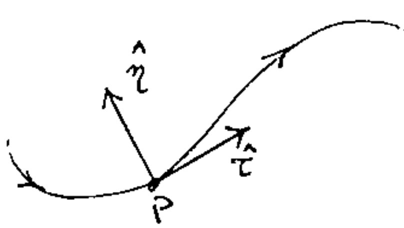
$$\vec{v} = r\omega\,\hat{t}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v(t)}{r}$$

$$\vec{a}(t) = r\cdot\frac{d\omega}{dt}\,\hat{t} - \omega^2\,\vec{r}$$



TRAIETTORIA QUALSIASI



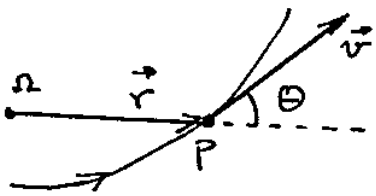
$$\vec{v} = v\,\hat{\tau}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_\eta = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\omega\,\hat{\eta}$$

$$v\omega = \omega^2\rho = \frac{v^2}{\rho}$$

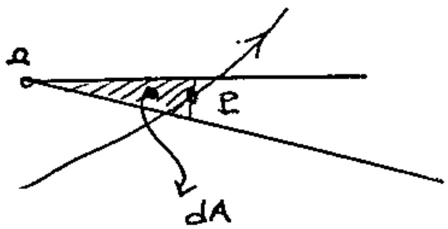
ρ = raggio di curvatura

VELOCITÀ AREOLARE

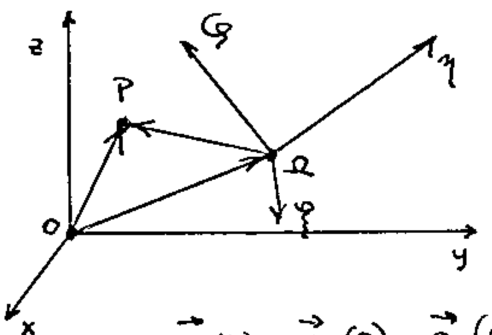


$$\vec{\Gamma} = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega P} \times \vec{v}$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\, r v \operatorname{sen}\theta = \frac{dA}{dt}$$



COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ E DELLE ACCELERAZIONI



$$\vec{OP} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega P}$$

$$\vec{v}_O(P) = \vec{v}_\Omega(P) + \vec{v}_O(\Omega) + \vec{\omega} \times \vec{\Omega P}$$

$$= \vec{v}_\Omega(P) + \vec{v}_{trascinamento}$$

$$\vec{a}_O(P) = \vec{a}_\Omega(P) + \vec{a}_O(\Omega) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega(P) + \xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} =$$

$$= \vec{a}_\Omega(P) + \vec{a}_O(P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega(P) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\Omega P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\Omega P}) =$$

$$= \vec{a}_\Omega(P) + \vec{a}_{trascinamento}$$

MOTO CON $\vec{a} = \vec{\text{cost}}$ (moto piano definito da $\vec{a}$ e da $\vec{v}_0$)

posto $\vec{a} \equiv (0, a)$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = \text{cost} \\ v_y = v_{0y} + a(t - t_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{1}{2} a \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (m = \text{cost}) \qquad \vec{q} = m\vec{v}$$

$$\vec{I}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\,dt = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 \qquad \begin{cases} \vec{p} = \vec{\Omega P} \times \vec{q} \\ \vec{m} = \vec{\Omega P} \times \vec{f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{f} = \dfrac{d\vec{q}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{dm}{dt}\vec{v} \\ \vec{m} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v}(\Omega) \times \vec{q} \end{cases}$$

$$dL = \vec{f}\cdot d\vec{s} \qquad L_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = K_2 - K_1$$

energia cinetica $= K = \frac{1}{2} m v^2$

FORZE CONSERVATIVE

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_1) - U(P_2) \qquad \vec{f} = -\text{grad}\, U$$

U = energia potenziale $\qquad U + K = \text{cost}$

FORZA ELASTICA IN UNA DIMENSIONE

$$f = -kx \qquad U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cost}$$

$$x = x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

PENDOLO SEMPLICE $\qquad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

FORZA VISCOSA

$$\left.\begin{cases} \text{forza viscosa} = -\beta\vec{v} \\ \text{forza esterna} = \vec{f} \end{cases}\right\} \vec{f} - \beta\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

se $\vec{f} = \vec{\text{cost}}$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) \\ v_y = \frac{f}{\beta} + \left(v_{0y} - \frac{f}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}\frac{m}{\beta}\left(1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right) \\ y = y_0 + \frac{f}{\beta}t + \frac{m}{\beta}\left(v_{0y} - \frac{f}{\beta}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right) \end{cases}$$

OSCILLATORE SMORZATO

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

si pone $\begin{cases}\gamma=\dfrac{\beta}{2m}\\ \Delta=\dfrac{\beta^2}{4m^2}-\dfrac{k}{m}\end{cases}$

- $\Delta=0$ $\quad x(t)=(A+Bt)\,e^{-\gamma t}$
- $\Delta>0$ $\quad x(t)=A\exp\left[(-\gamma-\sqrt{\Delta})t\right]+B\exp\left[(-\gamma+\sqrt{\Delta})t\right]$
- $\Delta<0$ $\quad x(t)=e^{-\gamma t}\left[(A+B)\cos\omega t+i(A-B)\operatorname{sen}\omega t\right]$

  con $\omega^2=\dfrac{k}{m}-\dfrac{\beta^2}{4m^2}$

A e B essendo due costanti di integrazione = condizioni al contorno

---

OSCILLATORE FORZATO

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=F\cos\omega t$$

$$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)$$

si pone $\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ Q=\sqrt{\dfrac{mk}{\beta^2}}\end{cases}$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{Q}\,\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$X=\frac{F}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\beta^2\omega^2}}=\frac{F}{\beta\omega\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$X(\omega=0)=\frac{F}{k}\qquad\qquad \frac{X_{max}}{X(\omega=0)}=Q\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\frac{1}{Q^2}}}$$

ATTRITO STATICO $\quad f_t\leq f_{max}=\mu_s N$

ATTRITO CINEMATICO $\quad \vec{f}_t=-\mu_c N\hat{v}$ $\qquad \mu_s>\mu_c$

RIFERIMENTI NON INERZIALI

FORZA FITTIZIA $=-m\,\vec{a}_{trascinamento}$

7

Dinamica dei sistemi

Notazioni

Per un sistema di punti materiali P_i si ha:

$$\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(i)} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\mathbf{M}^{(e)} + \mathbf{M}^{(i)} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{v}_\Omega \times \mathbf{Q}$$

$$L^{(e)} + L^{(i)} = K_{fin} - K_{in}$$

dove:

$\mathbf{F}^{(e)} = \sum_i \mathbf{f}_i^{(e)}$ è il risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema

$\mathbf{F}^{(i)} = \sum_i \mathbf{f}_i^{(i)}$ è il risultante delle forze interne che agiscono sul sistema

$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_i \mathbf{m}_i^{(e)}$ è il risultante dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema

$\mathbf{M}^{(i)} = \sum_i \mathbf{m}_i^{(i)}$ è il risultante dei momenti delle forze interne che agiscono sul sistema

$L^{(e)} = \sum_i L_i^{(e)}$ è la somma di tutti i lavori compiuti dalle singole forze esterne che agiscono sul sistema

$L^{(i)} = \sum_i L_i^{(i)}$ è la somma di tutti i lavori compiuti dalle singole forze interne che agiscono sul sistema

$\mathbf{Q} = \sum_i \mathbf{q}_i$ è detto *quantità di moto totale* del sistema

$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ è detto *momento totale della quantità di moto* o *momento angolare totale* del sistema

$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ è l'*energia cinetica totale del sistema* definita come somma delle energie cinetiche dei singoli punti costituenti il sistema

Terzo principio della dinamica

$\mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)} = 0$

da cui

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \qquad \mathbf{M}^{(e)} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{v}_\Omega \times \mathbf{Q}$$

Definizione del centro di massa

$$\mathbf{r}_c = \frac{\Sigma\, m_i\, \mathbf{r}_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{\Sigma\, m_i\, \mathbf{r}_i}{M}$$

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{M} \quad (M = \int dm)$$

Densità di massa (massa per unità di volume) $\rho = dm/d\tau$
da cui la massa dm dell'elemento di volume $d\tau$

$dm = \rho d\tau = \rho(x,y,z)dxdydz$

Nel caso che sia conveniente schematizzare il corpo come un sistema a due dimensioni (o ad una sola dimensione):

$dm = \sigma dS$, $\sigma =$ densità superficiale, $dS =$ elemento di superficie
($dm = \lambda dl$, λ = densità lineare, dl = elemento di linea)

Velocità $\mathbf{v}_c$ ed accelerazione $\mathbf{a}_c$ del centro di massa:

$$M\, \mathbf{v}_c = \sum_i m_i\, \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{q}_i = \mathbf{Q}$$

$$M\, \mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}$$

Il problema dei due corpi

Se due corpi interagiscono tra loro con una forza **f(R)** funzione della loro distanza **R** (orientata dal corpo 1 al corpo 2), si può assumere un riferimento con il corpo 1 fisso nell'origine, ed in esso studiare il moto del corpo 2 risolvendo l'equazione:

$$m\, d^2R/dt^2 = f(\mathbf{R})$$

dove m, detta massa ridotta, è funzione delle masse m_1 ed m_2 dei due corpi:

$$m = m_1 m_2/(m_1+m_2) \quad \text{ovvero } 1/m = 1/m_1 + 1/m_2$$

Sistemi a massa variabile

Un sistema materiale ha una massa M(t), che diminuisce nel tempo perché esso espelle nell'unità di tempo, una massa dM/dt. La massa M(t) si muove con velocità **V**(t) e la massa espulsa con una velocità **v**. La prima equazione cardinale si scrive:

$$\mathbf{F}^{(e)} = d\mathbf{Q}/dt = M(t)\, d\mathbf{V}/dt + dM/dt(\mathbf{V}-\mathbf{v})$$

Questa relazione è valida anche nel caso in cui il sistema riceva massa dall'ambiente, nel qual caso $dM/dt > 0$.

Sistemi rigidi

Un sistema rigido ha 6 gradi di libertà, quindi le equazioni cardinali sono sufficienti per determinarne il moto, una volta noti la risultante ed il momento risultante delle forze esterne. In particolare, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia in equilibrio è che $\mathbf{F}^{(e)} = 0$ ed $\mathbf{M}^{(e)} = 0$.

Moti rigidi

Se P è un punto generico di un sistema rigido, la sua velocità $\mathbf{v}_P$ può essere espressa come:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \times \Omega P$$

dove Ω è un punto qualunque del corpo ed ω è la velocità angolare del corpo nell'istante considerato, attorno all'asse istantaneo di rotazione passante per Ω, il cui valore è indipendente dalla coppia di punti P ed Ω.

Momento di inerzia rispetto ad un generico asse a

$$I_a = \int dm\, h^2$$

dove h è la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse *a*.

Teorema di Huygens-Steiner: se *c* è un asse passante per il centro di massa ed *a* un altro asse ad esso parallelo, e d la distanza tra di essi, si ha $I_a = I_c + Md^2$, dove M è la massa del sistema in esame.
Se un corpo rigido ruota attorno ad un asse *a* con velocità angolare ω:
la proiezione del momento della quantità di moto sull'asse *a* vale $P_a = I_a\,\omega$ e la sua energia cinetica vale $K = 1/2\, I_a\omega^2$

Moto del centro di massa ed attorno al centro di massa.

Momento angolare: $\mathbf{P} = \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_c + \mathbf{P}_c$ dove $\mathbf{r}_c$ e $\mathbf{v}_c$ sono posizione e velocità del centro di massa e $\mathbf{P}_c$ è il momento angolare relativo al moto attorno al centro di massa.
Energia cinetica: $K = 1/2Mv_c^2 + 1/2I_c\omega^2$, dove I_c ed ω sono momento di inerzia e velocità angolare rispetto all'asse istantaneo di rotazione passante per il centro di massa.

Moto di una ruota che rotola senza strisciare

$$\mathbf{v}_c = AC \times \omega$$

dove A è il punto della ruota a contatto con il piano di appoggio e C il centro della ruota.

Periodo di oscillazione di un pendolo fisico

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

dove $\omega = 2\pi/T$ è la pulsazione delle piccole oscillazioni, m la massa, I il momento di inerzia rispetto all'asse di oscillazione posto a distanza d dal centro di massa.

Urti

Conservazione della quantità di moto totale. In un urto tra corpi non vincolati

$$\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{01} + \mathbf{q}_{02}$$
$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_{01} + m_2 \mathbf{v}_{02}$$

Nel sistema del centro di massa

$$\mathbf{q}'_{01} = - \mathbf{q}'_{02} \qquad \mathbf{q}'_1 = - \mathbf{q}'_2$$

Urto elastico

$$q'_{01} = q'_{02} = q'_1 = q'_2$$

Urto elastico tra una sfera di raggio R_1 e velocità v_0 e una sfera ferma di raggio R_2

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{v_0}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2 \cos 2\alpha) \\ v_{1y} = \dfrac{v_0\, m_2}{m_1 + m_2} \sin 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2x} = \dfrac{v_0\, m_1}{m_1 + m_2} (1 - \cos 2\alpha) \\ v_{2y} = - \dfrac{v_0\, m_1}{m_1 + m_2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

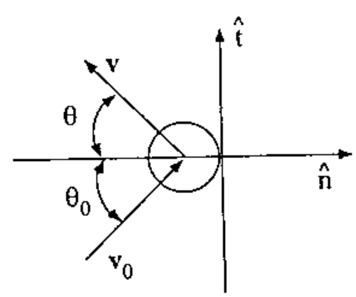
dove $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1 + R_2}$ con b = parametro d'urto

Urto elastico contro una parete

$\theta = \theta_0$ (specularità dell'urto)
$v = v_0$

$\mathbf{I}_s = -2mv_0 \cos\theta_0\, \hat{n}$ impulso subito dalla sfera

$\mathbf{I}_p = 2mv_0 \cos\theta_0\, \hat{n}$ impulso subito dalla parete



Urti anelastici

$K' = \varepsilon^2 K'_0$ ovvero $q'_1 = \varepsilon\, q'_{01}$

Momenti centrali di inerzia per alcuni solidi omogenei

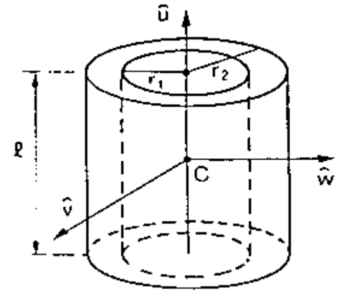
CILINDRO CAVO

$$I_u = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2)$$

$$I_v = I_w = \frac{1}{4} M (r_1^2 + r_2^2) + \frac{M l^2}{12}$$

N.B. A seconda del valore di r_1, r_2, l, queste stesse espressioni forniscono i momenti centrali di inerzia per:

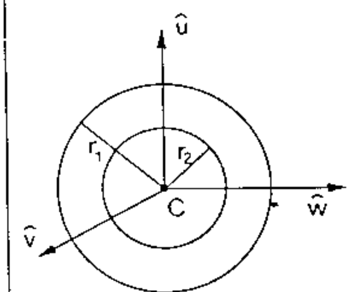
- cilindro pieno ($r_1 = 0$)
- sbarretta rettilinea ($r_1 = r_2 = 0$)
- disco ($r_1 = l = 0$)
- cerchio ($r_1 = r_2$; $l = 0$)



SFERA CAVA

$$I_u = I_v = I_w = \frac{2}{5} M (r_1^2 - r_2^2)$$

Per $r_2 = 0$ si ha la sfera omogenea piena.



PARALLELEPIPEDO

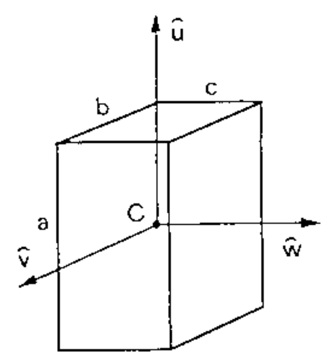
$$I_u = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_v = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

$$I_w = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

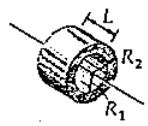
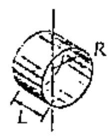
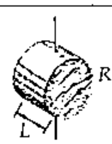
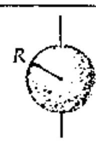
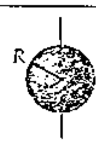
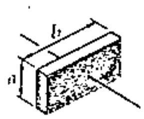
Per $a = b = c$ si ha il cubo $\left(I_u = I_v = I_w = \frac{M a^2}{6} \right)$

Per $a = 0$ si ha la piastra piana rettangolare.



13

Tabella 12.1. Momenti d'inerzia di corpi uniformi di varie forme.

Strato cilindrico rispetto all'asse		$I = MR^2$
Cilindro pieno rispetto all'asse		$I = \frac{1}{2} MR^2$
Cilindro cavo rispetto all'asse		$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$
Strato cilindrico rispetto a un diametro passante per il centro		$I = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$
Cilindro pieno rispetto a un diametro passante per il centro		$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$
Asta sottile rispetto a una perpendicolare passante per il centro		$I = \frac{1}{12} ML^2$
Asta sottile rispetto a una perpendicolare passante per un'estremità		$I = \frac{1}{3} ML^2$
Strato sferico sottile rispetto a un diametro		$I = \frac{2}{3} MR^2$
Sfera piena rispetto a un diametro		$I = \frac{2}{5} MR^2$
Parallelepipedo rettangolo pieno rispetto all'asse passante per il centro e perpendicolare alla faccia		$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$