

Radiazione e Relativita' Ristretta

IX –Leggi di conservazione, dinamica relativistica

Leggi di Newton, leggi di conservazione

Leggi di Newton: principi generali della dinamica, la cui validità è basata sull'esperienza. Da esse: leggi di conservazione

Per un sistema di punti:

Quantità di moto

$$P = \sum_i p_i = \sum_i m_i v_i = \text{cost}$$

Momento angolare

$$L = \sum_i l_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \text{cost}$$

Energia

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + V_i \right) = \text{cost}$$

Possibile seguire il percorso inverso:

Principi di invarianza

Leggi di conservazione

Leggi di Newton

Principi di invarianza

Legame fra principi di invarianza e leggi di conservazione:

Invarianza per traslazioni → conservazione **quantita' di moto**

Invarianza per rotazioni → conservazione **momento angolare**

Invarianza per traslazione temporale → conservazione **energia**

NB: Conservazione della massa? Nessuna proprieta' di invarianza...

Vista la loro origine, si possono assumere come valide per un sistema isolato (e conservativo), sia che restiamo nell'ambito pre-relativistico, sia che ci poniamo nel quadro della RR. Ora: se le TdG vengono sostituite dalle TdL, le leggi di Newton devono cambiare. Per cambiarle:

*Assumiamo valide le leggi di conservazione, e cerchiamo una nuova definizione di **p** ed **E***

Processi di collisione - I

Caso piu' immediato di applicazione delle leggi di conservazione:

Collisione di due masse uguali

Confronto fra trattazione galileiana/newtoniana e TdL

Ipotesi non sempre esplicitamente ricordata: *la massa e' una costante di ogni corpo, indipendente dal SRI in cui viene misurata.*

Questa ipotesi e' in contrasto con le TdL, se vogliamo che la quantita' di moto sia conservata.

Processi di collisione - II

Supponiamo che la massa *possa* dipendere dalla velocità, poi verificheremo se l'ipotesi è superflua o no.

Esperimenti ideali (Einstein 1905, Lewis e Tolman 1909, Von Laue...): collisione completamente anelastica

Descrizione galileiana/newtoniana

Ipotesi: $m=m'$, massa indipendente dal SRI in cui è osservata

Nel SRI S , del centro di massa

$$u_1 = u, \quad u_2 = -u$$

$$mu + m(-u) = 0 = Mu' = (m + m)u' \rightarrow u' = 0 \quad \text{impulso conservato}$$

$$\text{NB: } \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 \neq \frac{1}{2}(2m)u'^2 = 0 \quad \text{en. cinetica non conservata}$$

Nel SRI S' , di quiete di 2 (S' ha velocità $v=-u$ rispetto a S)

$$\begin{cases} u_1 \rightarrow \bar{u}_1 = u_1 - v = u - (-u) = 2u, u_2 \rightarrow \bar{u}_2 = u_2 - v = -u - (-u) = 0 \end{cases} \quad \text{TdG}$$

$$\begin{cases} u' \rightarrow \bar{u}' = u' - v = 0 - (-u) = u \end{cases} \quad \text{TdG}$$

$$\rightarrow m\bar{u}_1 + 0 = m2u, M\bar{u}' = 2mu \rightarrow m\bar{u}_1 + 0 = M\bar{u}' \quad \text{OK impulso conservato}$$

Processi di collisione - III

Trattazione relativistica

Nel SRI del centro di massa, ancora:

$$\begin{cases} u_1 = u, & u_2 = -u \\ u' = 0 \end{cases}$$

Quindi la quantità di moto definita classicamente è ancora conservata in S

Ma nel SRI di quiete di 2, se usiamo la legge relativistica di trasformazione delle velocità:

$$u_1 \rightarrow \bar{u}_1 = \frac{u_1 - v}{1 - u_1 v / c^2} = \frac{u + u}{1 + uu / c^2} = \frac{2u}{1 + u^2 / c^2}, \quad u_2 \rightarrow \bar{u}_2 = \frac{u_2 - v}{1 - u_2 v / c^2} = \frac{-u + u}{1 - (-u)u / c^2} = 0$$

$$u' \rightarrow \bar{u}' = \frac{u' - v}{1 - u' v / c^2} = \frac{0 - (-u)}{1 - 0 \cdot v / c^2} = u$$

Se continuiamo ad assumere che la massa sia indipendente dal SRI, la quantità di moto *non è conservata in S'* :

$$2mu \neq \frac{2mu}{1 + u^2 / c^2}$$

Processi di collisione - IV

Cosa pensiamo si debba continuare a conservare?

Massa: buona evidenza sperimentale ($\sim 10^{-6}$ nelle reazioni chimiche), non conseguente ad alcuna proprietà di invarianza che sia evidente

Impulso: buona evidenza sperimentale, conseguenza di una evidente proprietà di invarianza

Essendo forzato ad abbandonare una delle leggi di conservazione, Einstein abbandona la prima, per la quale non c'è ragione di sussistere a priori

Quindi: *massa dipendente dal SRI usato*

Ri-definizione della massa

Supponiamo che la massa dipenda dalla velocità: allora possiamo ancora conservarla, in senso relativistico, insieme all'impulso:

$$\begin{cases} M = m(u') + m(0) \\ Mu = m(u')u' \\ u' = \frac{2u}{1 + u^2/c^2} \end{cases} \rightarrow u = u' \frac{m(u')}{m(u') + m(0)} \rightarrow m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Distinzione fra *massa a riposo* $m(0)$ e *massa relativistica* $m(u)$

[Tuttavia, come si vedrà il concetto di massa relativistica è superfluo, e anzi nell'insieme fuorviante]

Attenzione: nel fare queste considerazioni, il concetto di massa come misura della 'quantità' della materia è da considerarsi del tutto perduto (situazione che già si presenta nella meccanica newtoniana: massa come inerzia)

Ri-definizione dell'impulso

Come ridefinire l'impulso alla luce della nuova definizione di massa?
Come nella vecchia definizione, con la nuova massa:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m(0)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \mathbf{v} \equiv \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

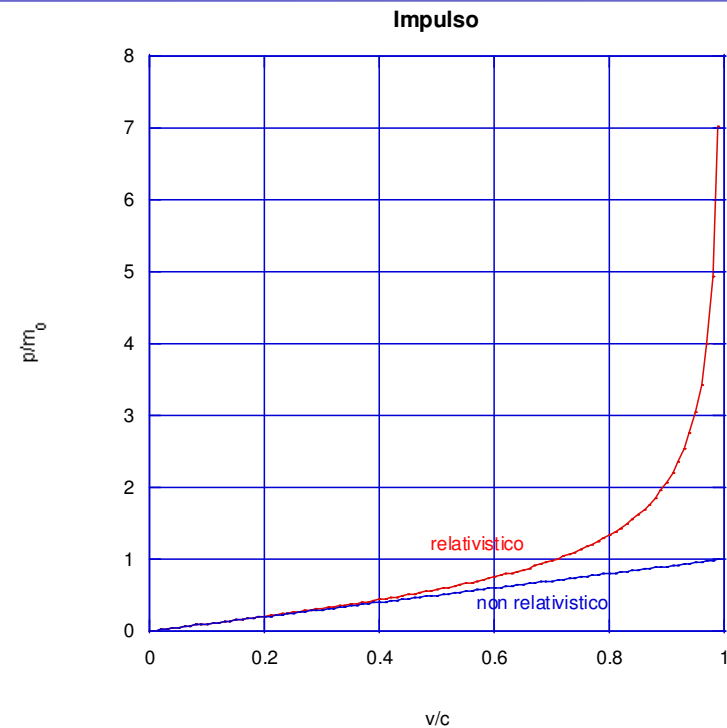
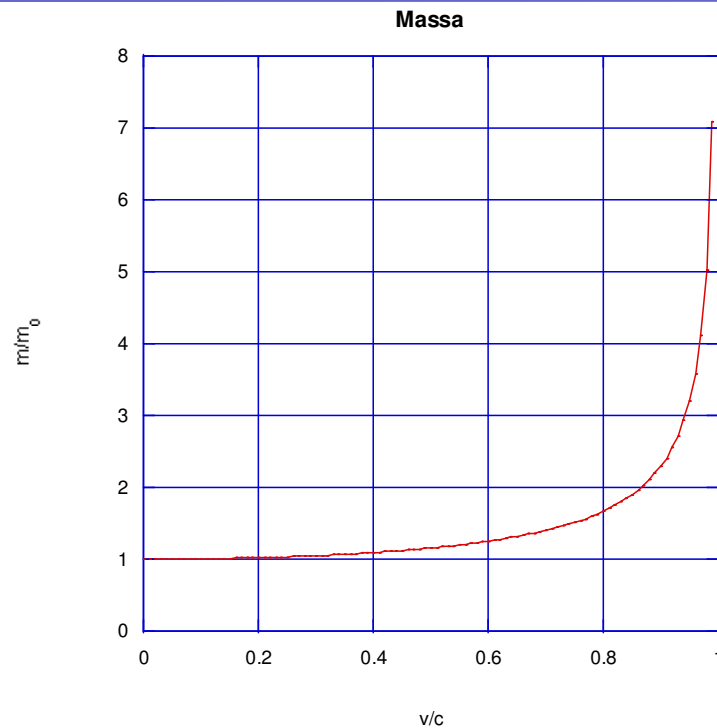
Come visto prima, con questa ri-definizione l'impulso si conserva nelle collisioni (e, in realta', in tutti i processi), in tutti i SRI, in accordo con il principio di relativita'.

Altro modo di scriverlo:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0 \boldsymbol{\beta} c}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \gamma \boldsymbol{\beta} c \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} m_0 \mathbf{v}$$

che mostra come per piccole velocita' si torni alla definizione pre-relativistica

Andamento con β



Notare la divergenza per $\beta \rightarrow 1$: una particella con velocità uguale a quella della luce avrebbe massa e quantità di moto infinite

Ridefinizione dell'energia - I

Relazione classica fra energia cinetica e impulso:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Qualche conticino sull'impulso relativistico:

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$$

$$\beta^2 \gamma^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = 1 \rightarrow \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\rightarrow p^2 = m_0^2 c^2 (\gamma^2 - 1) \rightarrow m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 - \frac{p^2}{c^2} \rightarrow m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2$$

~~Questa e' una quantita' invariante; questo e' l'impulso relativistico (al quadrato); che cosa e' questo??~~

Ridefinizione dell'energia - II

Per capirlo, ricordiamo prima di tutto che la quantità $m_0\gamma$ ha il significato di massa relativistica.

Sviluppiamo in serie:

$$m_0c^2\gamma = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta \ll 1}{\approx} \frac{m_0c^2}{1-\beta^2/2} \underset{\beta \ll 1}{\approx} m_0c^2 \left(1 + \beta^2/2\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

Sorpresa! Nel limite di basse velocità, il termine misterioso si rivela (in parte) del tutto familiare: il secondo pezzo dello sviluppo in serie, infatti, non è altro che l'energia cinetica classica del corpo in movimento.

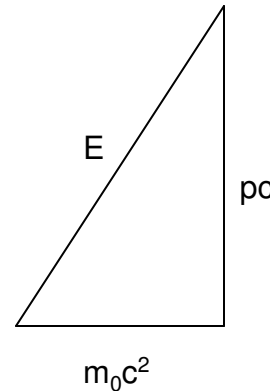
Possiamo allora definire il termine misterioso come *l'energia totale relativistica* del corpo di massa a riposo m_0 :

$$E^2 \equiv m_0^2c^4\gamma^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

Energia e impulso relativistici -I

Relazione fra i due (di tipo 'pitagorico'):

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$



Riarrangiando:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Poiché questa è una costante, questa è una quantità *invariante* (ossia, ha lo stesso valore in tutti i SRI):

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

quindi viene lasciata invariata da ogni TdL.

Energia e impulso relativistici -II

Situazione simile a quella incontrata per le TdL delle coordinate di un evento: la quantità'

$$\Delta s^2 = [\Delta(ct)]^2 - (\Delta \mathbf{r})^2$$

e' lasciata invariata da ogni TdL.

Allora, le quantità' E e $\mathbf{p}$ si trasformeranno da un SRI ad un altro con le stesse TdL:

$$p_x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right)$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (E - vp_x/c)$$

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(p_x' + \frac{vE'}{c^2} \right)$$

$$p_y = p_y'$$

$$p_z = p_z'$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (E' + vp_x')$$

Collisioni anelastiche - I

Consideriamo la solita collisione anelastica fra le particelle 1 e 2, di uguale massa a riposo m_0 , che 'restano attaccate' a formare una terza particella 3. Nel SRI del centro di massa

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$$

mentre in ogni altro SRI:

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_3'$$

Usiamo le TdL per mettere in relazione i due insiemi di componenti:

$$\begin{cases} p_{x1}' + p_{x2}' = \gamma \underbrace{(p_{x1} + p_{x2})}_{=0} - \frac{\beta\gamma}{c} (E_1 + E_2) \\ p_{x3}' = \gamma \underbrace{p_{x3}}_{=0} - \frac{\beta\gamma}{c} E_3 \end{cases}$$
$$\rightarrow E_3 = E_1 + E_2$$

Collisioni anelastiche - II

Dalla definizione di energia totale relativistica, nel SRI S :

$$\begin{cases} E_3 = m_{03}c^2 \\ E_1 = E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases} \rightarrow m_{03}c^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$\rightarrow m_{03}c^2 > 2m_0c^2 !!$

La massa a riposo di 3 e' maggiore della somma delle masse a riposo di 1 e 2 !! L'energia cinetica di 1 e 2 e' stata convertita in contributo alla massa a riposo di 3.

Quindi e' possibile convertire en. cinetica in massa

$$\Delta E = \Delta mc^2$$