SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI:

IL PARADOSSO DEI GEMELLI e L'ACCELERAZIONE

COME FORZA PSEUDOGRAVITAZIONALE

A. A. Asci
a.a. 2007/2008

IL PARADOSSO DEI GEMELLI

Due gemelli, o meglio due orologi uguali e perfettamente sincronizzati, vengono separati:

--Il primo resta sulla terra, considerata come un sistema di riferimento inerziale;

--Il secondo si allontana dal primo con un moto uniformemente accelerato per un certo tratto di viaggio, poi si muove con moto rettilineo uniforme, infine inverte la sua accelerazione e ritorna sulla terra

Il paradosso risulta dal fatto che al ritorno sulla terra, i due orologi sono sfasati, più precisamente il secondo orologio (da ora in poi detto ”viaggiatore”) ha “contato” il tempo più lentamente del primo (il “terrestre”) rimasto fermo sulla terra.

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE"

Questo orologio vede il viaggiatore che nella prima parte del viaggio accelera. Per semplicità sia l'accelerazione (a) che la velocità (v) sono dirette lungo l'asse x.

Le trasformazioni di Lorentz per un tale moto sono:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x - \beta\gamma\Delta ct$$

$$\Delta ct' = \gamma \Delta ct - \beta\gamma\Delta x$$

Essendo:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE" (2)

Esplicitando rispetto a Δx e Δct e facendone il rapporto ottengo:

$$\frac{\Delta x}{\Delta ct} = \frac{\Delta x' + \beta \Delta ct'}{\beta \Delta x' + \Delta ct'}$$

Il rapporto tra distanza spaziale e temporale tra due eventi.

Se 2 eventi avvengono contemporaneamente sull'astronave del viaggiatore, allora l'equazione precedente può essere riscritta come:

$$\beta_t = \frac{\beta_v + \beta}{1 + \beta_v \beta}$$

Essendo:

β_t la velocità relativa della nave vista dal terrestre

β_v la velocità "sentita" dal viaggiatore

β la velocità "reale" della nave, ovvero v/c

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE" (3)

Ma l'astronave subisce un'accelerazione…

Differenzio l'equazione precedente e ottengo:

$$d\beta_t = \frac{1-\beta^2}{(1+\beta_v\beta)^2}\,d\beta_v$$

Per β_v bassa il denominatore tende a 1, per cui lo elido.

Inoltre essendo l'accelerazione "a"

$$a = c\,\frac{d\beta_v}{dt\,'}$$

Allora ottengo:

$$d\beta_t = (1-\beta^2)\left({}^{a}/_{c}\right)dt\,'$$

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE" (4)

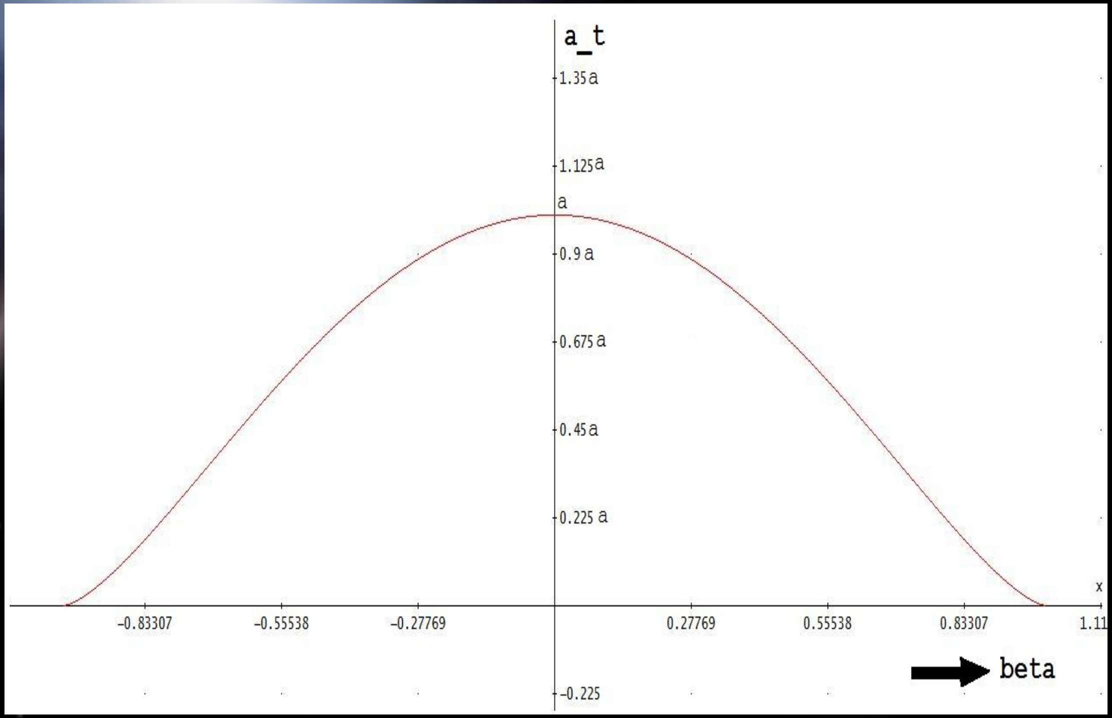
Ma allora l'accelerazione "a" costante del viaggiatore, come è vista dalla terra?

Siccome dalle trasformazioni di Lorentz (slide 3) risulta che

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

La terra vedrà l'astronave accelerare seguendo l'andamento $a_t(\beta)$

$$a_t = a\sqrt{(1-\beta^2)^3} = \frac{a}{\gamma^3}$$



IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE" (5)

"La terra vedrà l'astronave diminuire il valore dell'accelerazione al crescere della velocità dell'astronave stessa in funzione di γ^{-3}, funzione del tempo"

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE" (6)

La velocità apparente dell'astronave vista dalla terra, β_t , è esprimibile come

$$\beta_t = \frac{dx_t}{c\,dt}$$

Integro e ottengo la traiettoria (un'iperbole) nello spazio-tempo causata dall'accelerazione dell'astronave (costante per il viaggiatore) non costante per il terrestre:

$$x_t = \frac{(\gamma_t - 1)c^2}{a}$$

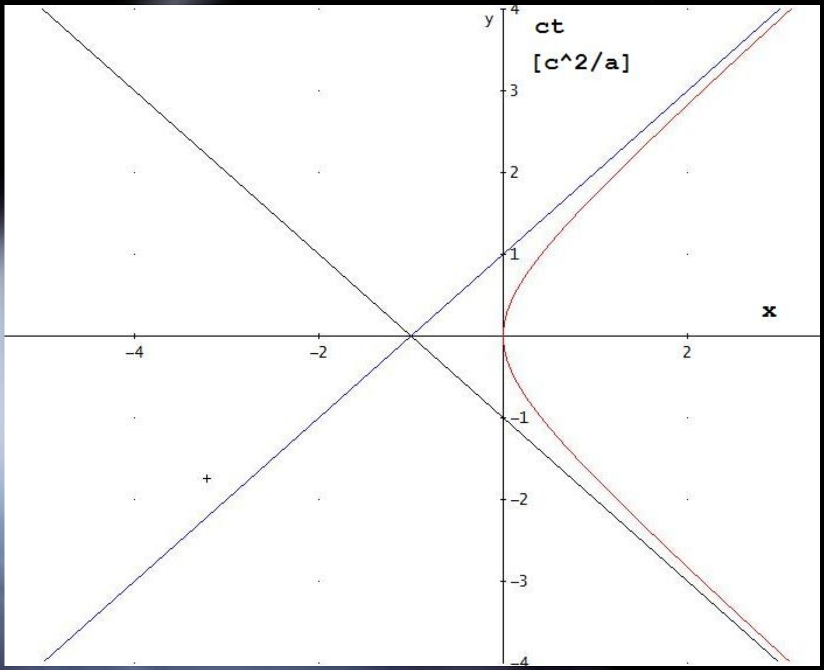
Essendo

$$\gamma_t = \sqrt{1 + \left({}^{at}/_{c}\right)^2}$$

il fattore γ sperimentato dal terrestre nei confronti del viaggiatore

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "TERRESTRE" (7)

Il diagramma x-ct è il seguente:



Il cono di luce rappresenta gli asintoti dell'iperbole, ovvero della rappresentazione grafica del moto del viaggiatore visto dal terrestre, in metrica di Rindler, inoltre rappresentano anche il cono di luce generato da un evento lontano, a t=0, c^2/a dall'astronave

Ma allora l'astronave **non potrà** ricevere nessun impulso luminoso se questo, nel sistema di riferimento della terra, parte da una distanza dall'astronave maggiore o uguale a ***c^2/a***, almeno finchè conserva un'accelerazione costante, ovvero finchè è confinata nell'iperbole…

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL “TERRESTRE” (8)

“L’accelerazione porta alla conseguente formazione di una zona da cui non arrivano informazioni, confinate all’interno di un cosiddetto orizzonte degli eventi”

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL "VIAGGIATORE"

Adesso vediamo cosa succede al viaggiatore quando è sottoposto ad un'accelerazione costante:

Il suo tempo proprio t_v si dilata, rispetto a quello del terrestre, secondo la relazione

$$dt_v = {dt}/{\gamma_t}$$

Come indicato dalle relazioni della slide 3

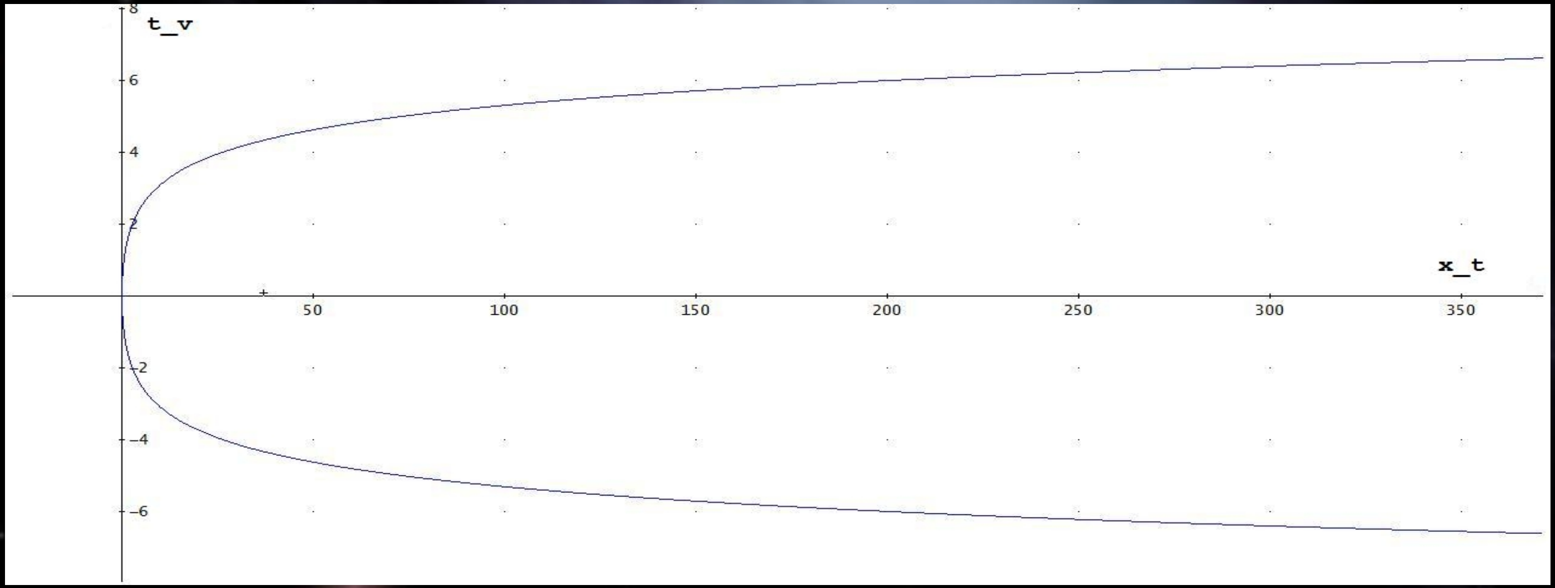
Ricordando cosa è γ_t , integrando l'equazione e sostituendo nell'equazione dell'iperbole…

$$x_t = \left({c^2}/{a}\right) * \left[-1 + Cosh\left({at_v}/{c}\right)\right]$$

S. di R. DEL "VIAGGIATORE" (2)

$$x_t = \left(c^2/a\right) * \left[-1 + Cosh\left(at_v/c\right)\right]$$

Tale funzione esprime lo spazio percorso dal viaggiatore, misurato nello spazio del terrestre (x_t), ma con il suo tempo proprio (t_v). Il rallentamento del tempo dell'astronave lo porta a coprire distanze sempre più grandi in uguali intervalli del suo tempo, man mano che si avvicina alla velocità della luce, per il SR della terra, o ad una velocità infinita, nel suo SR in cui ha accelerazione costante.



S. di R. DEL “VIAGGIATORE” (3)

Il viaggiatore si considera fermo, e vede il terrestre allontanarsi da lui con un certo moto dipendente dal suo tempo proprio. Non essendo soggetto ad accelerazione, secondo tale punto di vista, stiamo considerando un SRI che in vari istanti infinitesimi si muove seguendo il viaggiatore

La velocità con cui si muove il terrestre, β_e, è condizionato da un fattore γ_e esattamente come nel caso precedente in cui il terrestre vedeva l’accelerazione del viaggiatore diminuire al crescere della sua velocità.

Prima di tutto ricaviamo il γ_t in funzione di t_v , mettendo a sistema le due equazioni trovate precedentemente per x_t:

Eseguendo le semplificazioni:

$$(\gamma_t \cancel{-1})\left(\cancel{c^2/a}\right) = \left(\cancel{c^2/a}\right) * \left[\cancel{-1} + Cosh\left(at_v/c\right)\right]$$

S. di R. DEL "VIAGGIATORE" (4)

$$\gamma_t = Cosh\left({}^{at_v}/_c\right)$$

Ma allora il SRI istantaneo del viaggiatore (SRII) vedrà il terrestre allontanarsi ad una velocità deformata dal fattore:

$$\gamma_e = Cosh\left({}^{at_{nv}}/_c\right)$$

La differenza sta nei valori ***t***: nella prima equazione ho il tempo del viaggiatore come è visto dal terrestre, mentre nella seconda equazione il tempo è quello che il viaggiatore misura "su se stesso"…

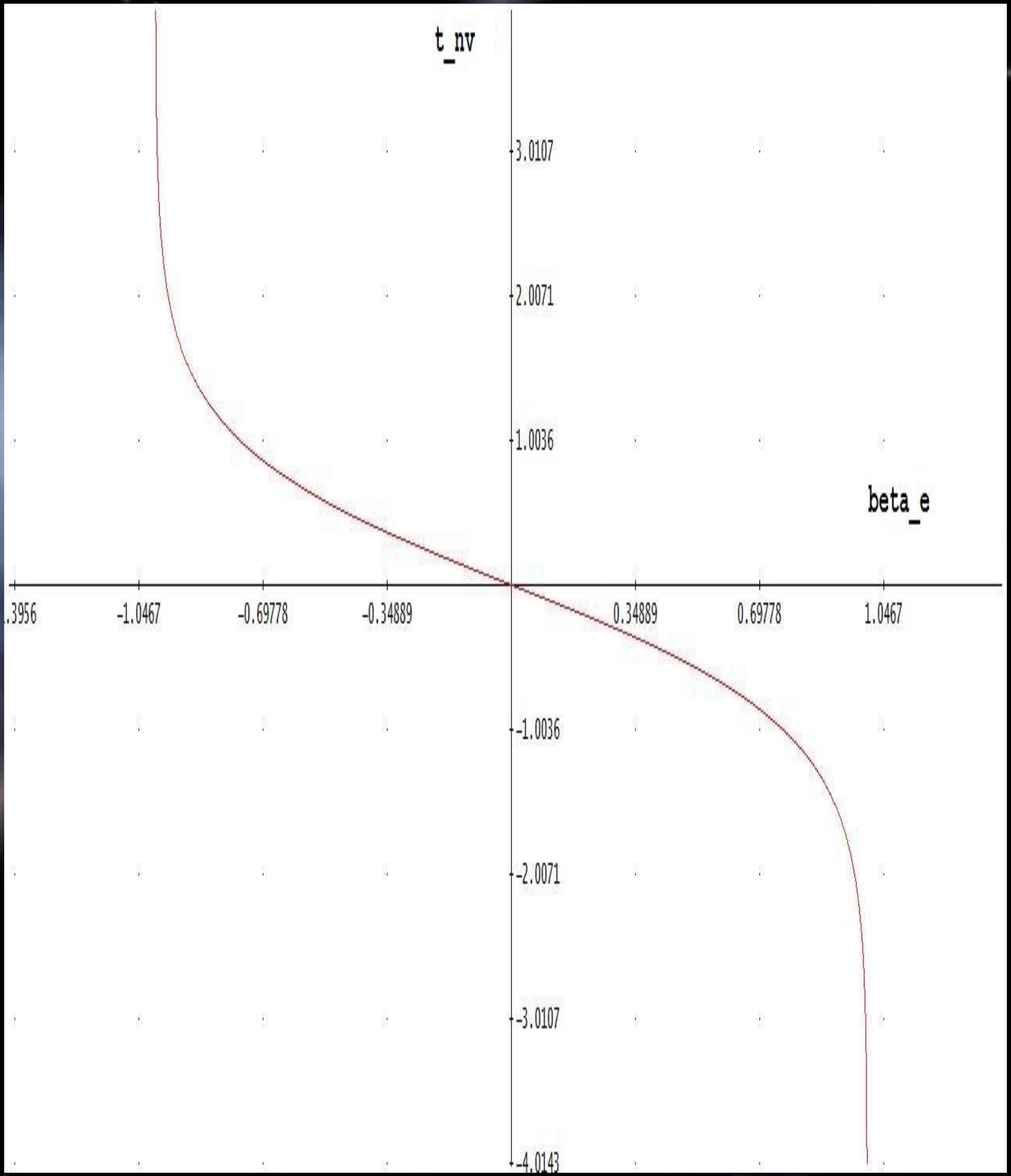
Il viaggiatore vede costante il suo tempo, ma vedrà la terra muoversi ad una velocità

$$\beta_e = -Tanh\left({}^{at_{nv}}/_c\right)$$

S. di R. DEL "VIAGGIATORE" (5)

$$\beta_e = -Tanh(^{at_{nv}}/_{c})$$

La terra non risulta muoversi a velocità maggiore di quella della luce …



S. di R. DEL "VIAGGIATORE" (6)

Bisogna precisare che il SRII non si muove in maniera continua: Supponiamo che a $t_s=0$ il viaggiatore coincide con un SRII. Sempre a $t_s=0$ il viaggiatore subisce un'accelerazione breve che lo porta in un'altra posizione in un lasso di tempo Δt_{nv} prima di terminare e lasciare il viaggiatore ad una velocità diversa da quella di partenza; l'accelerazione media è

$$a = \frac{\beta_v \, c}{\Delta t_{nv}}$$

Nello spostamento accelerato avvenuto in Δt_{nv} il viaggiatore e il terrestre hanno misurato diverse quantità spazio-temporali, questo perché, come detto prima (slide 14), t_{nv} ha un diverso andamento diverso rispetto a t_v.

Risolvendo le relative trasformazioni di Lorentz e abbandonando il concetto di SRII, passando ad un'accelerazione continua e uniforme, otteniamo le funzioni che descrivono la velocità e la dilatazione temporale che il viaggiatore subisce.

S. di R. DEL "VIAGGIATORE" (7)

La velocità diventa:

$$\beta_e^* = \beta_e\left(1 + \frac{a x_e}{c^2}\right)$$

Il tempo invece invece:

$$\frac{dt_{nv}}{dt_v} = \frac{1 + \frac{a x_e}{c^2}}{\gamma_e}$$

E' interessante notare che se poniamo

$$x_e = -\,{c^2}/{a}$$

Allora sia la velocità che il tempo sono visti dal viaggiatore uguali a ZERO

S. di R. DEL “VIAGGIATORE” (8)

“Il viaggiatore, durante gli istanti in cui è soggetto ad accelerazione costante, subirà la presenza di un orizzonte degli eventi a distanza costante da lui e inversamente proporzionale all’accelerazione da lui percepita”

…DIFFERENZE e CONSIDERAZIONI…

La metrica di Rindler mostra come un oggetto in accelerazione costante, visto da un SRI, non viene mai raggiunto, se non all'infinito, da un impulso nato troppo indietro rispetto alla sua posizione

Invece l'orizzonte degli eventi ricavato dal SR del viaggiatore è la zona in cui la dilatazione temporale osservata dal viaggiatore stesso è infinita, per cui la luce "viaggia a velocità zero" in quanto in "un tempo che non trascorre" la luce non può percorrere spazio, a causa della sua velocità finita

In parole più semplici, all'orizzonte degli eventi il terrestre vede il cono di luce formarsi e viaggiare alla sua consona velocità, senza però mai includere il viaggiatore; mentre il viaggiatore vede dietro di se una zona in cui il tempo è così dilatato che la luce non riesce a partire in un tempo finito: i coni di luce vengono distorti in un SR non inerziale

IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Fondamentalmente tale principio identifica con la stessa quantità numerica la massa inerziale, ovvero l'inerzia che un corpo ha nel subire una forza, e quella gravitazionale, ovvero in che modo il corpo risente degli effetti di un campo gravitazionale

Un osservatore che è quindi soggetto ad una forza "peso", non può capire se la forza è generata da un'accelerazione in senso opposto o ad un'accelerazione gravitazionale nella stessa direzione della forza peso…

CONSEGUENZE

Un corpo sospeso in un potenziale gravitazionale costante, subisce gli stessi effetti di un ugual corpo che subisce un'accelerazione costante in verso opposto…

Ma allora questo significa che anche in un potenziale gravitazionale si possono sperimentare effetti come la dilatazione del tempo e la presenza dell'orizzonte degli eventi

E' stato provato sperimentalmente che due orologi vanno a velocità diverse in base all'intensità del campo gravitazionale a cui sono soggetti

Mentre è sono state mostrati effetti che sono causati dalla osservazione indiretta di buchi neri, ovvero di oggetti aventi un potenziale gravitazionale così elevato da distorcere lo spazio tempo in maniera "infinita" in un loro intorno ben determinato.

CONSEGUENZE (2)

Ma allora, dalle precedenti equazioni per il sistema in accelerazione

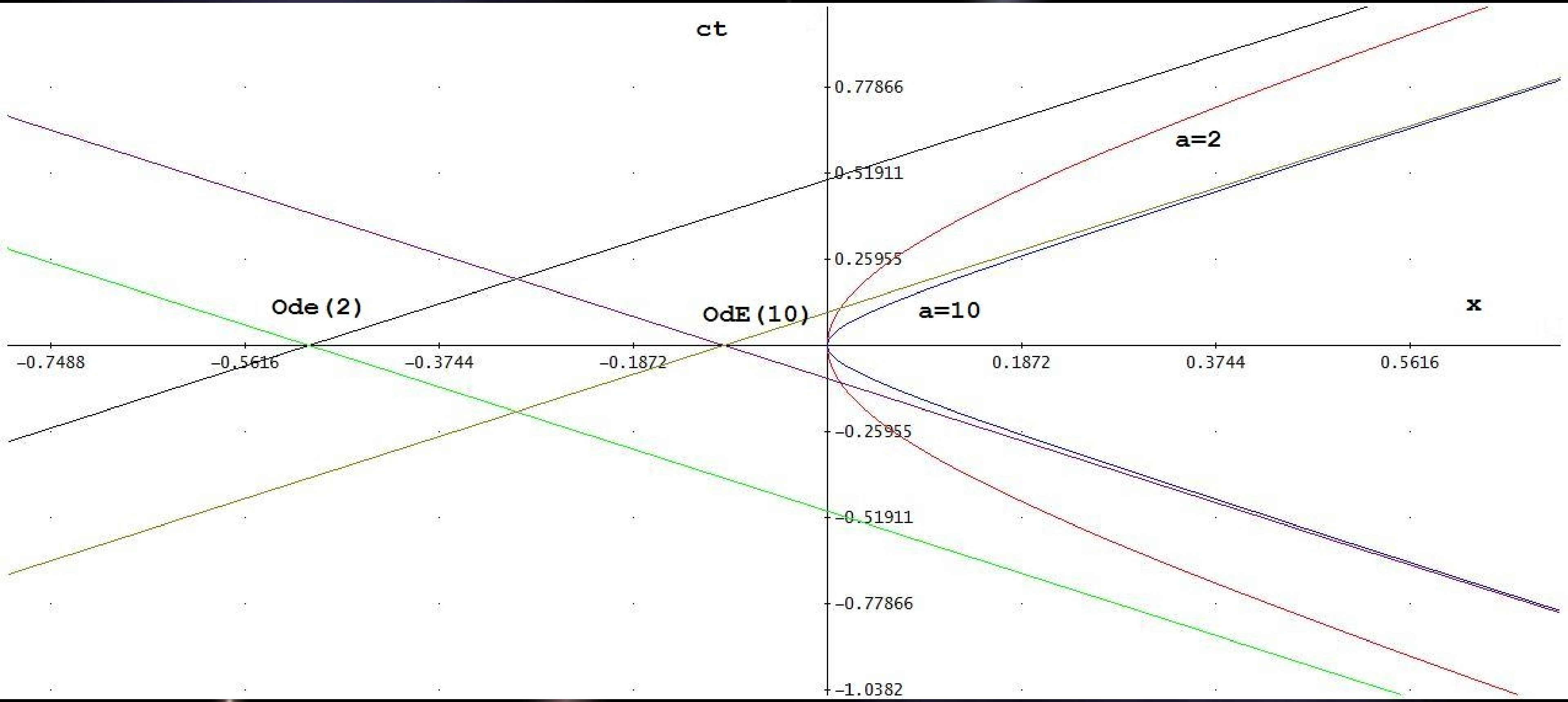
$$\beta_e^* = \beta_e\left(1 + \frac{a x_e}{c^2}\right) \qquad \frac{dt_{nv}}{dt_v} = \frac{1 + \frac{a x_e}{c^2}}{\gamma_e}$$

Risulta chiaro che un oggetto in moto uniformemente accelerato vede il mondo che lo circonda come se lui fosse fermo in un potenziale gravitazionale generato da una sorgente, ovvero non costante nello spazio: infatti entrambe le equazioni presentano una dipendenza non solo dall’accelerazione, ma anche dalla distanza dal punto in cui si trova il sistema accelerato

Vedrà diverse velocità e diverse deformazioni temporali per eventi a diversa distanza da lui, in base al potenziale gravitazionale apparente a cui tali eventi sono posti rispetto al viaggiatore

“PSEUDOGRAVITA’”

Il grafico mostra due oggetti, visti da un SRI, in metrica di Rindler, a diversi valori di accelerazione:



A t=0 entrambi si trovano in un certo punto del diagramma di Minkowsky. L’accelerazione cambia, così come il loro orizzonte degli eventi… ma…

"PSEUDOGRAVITA'" (2)

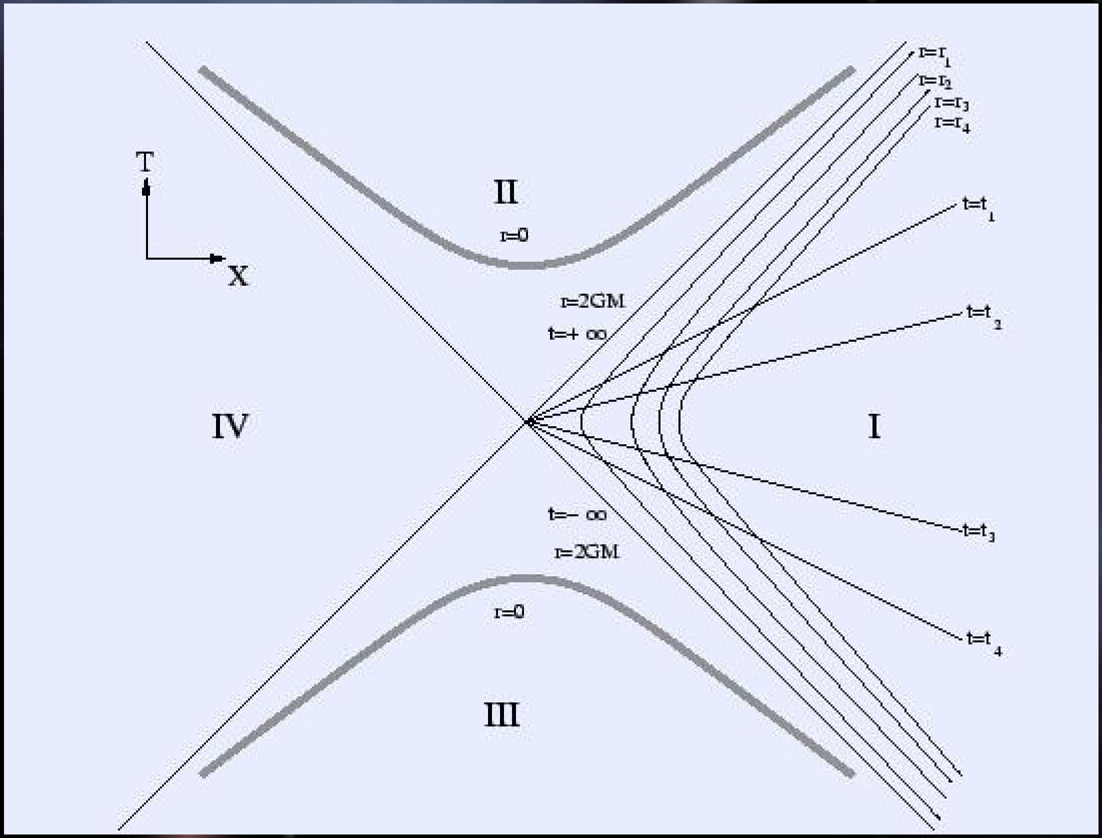
L'iperbole per a=2 è più larga di quella per a=10, ed il suo orizzonte degli eventi è più distante.

Supponiamo di prendere un oggetto che si muove ad a=2 ma consideriamo l' O.d.E. di a=10… Risulta chiaro che l'iperbole interseca le due rette

Quindi se un oggetto si trova distante $c^2/(a=10)$ da un orizzonte degli eventi, ma la sua accelerazione è a=2, allora tale oggetto cadrà all'interno di esso… esattamente come un buco nero attrae un oggetto che non ha sufficiente forza per allontanarsi.

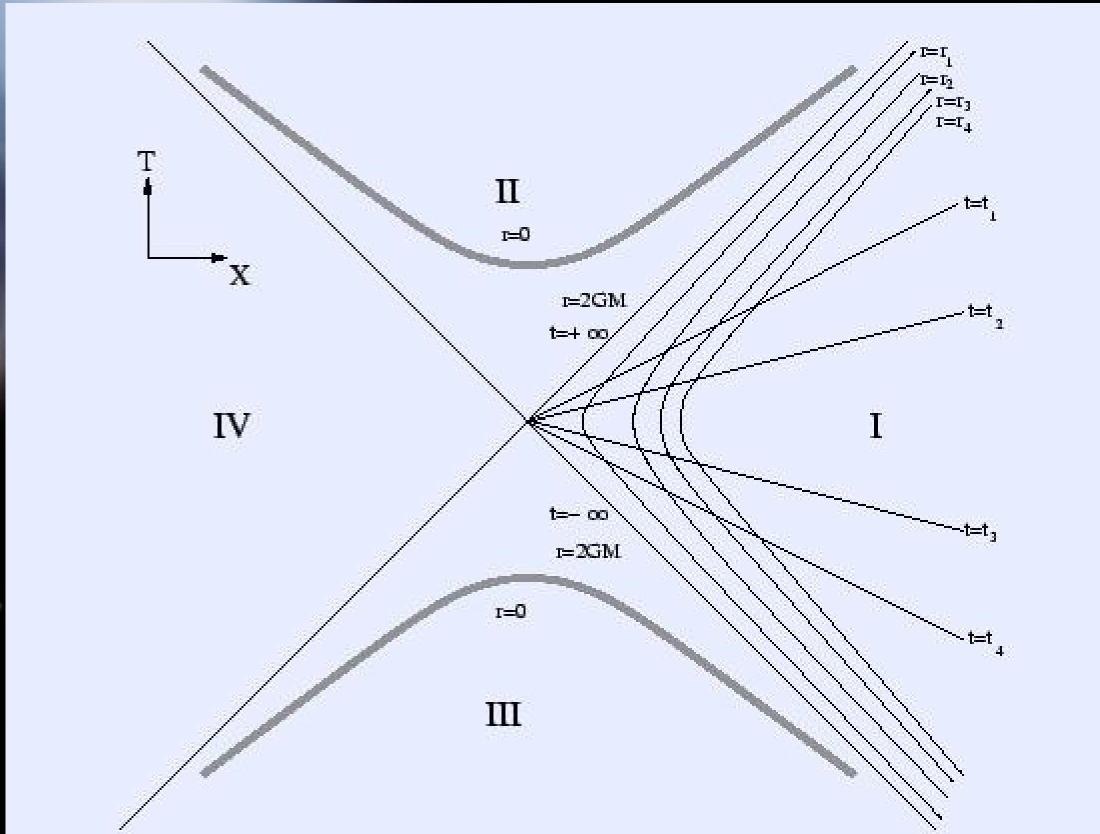
…KRUSKAL…

Con qualche “semplice” modifica quindi la metrica di Rindler può essere modificata per esprimere il comportamento dei corpi nei pressi di singolarità gravitazionali… Si ricorre ai cosiddetti diagrammi in metrica di Kruskal



…KRUSKAL… (2)

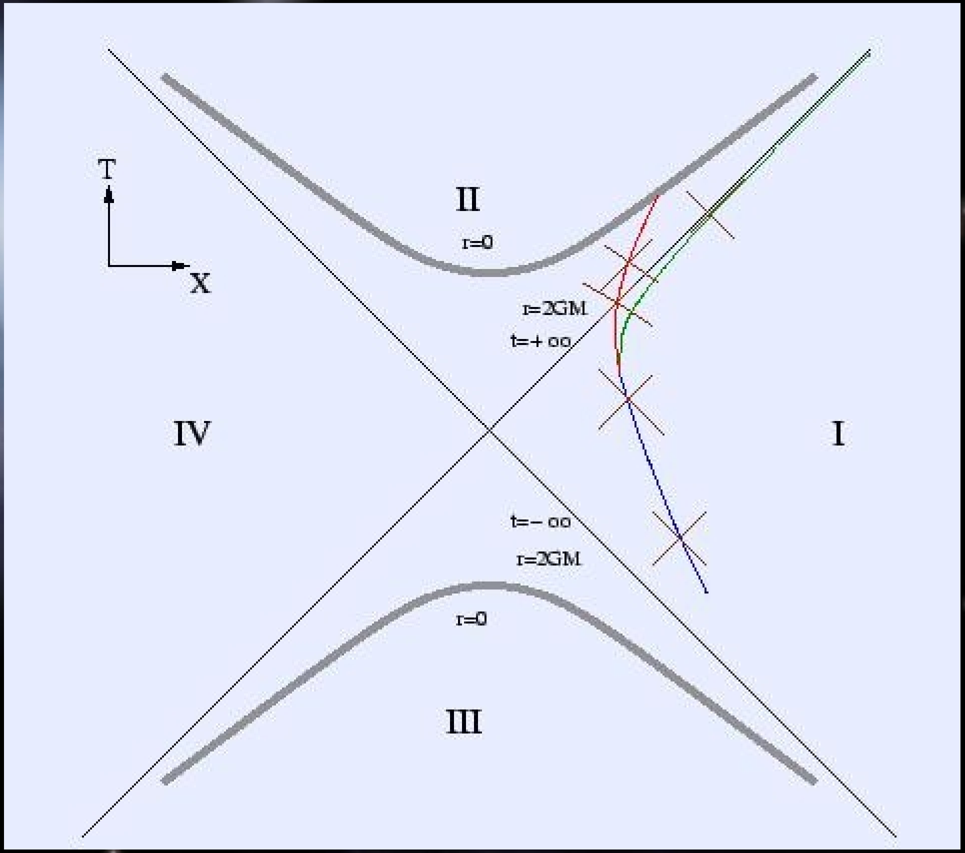
Molto simile a quella di Rindler, ma adesso fisso l'orizzonte degli eventi a r raggio di Swarzshild, e introduco la singolarità di densità infinita come un'iperbole nei quadranti II e III. Diversi valori di accelerazione costante sono diverse iperboli nel quadrante I… Più la loro curvatura è poco accentuata,più è bassa la loro accelerazione… anche in questo caso se avvicino all'origine degli assi un'iperbole troppo "larga", questa attraversa il raghgio di Swarzshild



…IN CADUTA…!!!

Un oggetto (rosso) che impatta nel buco nero, e uno che riesce a salvarsi (verde) (non hanno accelerazione costante e non seguono un'iperbole)

L'unico modo affinchè il rosso si allontani dal buco nero è quello di assumere una traiettoria nello spazio tempo con dei punti in cui supera la velocità della luce (a tangente meno inclinata degli asintoti)… cosa impossibile



…IL GEMELLO SFIGATO…

Supponiamo che il viaggiatore acceleri uniformemente: Il suo orizzonte degli eventi si avvicina in maniera proporzionale all'accelerazione in quel momento, e raggiungerà il gemello quando questi, secondo il suo punto di vista, raggiungerà un'accelerazione infinita

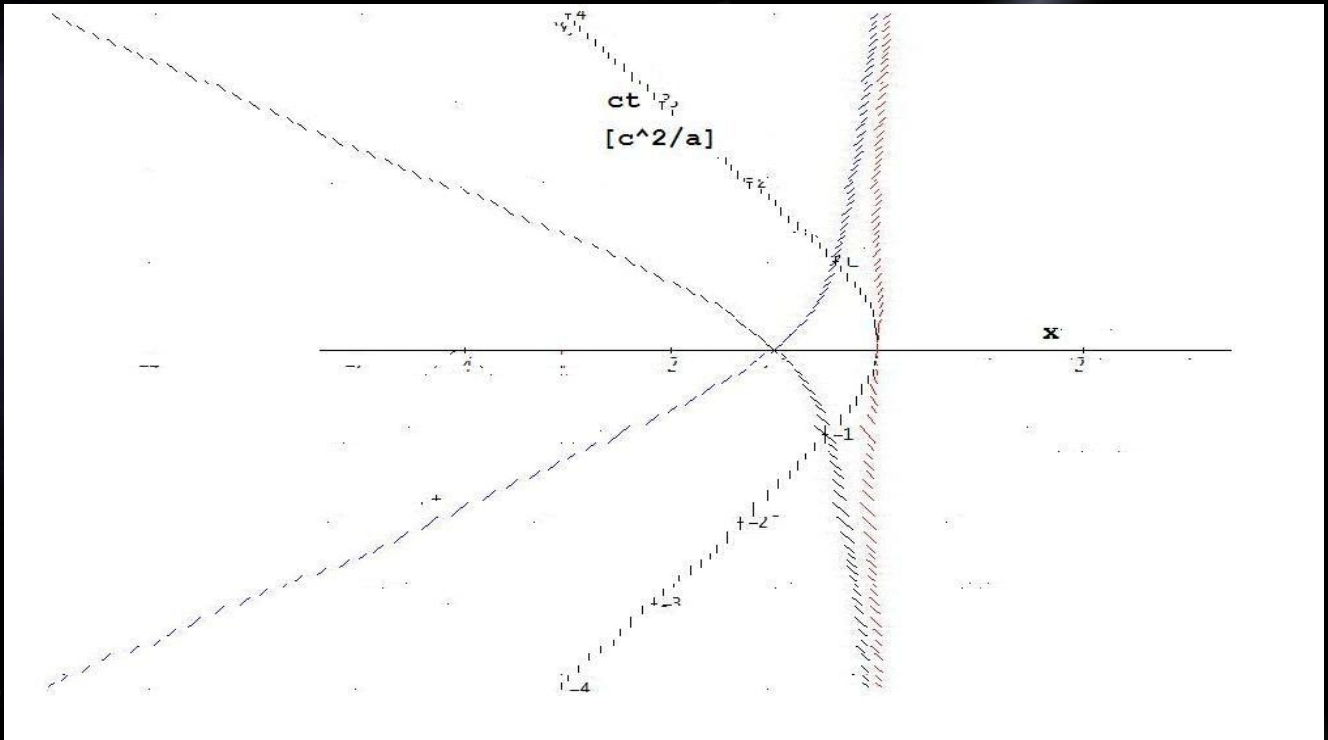
Mentre vede l'orizzonte dietro di lui, il gemello vede il tempo avanti a lui fluire più velocemente, fino a vedere il suo fluire inalterato per un evento a distanza infinita davanti a lui, così come gli orologi a diverso potenziale

Ma quindi se il viaggiatore invece cadesse in un buco nero il suo tempo si dilaterebbe sempre più agli occhi del terrestre, che infine lo vedrebbe fermo e con redshift infinito, sulla superficie dell'orizzonte. Invece nel suo SR il gemello attraverserebbe fisicamente l'orizzonte senza problemi e impatterebbe sulla singolarità… La metrica di Kruskal serve appunto ad osservare cosa accade al corpo in caduta dal punto di vista di un SRI, eliminando quella che per un SRI è una singolarità, ovvero l'orizzonte degli eventi.

DEFORMAZIONE DEL CONO DI LUCE

Il moto accelerato in metrica di Rindler è esprimibile come un'iperbole. Ma se il viaggiatore è immerso in un campo gravitazionale, ne subisce l'accelerazione pur restando fermo: essendo fermo la sua traiettoria nello spazio tempo è una retta verticale: "Addrizzando" l'iperbole si simula tale situazione (credo: me la sono ricavata io…): il viaggiatore è fermo, ma la gravità gli fa subire gli effetti di una accelerazione: quello che era il cono di luce adesso si distorce, perché nella trasformazione adesso è l'asse ct ad avere la curvatura di un iperbole: e il cono di luce segue di conseguenza l'asse nella sua trasformazione.

DEFORMAZIONE DEL CONO DI LUCE



La forza di gravità non fa rallentare la luce ma deforma la percezione del tempo dell'accelerato tramite la deformazione dei coni di luce, proprio a causa dell'accelerazione impressa all'accelerato stesso: L'orizzonte degli eventi in realtà non esiste; è una singolarità solo ed esclusivamente per chi è soggetto alla gravità: un'astronave ferma che in quella posizione riuscisse a non risentire dell'accelerazione gravitazionale vedrebbe i coni di luce non distorti, e quindi la superficie della singolarità.

STO ACCELERANDO O NO?

L’asse ct della figura precedente è un’iperbole: questo può essere anche interpretato, tornando ai gemelli, come se il viaggiatore restasse fermo e il terrestre partisse con un’accelerazione costante: infatti nella figura del moto del viaggiatore (slide 9) l’asse ct è anche la traiettoria percorsa dal terrestre nello spazio-tempo: la traiettoria di un oggetto fermo. Quindi, l’uso dei SRII dell’accelerato consiste nel considerare fermo l’accelerato, dando tutti gli effetti dell’accelerazione al terrestre: ma allora perché l’accelerato invecchia più tardi?

La figura di slide 12 è la chiave… Lì infatti non è evidente, ma si considera un terzo SRI: un sistema in cui c’è un operatore che riesce a leggere il fluire del tempo sull’astronave standone fuori, e vedendola percorrere lo spazio nel SRI del terrestre.

Se questo terzo SRI lo prendessimo coerente col moto dell’astronave, in maniera tale che veda l’astronave come ferma, alla fine del viaggio il tempo sarebbe passato più lentamente per il terrestre, che risulterebbe più giovane dell’astronauta, sempre considerando l’esperienza dell’operatore di tale SRI.

RINGRAZIAMENTI…

Ringrazio il **Prof. Menichetti** che spero mi dia sti 3 crediti sudati come se dovessero essere 10.

Ringrazio **il sottoscritto** per non essere morto durante la stesura della presentazione, ne' per aver dato segni di pazzia.

Ringrazio **il dottor Agostino** per essersi assentato, andando a Grenoble, lasciandomi il tempo per stendere la presentazione senza dover anche andare in laboratorio per la tesi… che mi piace fare, ma occupa tantissimo tempo.

Ringrazio **la rete Fastweb del collegio** che è saltata per un giorno intero, così da impedirmi di perdere tempo e concentrarmi sulla presentazione.

NON ringrazio **la tastiera,** a cui manca il tasto E e a volte mette E al posto di A e viceversa