Onde, radiazione e relatività

“Correct use of Lorentz–Einstein transformation equations for electromagnetic fields”

Oleg D Jefimenko

Onde, radiazione e relatività

Le trasformate di Lorents (in condizioni standard)

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Vengono utilizzate per ricavare le coordinate di un evento nello spazio-tempo in un sistema di riferimento in movimento rispetto a un altro sistema di riferimento

Onde, radiazione e relatività

Nella risoluzioni di problemi su condensatori piani in movimento, che quindi subiscono la contrazione di Lorentz, viene spesso affermato che la lunghezza è ridotta di un fattore γ, di conseguenza anche la densità superficiale di carica σ crescerà di un fattore γ.

Per la legge di Gauss, la relazione tra campo elettrico fermo e in movimento sarà

$$E_m = \gamma E$$

Onde, radiazione e relatività

La stessa soluzione viene ottenuta usando la trasformazione di Lorentz relativa alla componente perpendicolare del campo elettrico (considerando che non c'è campo magnetico nel caso stazionario).

Si ottiene, nel caso in cui si analizzi un filo anziché un condensatore piano

$$E_m = \gamma\lambda / (2\pi\varepsilon_0 r\hat{\ }2) = \gamma\ E$$

Onde, radiazione e relatività

Se però si cerca tale soluzione come integrazione della funzione di Heaviside del campo elettrico per un punto carico in movimento si ottiene:

$$E_m = r\, q(1 - v^2/c2)/(4\pi\varepsilon_0 r^3)[1-(v^2/c2)\sin^2\theta]^{3/2}$$

che può essere ricondotto a

$$E_m = \lambda \,/\, (2\pi\varepsilon_0 r^2) = E$$

Il campo in movimento è uguale a quello stazionario

Onde, radiazione e relatività

La stessa soluzione la si può ottenere anche per fili di lunghezza non infinita sia con il calcolo di integrali di campo che dalle trasformate relativistiche.

Ma se quest'uguaglianza ($E_m = E$) vale per un filo carico infinito che si muove lungo la sua lunghezza e il suo corrispettivo fermo, lo stesso varrà per un condensatore piano che si muove lungo la direzione del suo piano e lo stesso condensatore fermo.

Onde, radiazione e relatività

Considerando ora la relazione tra campo elettrico e densità di flusso di campo magnetico si ha

$$B_m = (v \times E_m) / c^2$$

Se si considerassero corrette le prime soluzioni ottenute ($E_m = E$) si otterrebbe che il flusso di campo magnetico del condensatore è

$$B_m = \gamma \mu_0 \sigma v \mathbf{k}$$

usando $E = (\sigma/\varepsilon_0)\,\mathbf{j}$ e $c^2 = 1/\,\varepsilon_0\,\mu_0$

Onde, radiazione e relatività

E sempre considerando corretta l'equazione

$$E_m = \gamma\lambda / (2\pi\varepsilon_0 r\text{^}2) = \gamma E$$

si otterrebbe per il campo magnetico

$$B_m = (\gamma\lambda\mu_0 / 2\pi r^2)\ \mathbf{v} \times \mathbf{r}$$

Onde, radiazione e relatività

Considerando invece corretta $E_m = E$

Si hanno rispettivamente i campi magnetici

$$B_m = \mu_0 \sigma v \mathbf{k}$$

e

$$B_m = (\lambda \mu_0 / 2\pi r^2) \, \mathbf{v} \times \mathbf{r}$$

Onde, radiazione e relatività

Nell'elettrodinamica Maxwelliana la densità di corrente è ρv, e quella di una carica filiforme che si muove lungo la sua lunghezza è λv.

Da qui, tramite la legge di Ampere, il campo magnetico risulta essere

$$B_m = (\lambda\mu_0 / 2\pi r^2)\ \mathbf{v} \times \mathbf{r}$$

e quello elettrico

$$E_m = \lambda / (2\pi\varepsilon_0 r^2) = E$$

Onde, radiazione e relatività

Se si supponesse che la densità di corrente fosse $\gamma\rho v$, così rendendo valide le altre equazioni, si andrebbe a invalidare le equazioni Maxwelliane che coinvolgono ρv in $\nabla \times H$ e non $\gamma\rho v$

Onde, radiazione e relatività

Se si accetta l'elettrodinamica e le equazioni di Maxwell su cui essa si basa, si può affermare che le prime equazioni ottenute non sono corrette. Di conseguenza non lo sono nemmeno le basi grazie alle quali si sono ottenute, ovvero l'utilizzo di una sola delle equazioni del blocco di Lorentz e non il loro complesso.

Onde, radiazione e relatività

Ora consideriamo un carica filiforme di sezione S che si muove lungo la sua lunghezza parallela all'asse x.

Nel sistema di riferimento che si muove in maniera concorde con la carica in campo è

$$E' = (\lambda' / 2\pi\varepsilon_0 r^2)\ \mathbf{r}$$

Essendo r e $\mathbf{r} \perp$ v sono invarianti, le uniche quantità trasformabili sono E e λ

Onde, radiazione e relatività

Con quest'equazione e le trasformate di Lorentz-Einstein per il campo elettrico (componente perpendicolare) e per la densità di carica diventa

$$E_\perp = \gamma\,(E' - v \times B')_\perp$$

$$\rho = \gamma(\rho' + vJ'_x/c^2)$$

Onde, radiazione e relatività

Considerando che λ si trasforma come ρ essendo

$\lambda = \rho S$ e S invariante,

non essendoci ne corrente ne campo magnetico nel sistema in movimento concorde con la carica si ottiene l'equazione già precedentemente vista

$$E = (\lambda / 2\pi\varepsilon_0 r^2)\ \mathbf{r}$$

Onde, radiazione e relatività

Usando ora le equazioni per calcolare la componente perpendicolare del campo magnetico unitamente alle precedenti

$$B_\perp = \gamma\,(B' + v \times E'/c^2)_\perp$$

otteniamo

$$B = (\lambda\mu_0 / 2\pi r^2)\ \mathbf{v} \times \mathbf{r}$$

Onde, radiazione e relatività

L'equazione per il condensatori sono state ottenute considerando il condensatore sottile e le piastre parallele al piano xz e in movimento lungo l'asse x.

Nel sistema in movimento concorde con il condensatore il campo elettrico e

$$E_y' = \sigma' / \varepsilon_0$$

Le quantità trasformabili sono 2, e considerando che $\sigma' = \rho' \omega$ dove ω è lo spessore, e in questo sistema non c'è ne campo magnetico ne corrente si ha

$$E_y = \sigma / \varepsilon_0$$

Onde, radiazione e relatività

Questo conferma l'equazione $E_m = E$

Utilizzando nuovamente le equazioni

$$E_\perp = \gamma\,(E' - v \times B')_\perp$$

$$\rho = \gamma(\rho' + vJ'_x/c^2)$$

$$B_\perp = \gamma\,(B' + v \times E'/c^2)_\perp$$

Si ottiene

$$B = (\gamma v\,E_y' / c^2)\mathbf{k} = (\gamma v\,E_y / \gamma c^2)\mathbf{k} = \mu_0 \sigma v \mathbf{k}$$

Onde, radiazione e relatività

In conclusione, vi è un caso in cui si ottiene il corretto risultato utilizzando una sola delle equazioni delle trasformate di Lorentz-Einstein

Se si trasforma il campo elettrico di una carica lineare in movimento usando solo l'equazione della trasformata della carica e non quelle del campo elettrico, ma successivamente si usano le trasformate relativistiche delle forze, si ottiene il risultato correto.

Onde, radiazione e relatività

Alla stessa maniera, il risultato corretto si ottiene anche per la trasformazione del campo magnetico di una carica lineare che si muove lungo la sua lunghezza usando la trasformata della carica e non le equazioni per il campo, seguite dal'uso delle trasformazioni relativistiche delle forze.

Onde, radiazione e relatività

Quest’apparente contraddizione a quanto sostenuto prima è giustificata dal fatto che le trasformate relativistiche delle forze sono direttamente ricavate dalle equazioni di Lorentz-Einstein, quindi il loro utilizzo è un “surrogato” dell’utilizzo del blocco intero delle nostre trasformate.

Onde, radiazione e relatività

Le equazioni di Lorentz permettono di utilizzare le equazioni di Maxwell (e le loro soluzioni) in diversi sistemi di riferimento convertendole con il blocco delle trasformate.

Il significato fisico dei tali trasformate non sta in ciò che si può derivare da una o dall'altra equazione ma da ciò che il complesso permette di fare.