

Quark

1. Il modello a quark

L'ipotesi fondamentale del modello a quark e' che i mesoni siano stati legati $q\bar{q}$ e i barioni stati legati qqq . Gli stati indicati con q , $\bar{q}$ sono chiamati *quark* e *antiquark*, e rappresentano un nuovo tipo di particella elementare, con proprieta' dinamiche e numeri quantici peculiari. In generale, si puo' quindi dire che i quark sono un nuovo livello di struttura della materia, nel quale tutti e soli gli stati legati sono del tipo descritto. Per ragioni non completamente chiarite, tutto sembra indicare che gli stati di quark non si possano manifestare nello stesso modo con cui si manifestano gli altri livelli di struttura, ossia attraverso proprieta' statiche e dinamiche (massa, momento angolare, carica elettrica, momento di dipolo magnetico, etc) direttamente accessibili nell'esperimento: in particolare, *non possono avvenire processi il cui risultato finale sia quello di creare quark liberi*, fatto in marcato contrasto con cio' che avviene ai livelli superiori di struttura (nucleoni, nuclei, atomi, molecole), e decisamente controintuitivo. Questa ipotesi tuttavia sembra in accordo con le caratteristiche essenziali dell' *interazione di colore* che agisce fra i quark (*QCD*, o *cromodinamica quantistica*, ritenuta oggi essere la teoria di campo dell'interazione forte), anche se non e' completamente motivata dalla *QCD* stessa: il punto centrale e' che si assume che tutti gli stati legati siano *singoletti di colore*, il che non e' dimostrato, in modo completo, esauriente e definitivo, essere una conseguenza delle proprieta' della *QCD* stessa. La situazione e' simile per alcuni aspetti a quella che si incontra in *QED*, dove la ricchissima fenomenologia degli stati condensati (molecole, cristalli, semiconduttori, superconduttori, molecole biologiche...), per quanto non in contrasto con la teoria fondamentale, non e' certo facilmente deducibile dalle proprieta' fondamentali dell'interazione elettromagnetica: in pratica, il quadro teorico in cui questi fenomeni vengono descritti richiede diverse ipotesi fenomenologiche aggiuntive, indipendenti dalla *QED*. Il problema e' che entrambe le teorie fondamentali sono molto ricche di conseguenze, e diventano difficili da applicare quando si considerino sistemi fisici a molti corpi; nel caso della *QCD*, il fenomeno della forte dipendenza della costante di accoppiamento dalla distanza complica ulteriormente il quadro.

2. L'ipotesi dei quark nel quadro di $SU(3)_F$

L'esistenza dei quark fu proposta inizialmente all'interno del modello a simmetria unitaria. In effetti, la cosa piu' stupefacente nel modello a simmetria unitaria e' che, a differenza del caso dell'isospin, non c'e' un'interpretazione fisica immediata per gli stati della rappresentazione fondamentale, $\mathbf{3}$ e $\mathbf{3}^*$, i cui autovalori, di ipercarica, come si ricordera', sono frazionari e non corrispondono a quelli di nessun adrone conosciuto. Pochi anni dopo l'introduzione di $SU(3)$, Gell-Mann e Zweig proposero una

interpretazione del tutto rivoluzionaria, ipotizzando che gli stati del tripletto fondamentale fossero effettivamente stati fisici, realizzati in un nuovo tipo di particella costituente, i quark appunto.

Questo brevissimo resoconto e' in realta' una grossolana sovrasemplificazione: per molto tempo resto' non chiarito se i quark fossero da interpretare come *particelle fisiche* o come *gradi di liberta'* della materia adronica, un po' come, in altro contesto, le lacune in un semiconduttore: esse si comportano sotto quasi tutti gli aspetti come se fossero particelle reali, ma, come e' noto, non lo sono. Un altro esempio, ancora piu' stupefacente, e' la formazione di stati di *quasi-particella* (i gradi di liberta' effettivi del sistema, come appunto elettroni e lacune in un semiconduttore) in sistemi a bassa dimensionalita', come il gas di elettroni bidimensionale ottenuto in giunzioni MOS sottili a bassa temperatura, quando queste sono immerse in campi magnetici: le quasi-particelle risultano addirittura a carica frazionaria! La prova decisiva sarebbe stata naturalmente quella di trovare un quark libero, ma questo non si e' mai verificato.

In base a questa ipotesi, tutti gli adroni (mesoni e barioni) sono stati composti: *i mesoni sono stati legati $q\bar{q}$ e i barioni sono stati legati qqq* . In questo modo, ci si attende, nel quadro di $SU(3)_F$, che gli adroni siano raggruppati nelle rappresentazioni prodotto $3 \times 3^*$ e $3 \times 3 \times 3$, che si scompongono nelle somme dirette:

$$\begin{array}{ll} \text{mesoni} & 3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \\ \text{barioni} & 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \end{array}$$

I multipletti unitari cosi' attesi coincidono quindi con quelli osservati (come visto prima, ammesso che si sia disposti a concedere la definizione di multipletto a famiglie di particelle di massa anche notevolmente diversa). E' da notare che, a questo livello, non si fa nessuna ipotesi sul meccanismo dinamico (se esiste) all'origine della simmetria, e dello spettro di massa degli adroni: in particolare, non si spiega perche' altre configurazioni di quark non formino stati legati. Tuttavia, viene per la prima volta spiegato (sia pure con un'assunzione non ben motivata) *perche' si osservano solo alcune delle rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$, e non altre*.

Occorre far notare come, nell'ambito della teoria oggi accettata per l'interazione forte, la cromodinamica quantistica, l'interpretazione di mesoni e barioni come stati legati $q\bar{q}$ e qqq , rispettivamente, non sia legata all'esistenza di una simmetria approssimata – e solo accidentale – $SU(3)_F$, ma a quella di una simmetria esatta $SU(3)_C$ di natura fondamentale, unita all'ipotesi che gli stati adronici osservati siano sempre e solo *singoletti di colore*

In piu' di un senso, questo progresso ha qualche rassomiglianza con l'interpretazione della tavola periodica in termini di atomi dotati di una *struttura interna*: la complicazione e varieta' di cio' che si osserva (composto) nasconde la semplicita' e la

sostanziale quasi-unicita' di cio' che non si puo' osservare direttamente (costituenti). Bisogna ribadire subito che *l'identificazione originale dei 3 quark leggeri con gli stati del multipletto fondamentale $\mathbf{3}$ di $SU(3)_F$ (inteso come gruppo di simmetria dei 3 flavor leggeri) da tempo non e' piu' considerata di importanza fondamentale*: oggi si pensa che tutte le simmetrie di flavor (gruppi $SU(N)_F$, a partire dall'isospin..), per altro sempre approssimate, siano, come gia' accennato, originate accidentalmente dalla relativa piccolezza della massa dei quark piu' leggeri rispetto alla scala di energia delle interazioni forti, e non dovute alle proprieta' dell' interazione di colore fra i quark. Conseguentemente, data la lagrangiana della QCD (con l'ipotesi aggiuntiva del confinamento del colore) e le proprieta' dei costituenti fondamentali (masse e numeri quantici dei quark, diversi dei quali *non* sono definiti dalla struttura della QCD), deve essere in principio possibile predire l'esistenza, il numero e le caratteristiche degli stati legati, senza assunzioni ad hoc su simmetrie di flavor. In pratica, questo programma si rivela molto difficile, data l'estrema complicazione e ricchezza della teoria stessa, e per confrontare le previsioni di QCD con i dati sperimentali sugli stati legati (spettroscopia adronica) vengono fatte varie ipotesi aggiuntive.

3. Numeri quantici dei quark leggeri

Quando i quark furono proposti, si supponeva che ne esistessero di 3 tipi, o *flavor*: questo era consistente con la conoscenza della zoologia adronica allora disponibile. I numeri quantici attribuiti ai quark leggeri sono:

<i>Tipo</i>	<i>Spin</i>	<i>Q</i>	<i>B</i>	<i>S</i>	<i>Y</i>	<i>I</i>	<i>I₃</i>
Up	$\frac{1}{2}$	2/3	1/3	0	1/3	1/2	+1/2
Down	$\frac{1}{2}$	-1/3	1/3	0	1/3	1/2	-1/2
Strange	$\frac{1}{2}$	-1/3	1/3	-1	-2/3	0	0

in accordo con la relazione di Gell-Mann e Nishijima $Q = I_3 + Y/2$. Questi numeri quantici sono quelli della rappresentazione fondamentale (multipletto) $\mathbf{3}$ di $SU(3)_F$. Il multipletto coniugato $\mathbf{3}^*$ contiene gli antiquark, con numeri quantici opposti a quelli dei quark (si noti che l'attribuzione della 3^a componente dell'isospin agli antiquark viene fatta secondo la stessa regola usata per gli antinucleoni).

Isospin di antinucleoni e antiquark

Gli stati di isospin per u e d sono gli stessi di quelli del nucleone:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per questi stati vale come sempre la formula di Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{B}{2}$$

Se vogliamo mantenere la validita' di questa formula anche per gli antiquark, troviamo

$$Q(\bar{u}) = -\frac{2}{3} = I_3(\bar{u}) + \frac{B(\bar{u})}{2} = I_3(\bar{u}) - \frac{1}{6} \rightarrow I_3(\bar{u}) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$Q(\bar{d}) = +\frac{1}{3} = I_3(\bar{d}) + \frac{B(\bar{d})}{2} = I_3(\bar{d}) - \frac{1}{6} \rightarrow I_3(\bar{d}) = +\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = +\frac{1}{2}$$

Quindi gli autostati degli antiquark sono scambiati di posto rispetto a quelli dei quark. C'e' un'ulteriore differenza: la fase di uno dei 2 stati e' opposta a quella dell'altro. Questo e' necessario perche' sia possibile ruotare gli stati di antiquark con le stesse matrici di isospin usate per gli stati di quark, come richiesto quando si combinano stati q e $\bar{q}$ Esempio:

Rotazione di θ attorno all'asse 2

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{-i\tau_2\theta/2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)u - \sin(\theta/2)d \\ \sin(\theta/2)u + \cos(\theta/2)d \end{pmatrix}$$

Ora trasformiamo i quark in antiquark con l'operazione di coniugazione di carica; viene:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = e^{-i\tau_2\theta/2} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\bar{u} - \sin(\theta/2)\bar{d} \\ \sin(\theta/2)\bar{u} + \cos(\theta/2)\bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)\bar{u} + \cos(\theta/2)\bar{d} \\ \cos(\theta/2)\bar{u} - \sin(\theta/2)\bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\bar{d} + \sin(\theta/2)\bar{u} \\ -\sin(\theta/2)\bar{d} + \cos(\theta/2)\bar{u} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\bar{d} - \sin(\theta/2)(-\bar{u}) \\ -\sin(\theta/2)\bar{d} - \cos(\theta/2)(-\bar{u}) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\bar{d} - \sin(\theta/2)(-\bar{u}) \\ \sin(\theta/2)\bar{d} + \cos(\theta/2)(-\bar{u}) \end{pmatrix}$$

Quindi l'antidoppio viene ruotato con le stesse matrici se e' definito come:

$$\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

La relazione di Gell-Mann e Nishijima trova quindi un'interpretazione piu' soddisfacente nel modello a quark, almeno nella misura in cui i numeri quantici interessati, *tutti additivi*, risultano per ogni adrone la somma di quella dei quark costituenti. Giova tuttavia ripetere che l'attribuzione dei numeri quantici di isospin e ipercarica nell'ambito di $SU(3)_F$ (o di una sua versione con piu' o meno dimensioni) deve essere considerata a carattere puramente circostanziale (leggi: non fondamentale). Carica e numero barionico sono come si vede frazionari, e tale caratteristica rimane vera anche nel modello standard: di fatto, le proprieta' dell'interazione elettrodebole o di quella di colore non aggiungono o tolgono nulla alle leggi di conservazione di carica elettrica e numero barionico.

4. Struttura a quark degli adroni leggeri

In linea di principio, ci aspettiamo dunque di osservare un gran numero di stati, di tipo mesonico e barionico, derivanti dal legame forte fra i quark di 6 flavor diversi. E' interessante quindi cercare di ricostruire dai dati sperimentali quale sia la struttura a quark degli adroni; per questo scopo, si puo' cominciare da quelli piu' leggeri.

Prima di vedere cosa succede con i 3 quark, u, d, s , dobbiamo pero' sottolineare un punto estremamente importante: *dal punto di vista dell'interazione forte, tutti i quark sono esattamente uguali. Quindi, i 6 (flavor) $\times 3$ (colori) = 18 tipi di quark vengono considerati come 18 possibili stati di una sola particella fondamentale, il quark appunto.* Questa situazione e' l'estensione dell'idea di particella identica al nuovo e particolare livello di struttura rappresentato dai costituenti degli adroni: come sappiamo, due elettroni sono considerati esattamente identici e indistinguibili, potendo inoltre trovarsi in due stati di spin (up e down). Similmente, due quark sono considerati esattamente identici e indistinguibili, potendo tuttavia trovarsi in diversi stati di flavor e colore, oltre che di spin.

Questa analogia richiede un' importante precisazione: per i quark, ai diversi stati di flavor corrispondono altrettanti valori di massa, proprieta' certamente rilevante anche nel determinare gli effetti dell'interazione forte. Questo sembra contraddire l'affermazione precedente, secondo cui i diversi quark sono solo i possibili stati di un'unica particella. La situazione e' tuttavia del tutto analoga al caso di un elettrone permanentemente confinato entro un cristallo: sarebbe impossibile per esso definire un valore assoluto di massa a riposo, e quel che potremmo definire sarebbe solo una massa che dipende dal suo stato dinamico, che si chiama in questo caso *massa efficace*. Nondimeno, una popolazione di elettroni permanentemente confinata entro il cristallo viene considerata un insieme di fermioni identici, pur se le loro masse efficaci sono diverse a causa delle interazioni con il campo cristallino. L'origine delle diverse masse dei quark e' dovuta, si pensa, all'interazione con il campo di Higgs dell'interazione elettrodebole, che in questo senso gioca un ruolo equivalente all'interazione con il campo cristallino, e, cosi' come quest'ultima, deve essere considerata non rilevante nel fissare la proprieta' fondamentale di assoluta identita' fra i quark.

Mesoni

Con 3 quark e 3 antiquark, ci aspettiamo $3 \times 3 = 9$ stati legati:

$$u\bar{d}, u\bar{s}, u\bar{u}, d\bar{u}, d\bar{s}, d\bar{d}, s\bar{u}, s\bar{d}, s\bar{s}$$

Si prevedono allora per tutti questi stati i seguenti numeri quantici:

Stato	Q	I_3	I	S	Note	$J^{PC}=0^{++}$	$J^{PC}=1^{--}$	$J^{PC}=2^{--}$
$u\bar{d}$	+1	+1/2	1/2	0		π^+	ρ^+	a_2^+
$u\bar{s}$	+1	+1/2	1/2	+1		K^+	K^{+*}	K^{+**}
$u\bar{u}$	0	0	0,1	0	<i>I-spin non definito</i>	π^0, η, η'	ρ^0, ω, φ	a_2^0, f_2, f_2'
$d\bar{u}$	-1	-1/2	1/2	0		π^-	ρ^-	a_2^-
$d\bar{s}$	0	-1/2	1/2	+1		$\bar{K}^0$	$\bar{K}^{0*}$	$\bar{K}^{0**}$
$d\bar{d}$	0	0	0,1	0	<i>I-spin non definito</i>	π^0, η, η'	ρ^0, ω, φ	a_2^0, f_2, f_2'
$s\bar{u}$	-1	-1/2	1/2	-1		K^-	K^{-*}	K^{-**}
$s\bar{d}$	0	+1/2	1/2	-1		K^0	K^{0*}	K^{0**}
$s\bar{s}$	0	0	0,1	0	<i>I-spin non definito</i>	π^0, η, η'	ρ^0, ω, φ	a_2^0, f_2, f_2'

Si osservi come, nel caso dei mesoni, non si presenti mai il caso di stati contenenti quark identici. Quindi, ci aspettiamo *nonetti* di stati mesonici con dati spin-parita': la corrispondenza con gli stati fisici osservati e' indicata nelle ultime 3 colonne, e come si vede e' straordinariamente buona. Il pattern delle masse e' in realta' relativamente complicato, tuttavia si osserva (v. tavole PDG) che c'e' una generale tendenza delle masse a crescere con J , come ci si attende intuitivamente (maggiore momento angolare, maggiore energia di rotazione)

Se assumiamo la validita' di $SU(3)_F$, i nonetti risultano raggruppati nei multipletti unitari:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

Nell'ambito di $SU(3)_F$ gli stati a I-spin non definito, essendo uguali gli altri numeri quantici, si possono sovrapporre per formare stati fisici a I-spin definito: il modo per farlo e':

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Occorre dire che, degli stati cosi' formati, i 2 singoletti di isospin non coincidono esattamente ancora con gli stati fisici, perche' questi ultimi risultano da un ulteriore

mescolamento; questo fenomeno trova una sua parziale spiegazione sempre nell'ambito di $SU(3)_F$

Per ciò che riguarda i numeri quantici "meccanici", ossia J^{PC} , ci aspettiamo il seguente pattern per coppie fermione-antifermione:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

$$P = (-1)^{l+1}$$

$$C = (-1)^{l+s}$$

$$\text{Stato fondamentale } L = 0 \rightarrow J = S$$

$$\text{Singoletti} \rightarrow J = 0 \rightarrow P = -1, C = +1 \rightarrow J^{PC} = 0^{-+}$$

$$\text{Triplette} \rightarrow J = 1 \rightarrow P = -1, C = -1 \rightarrow J^{PC} = 1^{--}$$

Quindi ci aspettiamo un nonetto di mesoni pseudoscalari e uno di mesoni vettoriali, in accordo con le osservazioni. Gli stati con spin > 1 richiedono per essere descritti l'introduzione dei gradi di libertà orbitali

Si può ricordare infine che la zoologia mesonica viene molto arricchita dai 3 quark pesanti, con il numero di stati legati che cresce a valanga, a causa delle molte nuove combinazioni quark-antiquark che si presentano

Barioni

Ci aspettiamo in totale $3 \times 3 \times 3 = 27$ stati costruiti con i 3 quark leggeri. La decifrazione dei barioni in termini di stati di 3 quark risulta più complicata di quella dei mesoni.

La ragione è sostanzialmente questa: nell'approssimazione a "quark di valenza", i barioni sono stati a 3 corpi: ci sono quindi 2 momenti angolari orbitali, p.es. quello della coppia 1-2 e quello relativo della coppia e del terzo quark. Tralasciando queste complicazioni, possiamo, per semplicità, considerare lo stato fondamentale, che è quello in cui si pensa non ci sia momento angolare orbitale: allora lo spin dello stato proviene solo dallo spin dei 3 quark.

Dal punto di vista del gruppo delle rotazioni, lo stato di un quark appartiene alla rapp. irr. $\mathbf{2}$ (avendo spin $1/2$); quindi lo stato di 3 quark appartiene alla rappresentazione prodotto, che si scompone:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2}_S \oplus \mathbf{2}_A$$

Consideriamo ora la parte di flavor della funzione d'onda: lo stato dovrà appartenere a una delle rapp. irr. in cui si scompone il prodotto diretto:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_S \oplus \mathbf{8}_A \oplus \mathbf{10}$$

Per la costruzione delle funzioni d'onda dei barioni, dobbiamo considerare la simmetria delle rappresentazioni rispetto a scambio di 2 quark qualsiasi:

Flavor	Simmetria	Spin	Simmetria
10_S	S	4_S	S
$8_{M,S}$	<i>n.a.; simmetrico 1-2</i>	$2_{M,S}$	<i>n.a.; simmetrico 1-2</i>
$8_{M,A}$	<i>n.a.; antisimmetrico 1-2</i>	$2_{M,A}$	<i>n.a.; antisimmetrico 1-2</i>
1_A	A		

S = *simmetrico*

A = *antisimmetrico*

M = *a simmetria non definita*

Sia per lo spin, sia per il flavor il pedice M indica che la rappresentazione non ha simmetria definita per scambio di 2 quark qualunque; essa e', rispettivamente, Simmetrica o Antisimmetrica per scambio dei primi due quark quando il pedice e' indicato come M,S o M,A .

Consideriamo il prodotto diretto delle rappresentazioni $SU(3) \times SU(2)$ (ossia, flavor e spin): otteniamo cosi' i prodotti segnati nella tabella, per ognuno dei quali e' indicata la proprieta' di simmetria per scambio dei primi 2 quark:

	10_S	$8_{M,S}$	$8_{M,A}$	1_A
4_S	$(10,4) S$	$(8,4) M$	$(8,4) M$	$(1,4) A$
$2_{M,S}$	$(10,2) M$	$(8,2) M$	$(8,2) M$	$(1,2) M$
$2_{M,A}$	$(10,2) M$	$(8,2) M$	$(8,2) M$	$(1,2) M$

Decupletto e singoletto

Si osserva immediatamente che per gli stati a spin 3/2 si prevedono 1 decupletto $SU(3)$ simmetrico e un singoletto antisimmetrico: siamo perciò condotti a identificare il decupletto osservato dei barioni a spin 3/2 come un multipletto con funzione d'onda totale simmetrica; d'altra parte non abbiamo un'identificazione immediata per il singoletto a spin 3/2, unico con funzione d'onda totale antisimmetrica! Questo e' in chiaro conflitto con il principio di Pauli, e indica che la nostra descrizione degli stati di quark e' come minimo incompleta.

Ottetti

Abbiamo viceversa qualche problema a identificare l'ottetto dei barioni a spin $\frac{1}{2}$, a causa delle complicazioni nella struttura dei multipletti a simmetria mista. Segue una discussione il piu' possibile semplificata della situazione.

Multipletti a simmetria mista

I prodotti di rappresentazioni a simmetria mista sono un po' piu' complicati da interpretare per cio' che riguarda la proprieta' di simmetria rispetto a scambio di 2 quark. Per chiarezza, si riporta un sommario:

Stiamo considerando un insieme di 3 particelle, che possono stare in 2 stati (spin) e in 3 stati (flavor): abbiamo dunque $2^3=8$ stati per lo spin, e $3^3=27$ stati per il flavor. Il modo piu' rigoroso di procedere sarebbe quello di considerare le rappresentazioni di S_3 , gruppo delle permutazioni di 3 oggetti, e la loro parita'. Senza insistere ora sulla loro dimostrazione, i risultati sono i seguenti:

Spin

Stati di 3 quark, non simmetrizzati:

$\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow$
 $\uparrow\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\uparrow$
 $\uparrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow\uparrow$

Come per le funzioni d'onda degli elettroni in un atomo, vogliamo da questi costruire gli stati di spin a simmetria definita per scambio; otteniamo:

4 stati completamente simmetrici	$\chi_S^{(i)}, i = 1, 4$
2 stati antisimmetrici per scambio 1-2	$\chi_{A12}^{(i)}, i = 1, 2$
2 stati antisimmetrici per scambio 2-3	$\chi_{A23}^{(i)}, i = 1, 2$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} |3/2, +3/2\rangle &= (\uparrow\uparrow\uparrow), \quad |3/2, -3/2\rangle = (\downarrow\downarrow\downarrow) \\ |3/2, +1/2\rangle &= 1/\sqrt{3}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow), \quad |3/2, -1/2\rangle = 1/\sqrt{3}(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow) \\ |1/2, +1/2\rangle_A &= 1/\sqrt{2}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow, \quad |1/2, -1/2\rangle_A = 1/\sqrt{2}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\downarrow \\ |1/2, +1/2\rangle_S &= 1/\sqrt{2}\uparrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow), \quad |1/2, -1/2\rangle_S = 1/\sqrt{2}\downarrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \end{aligned}$$

Si possono definire anche 2 stati antisimmetrici 1-3, che sono combinazioni lineari degli altri a simmetria mista

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow), \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)$$

Flavor

Stati di 3 quark, non simmetrizzati rispetto a operazioni di scambio di quark:

uuu, ddd, sss
 $uud, udu, duu, uus, usu, suu$
 $ddu, dud, udd, dds, dsd, sdd$
 $ssu, sus, uss, ssd, sds, dss$
 $usd, uds, sdu, sud, dus, dsu$

Analogamente al caso dello spin, vogliamo costruire stati a simmetria definita per scambio. Troviamo:

10 stati completamente simmetrici $\varphi_s^{(i)}, i = 1, 10$

$$uuu, ddd, sss$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd), \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu),$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd), \frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu),$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssd + sds + dss), \frac{1}{\sqrt{3}}(ssu + sus + uss)$$

1 stato completamente antisimmetrico φ_A

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu)$$

8 stati antisimmetrici 1-2 $\varphi_{A12}^{(i)}, i = 1, 8$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d, \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)d, \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)s,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)u, \frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)s,$$

$$\frac{1}{2}[(us - su)d + (ds - sd)u],$$

$$\frac{1}{\sqrt{12}}[2(ud - du)s + (us - su)d - (ds - sd)u]$$

8 stati antisimmetrici 2-3 $\varphi_{A23}^{(i)}, i = 1, 8$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} d(ud - du), \frac{1}{\sqrt{2}} u(ud - du), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} d(ds - sd), \frac{1}{\sqrt{2}} s(ds - sd), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} u(us - su), \frac{1}{\sqrt{2}} s(us - su), \\ & \frac{1}{2} [d(us - su) + u(ds - sd)], \\ & \frac{1}{\sqrt{12}} [2s(ud - du) + d(us - su) - u(ds - sd)] \end{aligned}$$

Questi due gruppi di 8 stati sono indipendenti, ossia non si possono ottenere come combinazione lineare gli uni degli altri. Anche qui si possono definire 8 altri stati che sono antisimmetrici 1-3, che sono però combinazioni lineari di quelli riportati sopra $\varphi_{A13}^{(i)}, i = 1, 8$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (udd - ddu), \frac{1}{\sqrt{2}} (uud - duu), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (dds - sdd), \frac{1}{\sqrt{2}} (dss - ssd), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (uus - suu), \frac{1}{\sqrt{2}} (uss - ssu), \\ & \frac{1}{2} [(uds - sdu) + (dus - sud)], \\ & \frac{1}{\sqrt{12}} [2(usd - dsu) + (uds - sdu) - (dus - sud)] \end{aligned}$$

Invece dei 3 gruppi di 8 stati parzialmente antisimmetrici, si possono costruire 3 gruppi di 8 stati parzialmente simmetrici, che non sono però indipendenti dagli altri 3: nell'insieme, si possono costruire solo 2 ottetti indipendenti

Si noti che i membri di ogni ottetto si dividono naturalmente in 2 gruppi:

- 6 stati contenenti 2 quark nello stesso stato di flavor
- 2 stati contenenti 1 quark per ogni stato di flavor

*Spin*Flavor*

Se richiediamo che la funzione d'onda *spin*flavor* sia globalmente simmetrica o antisimmetrica per scambio di 2 quark qualunque, possiamo procedere così:

i prodotti

$$\begin{aligned} \varphi_{A12}^{(i)} \chi_{A12}^{(i)}, i=1,8 & \quad \varphi_{A23}^{(i)} \chi_{A23}^{(i)}, i=1,8 & \quad \varphi_{A13}^{(i)} \chi_{A13}^{(i)}, i=1,8 \\ \varphi_{S12}^{(i)} \chi_{S12}^{(i)}, i=1,8 & \quad \varphi_{S23}^{(i)} \chi_{S23}^{(i)}, i=1,8 & \quad \varphi_{S13}^{(i)} \chi_{S13}^{(i)}, i=1,8 \end{aligned}$$

sono individualmente simmetrici per scambio delle coppie indicate; quindi le 8 somme

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\varphi_{A12}^{(i)} \chi_{A12}^{(i)} + \varphi_{A23}^{(i)} \chi_{A23}^{(i)} + \varphi_{A13}^{(i)} \chi_{A13}^{(i)} \right), i=1,8$$

oppure

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\varphi_{S12}^{(i)} \chi_{S12}^{(i)} + \varphi_{S23}^{(i)} \chi_{S23}^{(i)} + \varphi_{S13}^{(i)} \chi_{S13}^{(i)} \right), i=1,8$$

costituiscono due ottetti di stati globalmente simmetrici rispetto allo scambio di 2 quark qualsiasi; i due ottetti non sono indipendenti. Viceversa, e' possibile costruire due ottetti di stati globalmente antisimmetrici, anch'essi non fra loro indipendenti. Il fattore $\sqrt{2}/3$ garantisce la normalizzazione .

Possiamo ora confrontare le previsioni del modello a quark con i multipletti osservati sperimentalmente.

Spin 3/2

Per gli stati a spin 3/2 (spin-simmetrici, visto che assumiamo una parte orbitale simmetrica, che deriva teoricamente dalla naturalezza dell'onda S per lo stato fondamentale di qualunque sistema legato non patologico, e sperimentalmente, p.es., dalla mancanza di nodi nel fattore di forma e.m. del protone), il principio di Pauli porterebbe a richiedere una parte di flavor totalmente antisimmetrica, come visto sopra: saremmo allora portati a prevedere un solo stato di flavor con spin 3/2, contrariamente ai dati sperimentali che ci indicano un decupletto di stati, come previsto da una funzione d'onda flavor-simmetrica. Questo e', fino a qui, un problema molto serio del modello a quark

Spin $\frac{1}{2}$

Per gli stati a spin $\frac{1}{2}$, prevediamo due ottetti, uno globalmente simmetrico e uno antisimmetrico per scambio: in questo caso, non abbiamo molti elementi sperimentali per decidere con quale dei 2 identificare gli 8 barioni a spin $\frac{1}{2}$. Tuttavia, e' ragionevole assumere che la proprieta' di simmetria globale non possa dipendere da quale multipletto consideriamo: quindi siamo portati ad identificare

gli 8 barioni a spin $\frac{1}{2}$ con l'ottetto globalmente simmetrico, ritrovandoci con lo stesso problema del decupletto.

Esiste una estensione del modello a quark, basata sulla simmetria $SU(6)$, nella quale lo stato di ogni quark e' fissato, indipendentemente da quello degli altri due, da $SU(3)$ per il flavor e $SU(2)$ per lo spin: il significato di questa simmetria e' quello di considerare *perfettamente equivalenti tutte le combinazioni lineari* dei 6 stati base (3 flavor * 2 spin), dal punto di vista dell'interazione forte. Si osservi che questo e' piu' forte del postulare invarianza rispetto alla simmetria prodotto $SU(3)*SU(2)$, visto che in quest'ultima, per esempio, una data rotazione della funzione d'onda di spin sarebbe la stessa per tutte le combinazioni di flavor. In questo modello, lo stato di un barione e' dato dal prodotto tensoriale:

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 20 \oplus 56 \oplus 70 \oplus 70$$

Nella decomposizione, la rappresentazione **20** e' antisimmetrica, la **56** e' simmetrica e le due **70** sono miste. Ora, in termini di flavor e spin la **56** e':

$$56 = \underbrace{\{8, 1/2\}}_{16 \text{ stati}} \oplus \underbrace{\{10, 3/2\}}_{40 \text{ stati}}$$

quindi contiene l'ottetto a spin $\frac{1}{2}$ e il decupletto a spin $\frac{3}{2}$, perfettamente in accordo con i dati sperimentali. Poiche' come ricordato, la rappresentazione 56 e' completamente simmetrica, in questo modello l'ottetto deve essere simmetrico come il decupletto.

Il limite di $SU(6)$ e' che tratta lo spin come una quantita' del tutto autonoma, mentre come sappiamo la quantita' che viene conservata, relativisticamente, e' il momento angolare totale (orbitale+spin), la cui separazione nelle due componenti non e' invariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi questo modello di simmetria e' un modello non relativistico, come se si applicasse al caso di quark molto pesanti, che si muovono di moto non relativistico: ma visto che i quark non saltano fuori dagli adroni in alcun processo forte, siamo portati ad assumere (in realta' erroneamente, come poi scopriremo: il meccanismo di legame e' assai piu' sottile di quel che possiamo supporre adesso) che siano legati da un campo di forze, tale da ridurre fortemente la loro massa a riposo nello stato legato (come se, in una specie di super-deutone, protone e neutrone avessero una massa efficace molte volte inferiore alla somma delle loro masse libere): sarebbero allora totalmente relativistici....

Altri multipletti

Dei 27 stati indipendenti, in questo modo restano per ora non assegnati un ottetto antisimmetrico in spin*flavor, e un singoletto antisimmetrico per flavor, senza prescrizioni sullo spin. Questi multipletti si possono identificare con un ottetto e un singoletto di stati barionici risonanti con $J^P=3/2^-$, nei quali e' eccitato anche il

grado di liberta' orbitale ($L>0$): la simmetria o antisimmetria per scambio e' quindi piu' difficile da prevedere a priori in questi casi.

Riassumendo: siamo portati a prevedere 1 decupletto, 2 ottetti e 1 singoletto. Il decupletto e uno degli ottetti, identificati con gli stati fondamentali dei barioni a spin $3/2$ e $\frac{1}{2}$, sono globalmente simmetrici in spazio*spin*flavor: questo fatto costituisce, come accennato sopra, il secondo dei due problemi piu' seri del modello a quark, il primo essendo la non osservazione sperimentale dei costituenti come particelle libere. L'altro ottetto e il singoletto si possono identificare con stati a massa e spin piu' elevati (risonanze barioniche)

Risulta cosi' la seguente tabella di funzioni d'onda di flavor per gli stati fondamentali dei barioni

Decupletto

Stato	Q	I_3	I	S	$J^P=3/2^+$
uuu	$+2$	$+3/2$	$3/2$	0	Δ^{++}
$1/\sqrt{3}(uud + udu + duu)$	$+1$	$+1/2$	$3/2$	0	Δ^+
$1/\sqrt{3}(udd + dud + duu)$	0	$-1/2$	$3/2$	0	Δ^0
ddd	-1	$-1/2$	$3/2$	0	Δ^-
$1/\sqrt{3}(uus + usu + suu)$	$+1$	$+1$	1	-1	Σ^{*+}
$1/\sqrt{6}(uds + sud + dsu + sdu + dus + usd)$	0	0	1	-1	Σ^{*0}
$1/\sqrt{3}(dds + +dsd + sdd)$	-1	-1	1	-1	Σ^{*-}
$1/\sqrt{3}(uss + sus + ssu)$	0	$+1/2$	$1/2$	-2	Ξ^{*0}
$1/\sqrt{3}(dss + sds + ssd)$	-1	$-1/2$	$1/2$	-2	Ξ^{*-}
sss	-1	0	0	-3	Ω^-

Ottetto

NB Non sono indicate le funzioni d'onda di flavor, ma solo il contenuto in quark

Contenuto	Q	I_3	I	S	$J^P=1/2^+$
uud	$+1$	$+1/2$	$1/2$	0	p
udd	0	$-1/2$	$1/2$	0	n
dds	-1	-1	1	-1	Σ^-
uds	0	0	$1,0$	-1	Σ^0, Λ^0
uus	$+1$	$+1$	1	-1	Σ^+
dss	-1	$-1/2$	$1/2$	-2	Ξ^-
uss	0	$+1/2$	$1/2$	-2	Ξ^0

Come esempio di funzione d'onda di spin-flavor cosi' costruita, possiamo considerare il seguente, che descrive un protone a spin up

$$|p, +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2u\uparrow u\uparrow d\downarrow + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow + 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - \\ -u\downarrow d\uparrow u\uparrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow - \\ -d\uparrow u\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow \end{pmatrix}$$

5. I quark pesanti

Anche per i barioni, la scoperta di tre nuovi flavor pesanti porta a prevedere l'esistenza di un gran numero di nuovi stati legati, la maggior parte dei quali non e' mai stata osservata a causa delle grandi difficolta' sperimentali. Infatti, col passare del tempo furono osservati sperimentalmente altri 3 tipi, o flavor, di quark, *charm*, *bottom* e *top*: oggi conosciamo dunque 6 flavor di quark, le cui proprieta' salienti, *dal punto di vista dell'interazione forte*, sono riassunte di seguito: si noti che in quanto si pensa che essi costituiscano (in triplice copia!) la rappresentazione fondamentale di un altro gruppo di simmetria, quello delle interazioni elettrodeboli, e' in realta' conveniente riassumere i loro numeri quantici in modo diverso (v. in seguito)

<i>Tipo</i>	<i>Massa</i>	<i>Q</i>	<i>I</i>	<i>I₃</i>	<i>S</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>T</i>
Up	5.6 MeV	2/3	$\frac{1}{2}$	+1/2	0	0	0	0
down	9.9 MeV	-1/3	$\frac{1}{2}$	-1/2	0	0	0	0
strange	199 MeV	-1/3	0	0	1	0	0	0
charm	1350 MeV	2/3	0	0	0	1	0	0
bottom	4400 MeV	-1/3	0	0	0	0	1	0
Top	174 GeV	2/3	0	0	0	0	0	1

Tutti i quark hanno spin 1/2 e numero barionico 1/3. Le masse riportate nella tabella sono le masse dei cosiddetti *quark correnti*, ossia quelle che i quark avrebbero se potessero essere osservati come particelle libere, e quindi devono essere considerate come valori limiti asintotici; sono anche, con qualche approssimazione, le masse che compaiono nelle correnti elettrodeboli nei processi ad elevato q^2 . All'interno di uno stato legato (adrone), i quark acquistano, in conseguenza della interazione forte e del confinamento, una massa efficace che puo' essere (per i 3 quark piu' leggeri) anche molto diversa da quella citata prima: e' un fenomeno analogo a quello per cui un elettrone in un solido ha una massa efficace diversa dalla sua massa a riposo. Questa e' la massa dei *quark costituenti*.

6. Positronio

Come anticipato, i mesoni sono stati legati quark-antiquark. In questo senso essi hanno alcune proprietà in comune con gli stati del sistema e^+e^- (legato elettromagneticamente), noto come *positronio*. Per la dinamica di questo sistema, è interessante accennare a come si possa passare da una descrizione totalmente covariante a un'approssimazione a potenziale, che può essere usata in una equazione di Schrodinger: poiché lo stesso tipo di approssimazioni possono essere fatte, entro certi limiti, per l'interazione forte fra quark, segue un breve accenno al problema.

Positronio – Livelli energetici, numeri quantici, regole di selezione.

La fisica del positronio è simile a quella dell'atomo di idrogeno: l'interazione elettromagnetica viene descritta in prima approssimazione dal potenziale coulombiano, al quale si aggiungono varie correzioni. Il sistema è intrinsecamente relativistico, data la piccola massa di entrambi i costituenti, tuttavia è possibile ottenere una descrizione approssimata in termini di un hamiltoniano efficace, detto di *Breit-Fermi*, che si può usare nell'equazione di Schrodinger non relativistica. La procedura è concettualmente semplice, ma pesante algebricamente; volendo riassumere per sommi capi la situazione, si procede così:

Considerazioni preliminari

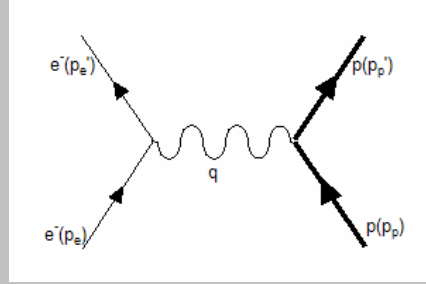
La descrizione (classica) dell'interazione elettromagnetica fra un sistema di cariche richiede, come è noto, che sia preso in conto anche il campo elettromagnetico *in quanto sistema fisico a se' stante*, con tutti i suoi (infiniti) gradi di libertà: in altre parole, siccome sappiamo che ogni carica elettrica accelerata emette onde elettromagnetiche, le quali a loro volta sono in grado di accelerare altre cariche, dobbiamo, per ottenere una descrizione corretta, tenere conto della presenza di onde e.m. nel nostro sistema fisico complessivo. Quindi p.es. la lagrangiana o l'hamiltoniana di un sistema di cariche elettriche contengono termini aggiuntivi relativi alla parte libera del campo elettromagnetico: pensando che l'hamiltoniana coincide con l'energia totale del sistema, questo è plausibile, visto che sappiamo che ogni onda e.m. trasporta energia, oltre a quantità di moto etc. Di conseguenza, in linea di principio non è possibile descrivere la dinamica di un sistema di cariche limitandosi a rappresentare l'interazione fra di esse per mezzo di potenziali istantanei (tipo Coulomb, per intenderci), ma occorre aggiungere i termini opportuni per rappresentare lo scambio di energia con il campo elettromagnetico, che viene considerato come un altro sistema fisico indipendente dalle cariche. In ultima analisi, come è facile capire, il motivo di questa necessità è da ricercarsi nella velocità finita di propagazione delle interazioni elettromagnetiche.

Nel caso in cui il moto delle cariche sia caratterizzato da velocità piccole rispetto alla velocità della luce, è tuttavia possibile semplificare notevolmente il problema, riportandosi, attraverso una procedura di sviluppo in serie di potenze di $1/c$, a una descrizione in termini di potenziali, per quanto più complicati di quello

coulombiano: si ottiene in questo modo quella che si chiama la *lagrangiana di Darwin*, usata p.es. in fisica dei plasmi.

Diagramma di Feynman per l'interazione $e^- p$

La descrizione quantistica dell'interazione elettromagnetica fra un elettrone e un protone viene fatta, come e' noto, tramite la matrice S , il cui sviluppo perturbativo si rappresenta per mezzo di diagrammi di Feynman. Nell'approssimazione a 1 fotone si ha:



al quale corrisponde l'ampiezza

$$T_{fi} = e^2 \frac{(\bar{u}(p_e') \gamma^\mu u(p_e)) (\bar{u}(p_p') \gamma_\mu u(p))}{(p_- - p_-')^2}$$

Nel limite di impulsi piccoli, usando la decomposizione di Gordon per le correnti, l'elemento di matrice puo' essere scritto nel seguente modo, trattando per il momento il protone come una particella di Dirac:

$$T_{fi} \simeq -\frac{e^2}{q^2} \left[1 - \frac{\mathbf{p}_e'^2 + \mathbf{p}_e'^2}{8m_e^2} \right] \left[1 - \frac{\mathbf{p}_p'^2 + \mathbf{p}_p'^2}{8m_p^2} \right] \cdot$$

$$\left\{ \underbrace{\tilde{\chi}^\dagger \left[1 + \frac{\mathbf{p}_p' \cdot \mathbf{p}_p + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_p' \times \mathbf{p}_p)}{4m_p^2} \right]}_{\text{parte temporale 4-corrente p}} \underbrace{\tilde{\chi} \chi^\dagger \left[1 + \frac{\mathbf{p}_e' \cdot \mathbf{p}_e + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_e' \times \mathbf{p}_e)}{4m_e^2} \right]}_{\text{parte temporale 4-corrente e}} \chi + \right.$$

$$\left. - \underbrace{\tilde{\chi}^\dagger \frac{\mathbf{p}_p' + \mathbf{p}_p - i\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}_p' - \mathbf{p}_p)}{2m_p}}_{\text{parte spaziale 4-corrente p}} \tilde{\chi} \cdot \chi^\dagger \underbrace{\frac{\mathbf{p}_e' + \mathbf{p}_e - i\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}_e' - \mathbf{p}_e)}{2m_e}}_{\text{parte spaziale 4-corrente e}} \chi \right\}$$

In questa espressione le quantita' χ sono gli spinori di Pauli (a 2 componenti) per elettrone e protone. L'espressione trovata, che non e' un invariante, e' l'ampiezza di scattering elettromagnetico $e-p$ nel limite di velocita' molto basse: in questo limite, l'interazione e' descrivibile con un potenziale statico (come visto prima,

questo equivale a trascurare effetti di propagazione per il campo e.m.). Ricordando che nell'app. di Born (che corrisponde a quella a 1 fotone che stiamo usando), la antitrasformata di Fourier dell'ampiezza e' il potenziale, possiamo ricomporre il potenziale efficace come somma di diversi termini, ottenuti facendo l'antitrasformata di Fourier dei vari pezzi di ampiezza: naturalmente, ci aspettiamo di trovare, per il potenziale efficace, come termine dominante il potenziale coulombiano, accompagnato da altri piccoli termini correttivi. I livelli energetici saranno quindi quelli dell'atomo di idrogeno, corretti per le varie perturbazioni. Si trovano in effetti i seguenti termini dell'hamiltoniano efficace, detto *di Breit-Fermi*:

$$\begin{aligned}
 V_C &= -\frac{e^2}{r} (\tilde{\chi}^\dagger \tilde{\chi}) (\chi^\dagger \chi) && \text{pot. coulombiano} \\
 V_{so} &= \frac{e^2}{4m_e^2 r^3} (\tilde{\chi}^\dagger \tilde{\chi}) (\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \chi) && \text{spin-orbita} \\
 V_D &= \frac{e^2}{8m_e^2} 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r}) (\tilde{\chi}^\dagger \tilde{\chi}) (\chi^\dagger \chi) && \text{termine di Darwin} \\
 V_{dip-dip} &= \underbrace{\frac{8\pi e^2}{3m_e m_p} g_p \mathbf{s}_e \cdot \mathbf{s}_p \delta^{(3)}(\mathbf{r})}_{\text{int. iperfina}} + \underbrace{\frac{e^2}{m_e m_p r^3} g_p [3(\mathbf{s}_e \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{s}_e \cdot \mathbf{s}_p]}_{\text{int. tensoriale}} && \text{int. dipolo-dipolo}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{insieme alle correzioni} \\ \text{relativistiche all'en.cinetica} \\ \text{danno luogo alla} \\ \text{struttura fina dei livelli} \end{array}$$

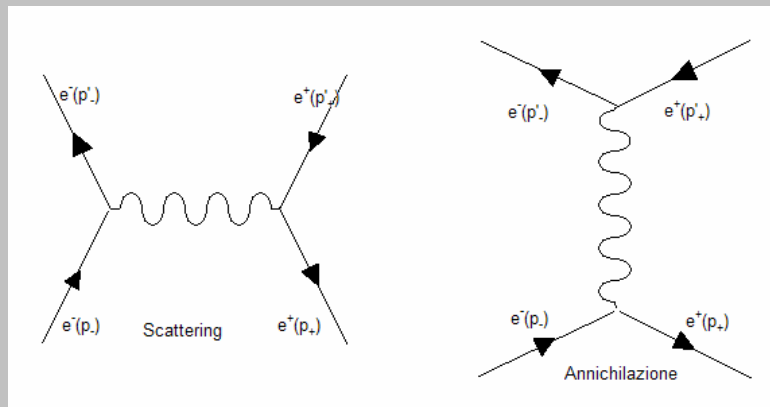
Il potenziale responsabile dell'interazione iperfina causa lo splitting fra gli stati di tripletto e singoletto del livello fondamentale. L'espressione per lo splitting iperfino si ottiene calcolando il valore di aspettazione della perturbazione iperfina nello stato fondamentale imperturbato; si noti che la forza tensoriale non ha effetti su livelli in onda S. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \frac{8\pi e^2}{3m_e m_p} g_p \mathbf{s}_e \cdot \mathbf{s}_p \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right\rangle_{\text{st. fond.}} \\
 \rightarrow \Delta E_{hyp} &= \frac{8\pi e^2}{3m_e m_p} g_p \cdot \frac{1}{2} [j(j+1) - s_e(s_e+1) - s_p(s_p+1)] \cdot |\psi(0)|^2 \\
 |\psi(0)|^2 &= \frac{(m_e \alpha)^3}{\pi} \rightarrow \Delta E_{hyp} = \frac{8\pi e^2}{3m_e m_p} g_p \frac{1}{2} \frac{(m_e \alpha)^3}{\pi} \left[j(j+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] \\
 \rightarrow \Delta E_{hyp} &= \frac{4}{3} g_p \frac{e^2}{m_e m_p} \left[j(j+1) - \frac{3}{2} \right] (m_e \alpha)^3 \\
 \Delta E_{hyp} &= \begin{cases} \frac{4}{3} g_p \frac{e^2 m_e}{m_p} (2 - 3/2) (m_e \alpha^3) = \frac{4}{3} g_p \frac{m_e}{m_p} \frac{1}{2} (m_e \alpha^4) & \text{shift iperfino-tripletto} \\ \frac{4}{3} g_p \frac{2e^2 m_e}{m_p} (0 - 3/2) (m_e \alpha^3) = -\frac{12}{3} g_p \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_p} (m_e \alpha^4) & \text{shift iperfino-singoletto} \end{cases} \\
 \rightarrow \Delta(\Delta E_{hyp})_{\text{trip-sing}} &= \frac{8}{3} g_p \frac{m_e}{m_p} (m_e \alpha^4)
 \end{aligned}$$

La frequenza di transizione legata a questo splitting e' la famosa riga a 21 cm dell'idrogeno ben nota ai radioastronomi.

Positronio

Quanto trovato per il caso dell'atomo di idrogeno puo' ora essere esteso ad un altro caso interessante, quello del positronio: in questo caso



L'elemento di matrice di transizione e' la somma dei 2 diagrammi:

$$T_{fi} = e^2 \left[-\frac{(\bar{u}(p_-')\gamma^\mu u(p_-))(\bar{v}(p_+)\gamma_\mu v(p_+'))}{(p_- - p_-')^2} + \frac{(\bar{v}(p_+)\gamma^\mu u(p_-))(\bar{u}(p_-')\gamma_\mu v(p_+'))}{(p_+ + p_-)^2} \right]$$

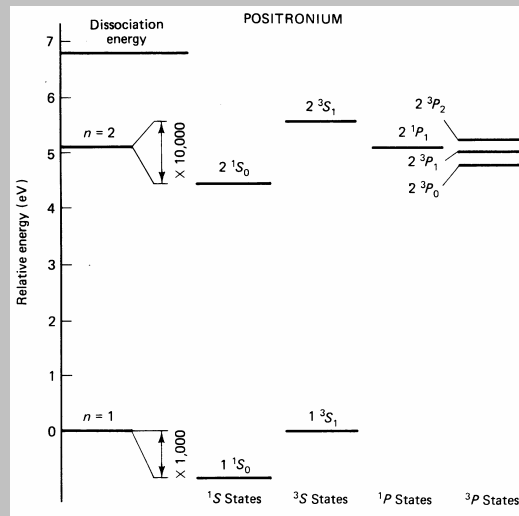
Anche in questo caso possiamo usare l'approssimazione per piccole velocita' Consideriamo il I termine (*scattering*): esso dara' luogo a un potenziale efficace identico a quello indicato sopra per il caso e-p, con la sola sostituzione della massa del protone con quella del positrone.

Consideriamo poi il II termine (annichilazione): nella stessa approssimazione di piccole velocita', esso da' origine a un nuovo contributo all'hamiltoniano:

$$V_A = \frac{e^2 \pi}{2m^2} (3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

Livelli energetici del positronio

L'effetto di queste correzioni sui livelli energetici del positronio e' riassunto nel seguente grafico:



In questo diagramma, le energie sono misurate rispetto *ad uno zero arbitrariamente collocato all'energia dello stato fondamentale imperturbato*; rispetto invece *ad uno zero collocato all'energia equivalente alla somma delle masse a riposo (ca. 2×0.511 MeV)*, i vari stati legati si situerebbero ad energie negative, come si e' abituati a vedere nel caso dell'atomo di idrogeno.

Volendo riassumere la situazione, possiamo dire che:

per gli stati in onda S, la correzione introduce uno splitting, che rimuove la degenerazione fra singoletti e tripletti

per gli stati in onda P, si osserva uno splitting fra singoletti e tripletti, e un ulteriore subsplitting fra i tre stati di tripletto.

Si osservi come la correzione di struttura fina e quella di struttura iperfina siano fra loro confrontabili, contrariamente a quel che avviene nell'atomo di H, e come siano 3 o 4 ordini di grandezza piu' piccole rispetto ai livelli coulombiani.

Nella misura in cui l'interazione di colore puo' essere descritta dallo scambio di una o piu' particelle vettoriali, e' verosimile che sia possibile approssimare l'interazione fra un quark e un antiquark (o anche fra due quark) tramite un hamiltoniano alla Breit-Fermi, come per il positronio. Ci interessa in particolare, per quel che segue, sottolineare la presenza dell'interazione spin-spin, che dovrebbe avere un ruolo nello spiegare lo splitting, analogo a quello iperfino fra tripletti e singoletti nello stato

fondamentale (anche se molto piu' grande!),

7. Proprieta' degli stati mesonici dei quark leggeri

Il quark t ha massa molto elevata (circa 174 GeV!), e questo fatto rende impossibile per esso la formazione di stati legati, perche' sono aperti molti canali di decadimento debole (fra cui quelli in cui sono prodotte W e Z^0 reali) e il rate totale di decadimento e' elevato: la vita media e' di circa 10^{-23} s, e corrisponde ad una larghezza di 1 GeV! Per gli altri 5 flavor, gli stati legati vengono invece naturalmente formati; ci aspettiamo dunque di osservare famiglie di dati spin-parita' contenenti ciascuna $5 \times 5 = 25$ stati legati. Le differenze di massa fra i quark c e b e gli altri 3, tuttavia, sono cosi' grandi da rendere poco utile un raggruppamento globale, e si preferisce considerare i 3 quark leggeri separatamente, come indicato sopra.

a. *Mixing*

Gli stati contenenti quark e antiquark u, d presentano un fenomeno particolare: ricordiamo che gli antiquark hanno gli stessi stati di isospin degli antinucleoni, ossia

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{d} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora i 2 stati centrali dell'ottetto e il singoletto di $SU(3)_F$: essi possono essere scritti come stati a isospin e 3° componente definiti:

$$|8; 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

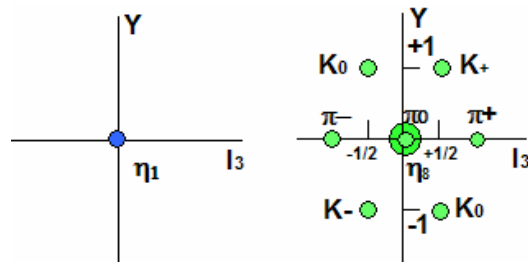
$$|8; 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

$$|1; 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Il tripletto di isospin si identifica immediatamente con il pione neutro

$$|1, 0\rangle = 1/\sqrt{2}(u\bar{u} - d\bar{d}) \rightarrow \pi^0$$

I 2 singoletti di isospin, viceversa, non sono immediatamente identificabili con η ed η' : quale e' l'ottetto e quale il singoletto di $SU(3)_F$? Una situazione analoga si verifica per i mesoni vettoriali (e in realta' anche per quelli tensoriali). Abbiamo quindi 2 stati con gli stessi numeri quantici, uno situato al centro dell'ottetto e uno singoletto di $SU(3)_F$; questo consente che essi *si mescolino* nel realizzare gli stati fisici, nella misura in cui la simmetria $SU(3)_F$ e' rotta: se fosse esatta, come sappiamo, ogni stato fisico dovrebbe appartenere a un solo multipletto. Il disegno mostra la situazione per i mesoni pseudoscalari, quella dei mesoni vettoriali e' analoga:



Gli stati fisici sono quindi *ruotati* rispetto agli autostati di $SU(3)_F$. Quindi, se c'e' mixing fra ottetto e singoletto, potremo scrivere in generale per gli stati fisici:

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 \cos \theta + \eta_8 \sin \theta \\ \eta' &= -\eta_1 \sin \theta + \eta_8 \cos \theta\end{aligned}$$

con formule simili per i mesoni vettoriali e tensoriali. Gli angoli di mixing risultano essere

$$\begin{aligned}\theta_p &= -11^\circ \\ \theta_v &= +40^\circ \\ \theta_T &= +32^\circ\end{aligned}$$

E' interessante osservare che $\theta \approx 35^\circ \rightarrow \sin \theta = 1/\sqrt{3}$: in questo caso, chiamato di *mixing ideale*, gli stati fisici risultano:

$$\begin{aligned}m_1 &\approx u\bar{u} + d\bar{d} \\ m_8 &\approx s\bar{s}\end{aligned}$$

quindi il singoletto di isospin dell'ottetto contiene quasi solo quark strani. In particolare, per i mesoni vettoriali si ha:

$$\omega = 1/\sqrt{2} (u\bar{u} + d\bar{d})$$

$$\phi = s\bar{s}$$

Questa ipotesi e' confermata dalle masse e dai branching ratio dei decadimenti coinvolti

b. Masse

Come piu' volte osservato, le differenze di massa all'interno di un multipletto sono molto grandi: alla luce del modello a quark, esse sono ricondotte alle differenze di massa fra i quark, e al confronto fra esse e la scala di energia dell'interazione di colore. Nel senso delle masse dei "*quark correnti*" (si intende con questo termine la massa 'asintotica' che avrebbe il quark se potesse esistere deconfinato), i quark *u* e *d* hanno massa di alcuni MeV, mentre il quark *s* ha massa di circa 150 MeV; nel senso dei "*quark costituenti*" (si intende con questo termine la massa efficace che ha il quark all'interno di un adrone, che puo' anche variare da un adrone all'altro), i primi 2 hanno massa di circa 300 MeV, circa 1/3 della massa del protone, mentre il terzo ha massa di circa 500 MeV. Ci sono un paio di punti interessanti:

- Comunque si voglia vedere la cosa, i pioni hanno massa anomalmente bassa;
- La differenza fra la massa del π e quella della ρ e' molto elevata; poiche' la sola differenza fra i 2 e' lo stato di spin totale, siamo condotti a ipotizzare un contributo forte dall'interazione spin-spin (sarebbe il corrispondente dell'interazione responsabile della struttura iperfina nel positronio)

$$\Delta E = \frac{A}{m_1 m_2} (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)$$

Occorre notare che, nel caso dei quark, l'interazione spin-spin, la cui esistenza puo' essere giustificata in base alle proprieta' dell'interazione di colore, *non* ha origine elettromagnetica (cosi' come accade p.es. per l'analogia interazione fra gli elettroni in un ferromagnete).

Siamo quindi portati ad assumere un'espressione generale per la massa dei mesoni leggeri data da:

$$M = m_1 + m_2 + A \frac{(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)}{m_1 m_2}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \rightarrow J^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \rightarrow \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 &= 1/2(J^2 - S_1^2 - S_2^2) = 1/2(J(J+1) - 2S(S+1)) \\ \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 &= \begin{cases} 1/4 & \text{tripletti} \\ -3/4 & \text{singoletti} \end{cases} \end{aligned}$$

e dove le masse sono quelle dei quark costituenti. La formula funziona bene, anche troppo: fittando con 4 parametri (A e le 3 masse) si riproducono i due ottetti entro 1-2 % (esclusa la η' , che e' un problema in se').

NB Questo non e' in realta' cosi' glorioso come puo' sembrare: da un lato fittiamo 7 dati con 4 parametri liberi, dall'altro tutta la difficolta, e l'interesse, sta nel calcolare A, e nel giustificare le masse efficaci; nondimeno, e' interessante vedere come si possano spiegare diverse cose con un modello semplice

8. Proprieta' degli stati barionici dei quark leggeri

a. Masse

Se si estende l'idea dell'interazione iperfina al caso delle tre coppie qq nei barioni, si arriva direttamente ad un'espressione analoga per le masse:

$$m(q_1, q_2, q_3) = \sum_{i=1}^3 m_i + A' \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j}{m_i m_j}$$

dove A' e' una nuova costante fenomenologica, presumibilmente legata alle caratteristiche della funzione d'onda di 2 quark. Risulta utile calcolare preliminarmente la somma sugli spin, che si puo' avere facilmente come

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 \rightarrow J^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3)^2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3) \\ S_1^2 &= S(S+1) = 3/4 \rightarrow S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 9/4 \\ \rightarrow \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 &= 1/2[J^2 - 9/4] = 1/2 J(J+1) - 9/4 \\ \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j &= \begin{cases} +3/4 & \text{per } j=3/2 \text{ (decupletto)} \\ -3/4 & \text{per } j=1/2 \text{ (ottetto)} \end{cases} \end{aligned}$$

- Se prendiamo i barioni dell'ottetto, uguagliando le masse dei quark u e d , abbiamo:

Nucleone:

$$m_N = 3m_u - \frac{3A'}{4m_u^2}$$

Lambda:

u e d sono in stato di flavor antisimmetrico, quindi anche di spin, quindi $J_{ud}=0$. Allora:

$$\begin{aligned} J_{ud}^2 &= (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 = S_u^2 + S_d^2 + 2\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = 0 \\ \rightarrow \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d &= 1/2(-1/2(1/2+1) - 1/2(1/2+1)) = -3/4 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} m_\Lambda &= 2m_u + m_s + A' \left(\frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_s}{m_u m_s} + \frac{\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{S}_d}{m_s m_d} \right) \\ &= 2m_u + m_s + A' \left(\frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u^2} + \frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_s} \right) \\ \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{S}_d &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = -3/4 + 3/4 = 0 \\ \rightarrow m_\Lambda &= 2m_u + m_s - \frac{3A'}{4m_u^2} \end{aligned}$$

- Se prendiamo il decupletto, abbiamo 3 spin allineati; quindi, per tutti i membri:

$$\begin{aligned} J_{ik}^2 &= (\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_k)^2 = S_i^2 + S_k^2 + 2\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k \\ \rightarrow \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k &= 1/2 [J_{ik}(J_{ik}+1) - S_i(S_i+1) - S_k(S_k+1)] \\ &= 1/2 [1(1+1) - 1/2(1/2+1) - 1/2(1/2+1)] \\ \rightarrow \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k &= 1/4 \end{aligned}$$

da cui l'espressione per le masse:

$$m(q_1, q_2, q_3) = \sum_{i=1}^3 m_i + A' \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{m_i m_j}$$

Anche per i barioni si ha un ottimo fit a 4 parametri (le 3 masse dei quark costituenti, ed A') per 8 masse, in cui però i valori di masse e costante sono diversi da quelli dei mesoni (di circa 50 MeV)

b. Momenti magnetici

Se si considerano i barioni dell'ottetto a spin $\frac{1}{2}$, sappiamo che non ci sono contributi orbitali al momento angolare totale; quindi il momento magnetico è il risultato della somma vettoriale dei 3 momenti magnetici dei quark:

$$\mu = \sum_{i=1}^3 \mu_i$$

Per una particella di Dirac (ossia, puntiforme e priva di struttura) di carica e e massa m , il momento magnetico è:

$$\mu = \frac{e}{2m}$$

$$\rightarrow \mu_u = \frac{2}{3} \frac{e}{2m_u}, \mu_d = -\frac{1}{3} \frac{e}{2m_d}, \mu_s = -\frac{1}{3} \frac{e}{2m_s}$$

Possiamo applicare questa idea al caso del protone e del neutrone (ricordiamo che il loro momento magnetico, molto ben conosciuto, è del tutto diverso da quello atteso per una particella di Dirac: in particolare il neutrone ha momento diverso da zero anche se ha carica nulla). Se consideriamo il protone a spin up, abbiamo la funzione d'onda di spin-flavor vista prima, che risulta dalla richiesta di simmetria globale della funzione d'onda di spin-flavor (ricordiamo che, originariamente, la giustificazione per questa proprietà poteva esser fatta risalire all'invarianza per $SU(6)$):

$$|p, +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2u \uparrow u \uparrow d \downarrow + 2d \downarrow u \uparrow u \uparrow + 2u \uparrow d \downarrow u \uparrow - \\ -u \downarrow d \uparrow u \uparrow - u \uparrow u \downarrow d \uparrow - u \downarrow u \uparrow d \uparrow - \\ -d \uparrow u \downarrow u \uparrow - u \uparrow d \uparrow u \downarrow - d \uparrow u \uparrow u \downarrow \end{pmatrix}$$

Quella per il neutrone si ottiene da questa semplicemente scambiando u con d :

$$|n, +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2d \uparrow d \uparrow u \downarrow + 2u \downarrow d \uparrow d \uparrow + 2d \uparrow u \downarrow d \uparrow - \\ -d \downarrow u \uparrow d \uparrow - d \uparrow d \downarrow u \uparrow - d \downarrow d \uparrow u \uparrow - \\ -u \uparrow d \downarrow d \uparrow - d \uparrow u \uparrow d \downarrow - u \uparrow d \uparrow d \downarrow \end{pmatrix}$$

Con queste funzioni d'onda, calcoliamo il valore atteso per μ :

$$\langle p, +1/2 | \mu | p, +1/2 \rangle = \langle p, +1/2 | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) | p, +1/2 \rangle$$

Protone: a titolo di esempio, calcoliamo l'elemento di matrice del momento magnetico totale nel primo dei 9 termini della funzione d'onda. Si ottiene:

$$\langle 2u \uparrow u \uparrow d \downarrow | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) | 2u \uparrow u \uparrow d \downarrow \rangle = 4\mu_u - 2\mu_d$$

Sommando tutti i 9 termini, e tenendo conto del fattore 1/18 che viene dalla normalizzazione, si ha infine:

$$\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$$

Il caso del neutrone ora e' facile: basta prendere il risultato del protone e sostituire u con d , ottenendo:

$$\mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$$

Si osservi il rapporto fra i due, ottenuto con la sostituzione dei valori precedentemente citati::

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{4\mu_d - \mu_u}{4\mu_u - \mu_d} = \frac{4\left(-\frac{e}{3 \cdot 2m_d}\right) - \frac{2e}{3 \cdot 2m_u}}{4\frac{2e}{3 \cdot 2m_u} - \left(-\frac{e}{3 \cdot 2m_d}\right)} \simeq \frac{-4e - 2e}{8e + e} = -\frac{2}{3}$$

assumendo circa uguali le masse del quark u e d . Usando i valori di massa dei quark costituenti trovati per i barioni, il confronto fra dati e previsioni del modello a quark e' buono ma non eccezionale, cosa che non stupisce data la semplicita' delle assunzioni.

9. Quarkonio

Il sistema piu' simile al positronio e' lo stato legato fra un quark e il corrispondente antiquark, $q\bar{q}$. L'interazione forte fra i due costituenti, dovuta alla carica di colore che essi portano, verra' descritta piu' avanti, ed e' considerevolmente piu' complicata dell'interazione elettromagnetica; tuttavia alcuni aspetti fondamentali sono gli stessi, e anche in questo caso e' possibile a volte approssimare la descrizione dei loro stati legati con un'equazione di Schrodinger non relativistica. Questo e' possibile nel caso degli stati legati $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$, noti come *charmonio* e *bottonio*, rispettivamente.

Il potenziale efficace

Nel 1973 Appelquist e Politzer applicarono il concetto di *liberta' asintotica* agli stati legati dei quark pesanti. La *liberta' asintotica* e' una proprieta' fondamentale dell'interazione di colore (cromodinamica quantistica): le interazioni fra i quark diventano deboli a grandi impulsi trasferiti, come dire a piccole distanze. Ora, se la coppia $q\bar{q}$ in un mesone ha una massa molto elevata, allora il raggio dello stato legato sara' corrispondentemente piccolo.

Infatti, p.es. nell'atomo di idrogeno, si ha per i raggi di Bohr:

$$R = \frac{n^2}{\alpha m}$$

dove m e' la massa ridotta e α e' la costante di struttura fine. Il raggio dello stato fondamentale quindi e' inversamente proporzionale a m . In un mesone scriveremmo approssimativamente

$$R \sim \frac{1}{\alpha_s m}$$

dove con α_s si e' indicata la costante di accoppiamento dell'interazione di colore.

Ora, se in un mesone la massa ridotta e' molto elevata R e' piccolo, e quindi α_s e' anch'essa piccola; allora il sistema si puo' trattare perturbativamente (la questione e' in realta' piu' complicata dell'apparenza: α_s non e' costante, e diminuisce al diminuire di r ...). In QCD, l'interazione fra i quark colorati avviene mediante lo scambio di *gluoni*, come in QED mediante lo scambio di *fotoni*: se in uno sviluppo perturbativo e' consentito arrestarsi allo scambio di 1 gluone, il potenziale che ne deriva e' analogo al potenziale Colombiano; questo avviene se la costante di accoppiamento e' piccola.

Per diversi aspetti si puo' dunque modellare l'interazione quark-antiquark tramite un potenziale efficace, che con varie approssimazioni si puo' considerare come derivabile dalla fondamentale interazione di colore (cosi', come abbiamo visto, il potenziale di Breit-Fermi e' un'approssimazione per piccole velocita' dell'interazione elettromagnetica).

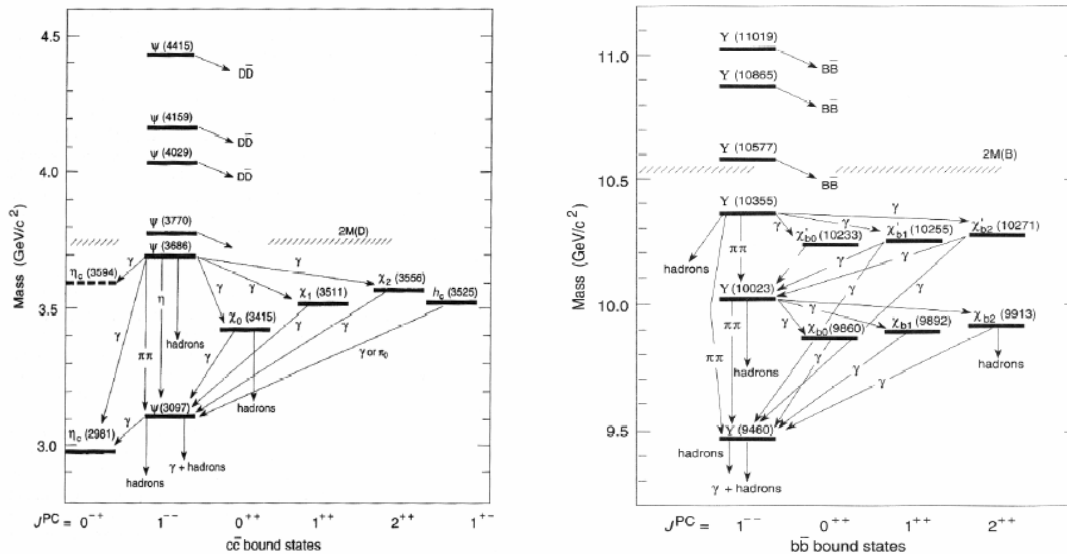
Nella sua forma piu' semplice, il potenziale efficace fra un quark e un antiquark si puo' allora scrivere

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \text{termine confinante}$$

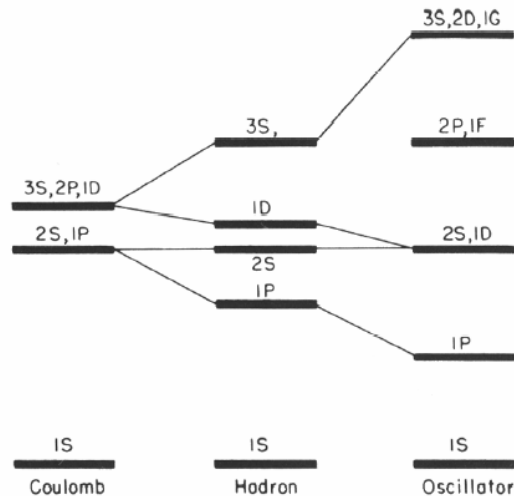
dove il fattore $4/3$ viene dalle proprietà dell'interazione di colore, mentre il fattore $1/r$ corrisponde all'approssimazione di scambio di 1 gluone (analogo quindi al potenziale Coulombiano). Il termine confinante, che domina a grandi distanze, non è ben conosciuto, e non si può in realtà descrivere in modo compiuto all'interno di una teoria perturbativa; spesso viene fenomenologicamente rappresentato con andamento lineare con r .

Quarkonio vs positronio

Se non consideriamo per ora l'effetto del confinamento, ci aspettiamo dunque (su un'altra scala di energia) uno schema di livelli del tutto simile al positronio. Questa è la situazione sperimentale per charmonio e bottomonio:



Si osserva immediatamente la grande rassomiglianza fra i due schemi, e in generale fra i 2 e lo schema del positronio. Ci si può chiedere in che misura questa rassomiglianza sia riconducibile ad un potenziale efficace di tipo coulombiano. La figura che segue mostra i primi livelli del charmonio confrontati con quelli di due potenziali, coulombiano puro e oscillatore armonico (che è confinante):



E' evidente come lo schema del quarkonio si situi in una posizione intermedia rispetto ai due casi limite. E' anche evidente come l'elevata degenerazione dei livelli nei casi limite sia rimossa nel caso del quarkonio: il fenomeno e' dovuto alla presenza dei termini aggiuntivi nell'hamiltoniano

Decadimenti del quarkonio, regola di OZI etc

Gli stati del quarkonio hanno massa molto elevata nel caso dei quark pesanti c e b : ci si attende quindi una moltitudine di modi di decadimento, che ha in linea di principio aperti moltissimi canali diversi . Di conseguenza, sarebbe del tutto naturale che questi stati risonanti avessero una larghezza molto grande, mentre i dati sperimentali indicano che si tratta di risonanze strettissime.

Puo' essere utile chiarire l'affermazione precedente: come e' noto, la larghezza totale di uno stato instabile e' legata alla sua vita media dalla relazione di indeterminazione tempo-energia $\Delta E \Delta t \geq 1$: essa si puo' riesprimere in termini di vita media e larghezza totale come $\Gamma \tau \simeq 1$. Ora, la vita media e' l'inverso della probabilita' totale di decadimento per unita' di tempo

$$\frac{1}{\tau} = W \simeq \Gamma$$

Se lo stato instabile ha molti modi di decadimento in competizione, la probabilita' totale e' la somma delle probabilita':

$$W = W_1 + W_2 + \dots = \sum_i W_i \rightarrow \Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

A titolo di cronaca, si definisce poi rapporto di decadimento (*branching ratio*) del modo i-esimo il rapporto

$$(B.R.)_i = \frac{\Gamma_i}{\sum_i \Gamma_i} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

E' evidente che il significato di rapporto di decadimento e' quello di frazione di volte in cui il decadimento avviene in quel dato modo.

Quindi, ad ogni modo di decadimento possiamo associare una *larghezza parziale*, caratteristica del modo. Poiche' vale evidentemente la relazione:

$$\Gamma_i = \frac{1}{\tau_i}$$

si capisce come la larghezza parziale corrisponda all'inverso della vita media che lo stato avrebbe se tutti gli altri modi non esistessero.

Ora e' chiaro che se ci sono molti modi, ognuno con una larghezza parziale p.es. simile, la larghezza totale diventa molto grande: questo e' dunque il senso dell'affermazione precedente: se uno stato e' a massa elevata, ha molte possibilita' diverse di decadere, quindi ci aspettiamo una larghezza elevata.

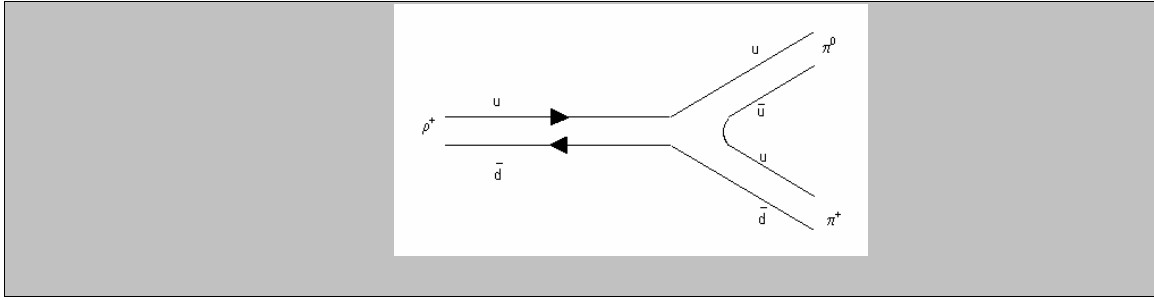
Infatti, si ha la seguente situazione nel caso del charmonio:

$$m_{J/\psi} = 3097 \text{ MeV}, \Gamma_{J/\psi} = 80 \text{ keV} \quad J^{PC} = 1^{-}$$

$$m_{\psi'} = 3686 \text{ MeV}, \Gamma_{\psi'} = 250 \text{ keV} \quad J^{PC} = 1^{-}$$

E' evidente che ci deve essere una differenza cruciale fra questi stati e gli altri mesoni vettoriali a massa piu' bassa, come ρ, ω, ϕ che hanno larghezze dell'ordine di diversi (o molti) MeV. Ci aspettiamo quindi che ci sia una nuova regola di selezione che inibisce gran parte dei possibili decadimenti per questi stati. Se li interpretiamo come stati legati $c\bar{c}$, come fu fatto immediatamente dopo la loro scoperta, possiamo fare ricorso alla regola di selezione di OZI (da Okubo, Zweig, Iizuka, che l'avevano proposta anni prima): essa postula che *i diagrammi a flusso di quark sconnessi sono soppressi rispetto a quelli connessi*.

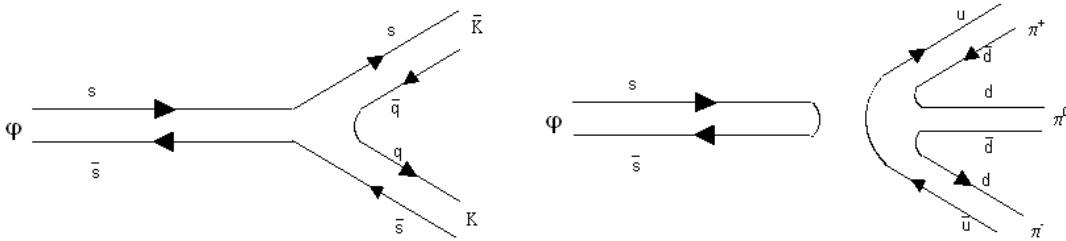
Che cos'e' un diagramma a flusso quark? Nient'altro che una raffigurazione pittoresca di come si svolge un processo forte, nella quale il flusso dei quark e' rappresentato da linee, un po' come nei diagrammi di Feynman (ma senza che ad esso sia associata un'ampiezza di transizione). Es: diagramma a quark per il decadimento $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$



La regola di OZI era stata proposta (ma non ben giustificata) per spiegare la soppressione del decadimento $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ rispetto all'altro $\phi \rightarrow K \bar{K}$: sperimentalmente

$$\frac{\Gamma(3\pi)}{\Gamma(K\bar{K})} \approx 0.18$$

anche se il decadimento in 3 π e' favorito dallo spazio delle fasi. Se confrontiamo i diagrammi a quark dei 2 modi abbiamo:



Come si vede , il secondo diagramma e' disconnesso (le linee di quark della prima parte sono separate da quelle della seconda parte). La regola di OZI non ha, a questo livello, una vera giustificazione quantitativa, ma e' derivabile dalla QCD.

Un'idea semplificata dell'origine della regola di OZI nella QCD puo' essere data dalle seguenti considerazioni, basate sulle proprieta' del processo di annichilazione del positronio

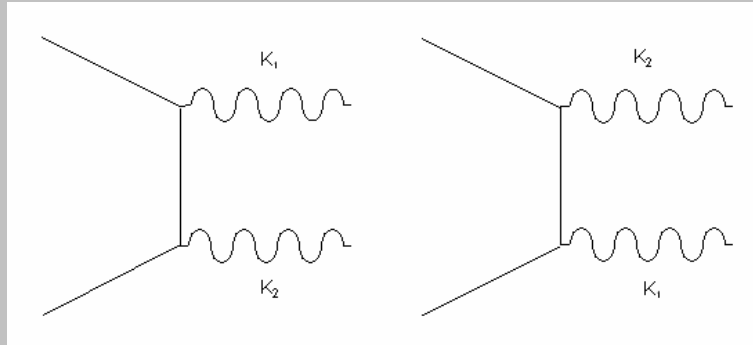
Annichilazione del positronio

Il positronio e' un sistema instabile, perche' non ci sono, come p.es. nell'atomo di H, regole di selezione che vietino l'annichilazione particella-antiparticella. Come accennato, la conservazione di parita' e parita' di carica implica che l'annichilazione proceda in uno stato finale a 2 o 3 fotoni (modi dominanti, anche se non esclusivi) a seconda dei numeri quantici dello stato che annichila.

Per trovare il rate di annichilazione, p.es. in 2 fotoni, si puo' procedere come segue:

Calcolo sezione d'urto di annichilazione in 2 fotoni nel limite non relativistico

I diagrammi di Feynman per il processo sono:



I diagrammi corrispondono a quello dello scattering Compton, visto che i due processi si ottengono l'uno dall'altro per crossing. Quindi la sezione d'urto totale si ottiene esattamente come quella Compton; siamo interessati al caso limite in cui gli elettroni hanno energia cinetica trascurabile, trovandosi nello stato legato 1S_0 (singoletto di onda S). L'ampiezza di transizione si scrive

$$T_{fi} = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \bar{v}(2) \not{\epsilon}_4 (\not{p}_1 - \not{p}_3 + m) \not{\epsilon}_3 u(1)$$

$$T_2 = \frac{e^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \bar{v}(2) \not{\epsilon}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m) \not{\epsilon}_4 u(1)$$

Nel limite in cui gli elettroni sono circa fermi, abbiamo, scegliendo l'asse z lungo la direzione di fotoni nel CM:

$$p_1 = m(1, 0, 0, 0)$$

$$p_2 = m(1, 0, 0, 0)$$

$$p_3 = m(1, 0, 0, 1)$$

$$p_4 = m(1, 0, 0, -1)$$

da cui

$$(p_1 - p_3)^2 - m^2 = (p_1 - p_4)^2 - m^2 = -2m^2$$

La parte spinoriale/vettoriale dell'elemento di matrice si trova con un notevole lavoro di algebra, sfruttando varie proprietà (invarianza di gauge, eq. di Dirac,...). Alla fine, restringendosi al caso di singoletto, si ha:

$$T = -4e^2$$

Ora, il processo di annichilazione del positronio si può considerare come un qualsiasi processo di scattering, nel quale tuttavia lo stato iniziale, invece di essere un'onda piana, è uno stato legato. La sezione d'urto differenziale per un processo a 2 corpi è data, come sappiamo, da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi s} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |T|^2$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_f| &= m \\ |\mathbf{p}_i| &\simeq m\beta \\ s &= (2m)^2 = 4m^2 \end{aligned}$$

Si osservi che prendiamo qui i primi termini non nulli degli sviluppi in serie di v/c per impulsi ed energie, come già fatto nell'elemento di matrice: questo spiega perché la si è posta $\beta=0$, mentre qui si prende il I ordine in β . Allora:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi 4m^2} \frac{m}{m\beta} 16\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{16\pi m^2 \beta} \\ \rightarrow \sigma &= 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2 \beta} \end{aligned}$$

Il numero N di eventi di annichilazione è legato alla sezione d'urto totale dalla solita relazione in cui compare la luminosità L :

$$N = L\sigma$$

La luminosità si può esprimere, per un fascio incidente, come

$$L = \rho\beta$$

dove ρ è la densità volumetrica di particelle. Nel caso di una singola annichilazione, il "fascio" è costituito dalla coppia elettrone-positrone nel suo stato legato, e N rappresenta la probabilità di annichilazione per unità di tempo; d'altra parte, ρ è la densità di coppie a distanza relativa 0, data da

$$\rho = |\psi(0)|^2$$

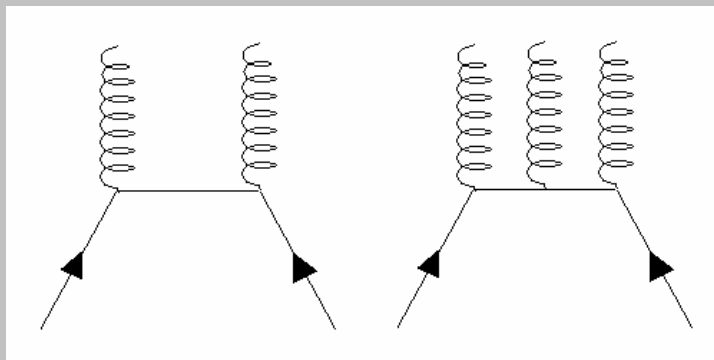
In conclusione, si ha per il rate:

$$R = \frac{\alpha^2}{4m^2} \beta |\psi(0)|^2 = \frac{\alpha^2}{4m^2} |\psi(0)|^2$$

Si ricordi che il decadimento in 2 fotoni avviene solo dallo stato di singoletto in onda S, a causa della conservazione di C e P.

Annichilazione del quarkonio

Nel caso di stati $c\bar{c}$, possiamo prevedere un processo dello stesso tipo, attraverso il quale la coppia quark-antiquark annichila in 2 o più gluoni.



Innanzitutto, si può osservare che, a differenza del caso elettromagnetico, il processo di annichilazione di uno stato mesonico non può *mai* realizzarsi in un solo gluone, sia pur virtuale: in effetti, per ipotesi tutti i mesoni sono singoletti di colore, e il colore totale deve essere conservato. Poiché un gluone è un otteetto di colore, ce ne vogliono almeno 2 per accoppiarsi a un singoletto: in effetti vale la decomposizione del prodotto di due ottetti di $SU(3)_C$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10' \oplus 27$$

nella quale compare appunto un singoletto.

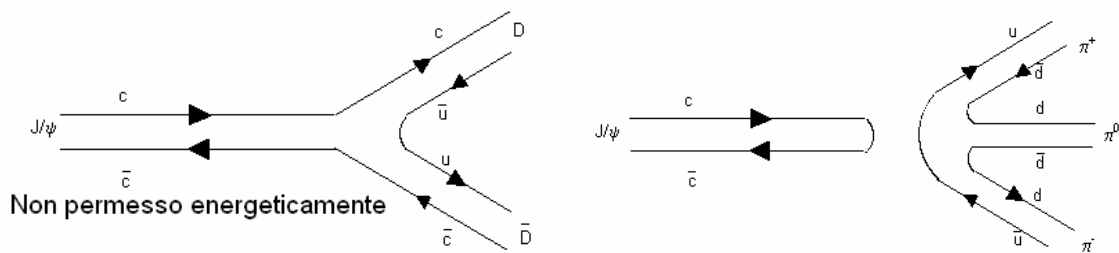
Inoltre, la conservazione degli altri numeri quantici porta, come si ricorderà, a concludere che stati scalari/pseudoscalari (singoletti di onda S) possano annichilare in 2 gluoni, mentre stati vettoriali (tripletti in onda S) possano annichilare in 3 gluoni. Tutto questo ragionamento è possibile nella misura in cui il processo si può trattare perturbativamente, ossia in cui diagrammi a più gluoni sono soppressi rispetto a quelli con 2 o 3 gluoni: questo avviene quando il processo coinvolge, in senso generale, distanze piccole o q^2 elevati, il che è abbastanza ben verificato per il charmonio e ancor più per il bottomonio. In queste situazioni, la costante di accoppiamento di colore, α_s , risulta piuttosto piccola, e p.es. la richiesta di annichilazione in 3 gluoni risulta in un accoppiamento efficace ($\propto \alpha_s^3$) piccolissimo, il che spiega la larghezza molto ridotta di questi stati. Si può osservare che i decadimenti forti di stati privi di quark pesanti (p.es. della ρ o di altri mesoni leggeri) coinvolgono scale di q^2 assai più piccole: in queste condizioni,

la costante di accoppiamento di colore e' molto piu' grande, e l'accoppiamento piu' forte risulta in una larghezza di decadimento elevata.

D'altra parte, un diagramma a flusso di quark connesso corrisponde al caso in cui coppie quark-antiquark vengono create dal vuoto anche tramite l'emissione di singoli gluoni virtuali, il che corrisponde a potenze piu' piccole nella costante di accoppiamento forte, quindi a un accoppiamento piu' forte e ad ampiezze maggiori.

Riassumendo, diagrammi connessi = pochi gluoni, diagrammi sconnessi = molti gluoni, da cui la regola di OZI.

Il caso della ϕ si puo' tradurre in quello della J/ψ , infatti:



Il primo diagramma, connesso, rappresenta tuttavia un processo che non puo' avvenire: infatti le masse dei mesoni charmati piu' leggeri (stati D) sono tali che $2m_D > m_{J/\psi}$. Quindi restano solo diagrammi sconnessi, come quello indicato a destra, e la regola di OZI dice che la larghezza parziale per questi modi e' piccola; in conclusione, la larghezza totale e' piccola. Il χ armonico possiede molti altri stati, come indicato prima, ed e' interessante notare che la terza eccitazione radiale della J/ψ , la cosiddetta $\psi(3772)$, ha massa sufficientemente elevata da consentire il decadimento in $D\bar{D}$: la sua larghezza, in effetti, e' di diversi MeV.

Che cos'e' una eccitazione radiale? Il termine e' preso dalla teoria dei potenziali centrali: si immagini che il quark e l'antiquark siano legati da un potenziale centrale, p.es. la classica buca. Oltre allo stato fondamentale, ci sono in genere diversi livelli eccitati, nei quali i numeri quantici, tranne il numero quantico principale, sono gli stessi dello stato fondamentale: essi sono chiamati eccitazioni radiali dello stato fondamentale.

Considerazioni molto simili si possono fare per gli stati del bottomonio.

La scoperta del quarkonio (il charmonio fu scoperto nel 1974, e il bottomonio nel 1977) e lo studio delle sue proprieta', diverse in molte cose da quelle degli adroni "ordinari", sono stati passi decisivi nel convincere la comunita' dei fisici che i quark erano qualcosa di piu' di un'idea suggestiva.

10. Conclusioni

Il modello a quark, basato sulla simmetria unitaria $SU(3)_F$, ottiene dunque un notevole successo, almeno per ciò che riguarda gli adroni "leggeri", nell'interpretare le regolarità osservate negli spettri adronici in termini di costituenti, i quark appunto; molte altre previsioni di $SU(3)_F$, su rapporti di sezioni d'urto, branching ratio e regole di selezione, risultano in genere in discreto accordo con le osservazioni, anche se dipendono quasi sempre in modo decisivo dal meccanismo specifico di rottura della simmetria che si deve ipotizzare.

Così come nel caso degli esperimenti di DIS, l'interpretazione dei dati spettroscopici porta dunque a individuare un nuovo livello di struttura. Restano due grossi problemi, quello dell'apparente violazione del principio di Pauli e quello dell'inosservabilità dei costituenti stessi. Altre difficoltà si aggiungono con la scoperta di nuovi flavor (charm, beauty, top), le cui masse sono molto più elevate di quelle di u, d, s ; in questo senso, un'estensione della simmetria di flavor a 4 o 5 quark appare del tutto ingiustificata, e in ogni caso non fornisce previsioni di particolare rilievo.

Alla luce di queste considerazioni, ci si può chiedere quale sia il valore di un modello come questo, inclusa la predizione di grandezze assolutamente fondamentali come i peculiari numeri quantici dei quark: essi tuttavia restano invariati anche nel quadro del Modello Standard, ove i quark, invece di costituire la rappresentazione fondamentale di un gruppo di simmetria legato al flavor, sono, da un lato, il tripletto fondamentale del gruppo di simmetria di colore, dall'altro, insieme ai leptoni, gli stati fondamentali del nuovo gruppo di simmetria dell'interazione elettrodebole. I quark dunque, scoperti "nel modello sbagliato", sono qui per restare.