# Università degli studi Torino

## Facoltà di Scienze M F N


anno accademico 2006-2007

**introduzione alla relatività ristretta e alla radiazione**

Presentazione dell'articolo:

# Lorentz transformations with non conventional lines of motion


**Alberto Biancoli**

# Trasformate di Lorentz

| $S \rightarrow S'$ | $S' \rightarrow S$ |
|---|---|
| $x' = \gamma(x-vt)$ | $x = \gamma(x'+vt)$ |
| $y' = y$ | $y = y'$ |
| $z' = z$ | $z = z'$ |
| $t' = \gamma(t-x*v/c^2)$ | $t = \gamma(t'+x*v/c^2)$ |

**Dove :**

$\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$

$\beta = v/c$

**Con :**

**c velocità della luce**

**v velocità relativa di S e S'**

- **È possibile conoscere le coordinate spaziali e temporali passando da un sistema di riferimento inerziale S ad un altro sistema di riferimento inerziale S' e viceversa a patto di conoscere la loro velocità relativa.**

- **Le coordinate spaziali lungo le quali non avviene il moto sono lasciate invariate dalle TdL .**

- **Questo è un caso semplificato della realtà generale:**

  **Due corpi(e i sistemi di riferimento ad essi associati) si possono muovere lungo x,y,z e non soltanto parallelamente agli assi coordinati ma con un inclinazione reciproca di un generico angolo** $\theta$.

  **Esempio pratico:**

  **Un aereo che decolla (o che attera) sale (o scende) con una certa inclinazione rispetto al suolo.**

- **Problema :**

**Come trovare le T.d.L per dei sistemi di riferimento che si muovono secondo traiettorie inclinate tra loro?**

- **Soluzione :**

**Sviluppo di una matrice trasformazione che permette facilmente di ottenere le coordinate spaziali e temporali e che è stata saggiata mediante applicazione in alcuni casi fisici concreti.**

# Trasformate di Lorentz in 2D.

**Modello bidimensionale (più semplice algebricamente):**

**Il moto avviene nel piano x,y mentre z non è modificata dalle TdL.**

**Possiamo scrivere la matrice per una rotazione sul piano x,y in senso antiorario secondo un angolo** $\theta$:

-

$$R_{\theta} := \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

**Matrice di rotazione spaziale**

**Quindi :**

**x ’= x*cos$\theta$+y*sen$\theta$**

**y’ = -x*sin$\theta$ +y*cos$\theta$**

- **Aggiungendo la coordinata temporale la matrice diventa :**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \boxed{0} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \boxed{0} \\ \boxed{0 \quad 0} & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

**Il tempo è lasciato invariato dalla rotazione.**

**Non c'è effetto del tempo sulle coordinate x,y.**

**Quindi applicando la matrice rotazione $R_\theta$ alle coordinate x,y,t troviamo:**

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

**Con T = t poiché la rotazione spaziale lascia invariata la coordinata temporale.**

**La matrice di trasformazione di Lorentz per due sistemi di riferimento che sono in moto tra loro reciprocamente, alla velocità v, lungo l'asse x può essere scritta come:**

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v \cdot \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-v \cdot \gamma}{c^2} & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

**La y rimane invariata perché la trasformazione riguarda solo l'asse x.**

**Gli zeri indicano che non c'e effetto incrociato delle coordinate spaziali sul tempo.**

**Matrice di trasformazione Lorentziana di magnitudine v ($L_{xv}$) lungo l'asse x.**

- **Quando il moto è inclinato rispetto all'asse x di $\theta$ si può utilizzare la trasformazione $R_{(-\theta)}L_{xv}R_{(\theta)}$ applicata tra due vettori K e K' per ottenere le coordinate spaziali e temporali nel nuovo sistema di riferimento e viceversa.**

- **Tenendo presenti le proprietà di seno e coseno otteniamo:**

$$A := \begin{pmatrix} \gamma \cdot \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta & \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & -v \cdot \gamma \cdot c\,os\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & \gamma \cdot \mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta & -v \cdot \gamma \cdot \mathrm{sen}\,\theta \\ \dfrac{-v \cdot \gamma \cdot \cos\theta}{c^2} & \dfrac{-v \cdot \gamma \cdot \mathrm{sen}\,\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

- **La matrice A trasforma le coordinate (x,y,t) del vettore K nelle coordinate (x',y',t') del vettore K'.**.

- **Il sistema di riferimento di K’ visto da K si muove con velocità –v e quindi sostituendo in A :**

$$B := \begin{pmatrix} \gamma \cdot \cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & v \cdot \gamma \cdot \cos\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & \gamma \cdot \sin^2\theta + \cos^2\theta & v \cdot \gamma \cdot \sin\theta \\ \dfrac{v \cdot \gamma \cdot \cos\theta}{c^2} & \dfrac{v \cdot \gamma \cdot \sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

- **La matrice B trasforma le coordinate (x’,y’,t’) del vettore K’ nelle coordinate (x,y,t) del vettore K.**

- **Nota: in ogni sistema di riferimento l’altro è visto in movimento con un’inclinazione rispetto all’asse x o x’ dello stesso angolo $\theta$.**

- **Dalle semplici identità trigonometriche si può verificare che :**

**A*B = B*A = I** **matrice identità**

**e quindi se**

$$K := \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \qquad K^{1} := \begin{pmatrix} x^{1} \\ y^{1} \\ t^{1} \end{pmatrix}$$

**BBKKK=A=B*I*K KK**

- **Per visualizzare l'asse x' visto nel sistema**

**di riferimento di K imponiamo y'= 0 e t'=0**

**( questo e l' istante in K in cui tutti i punti hanno y'=0)**

- **Posta questa condizione otteniamo da K'= A*K la seguente equazione :**

$$a_{21} * x + a_{22} * y = 0$$

**Si vede facilmente che la pendenza di questa riga è negativa :**

-

$$\frac{-a_{21}}{a_{22}} := \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot (\gamma - 1)}{\gamma \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}$$

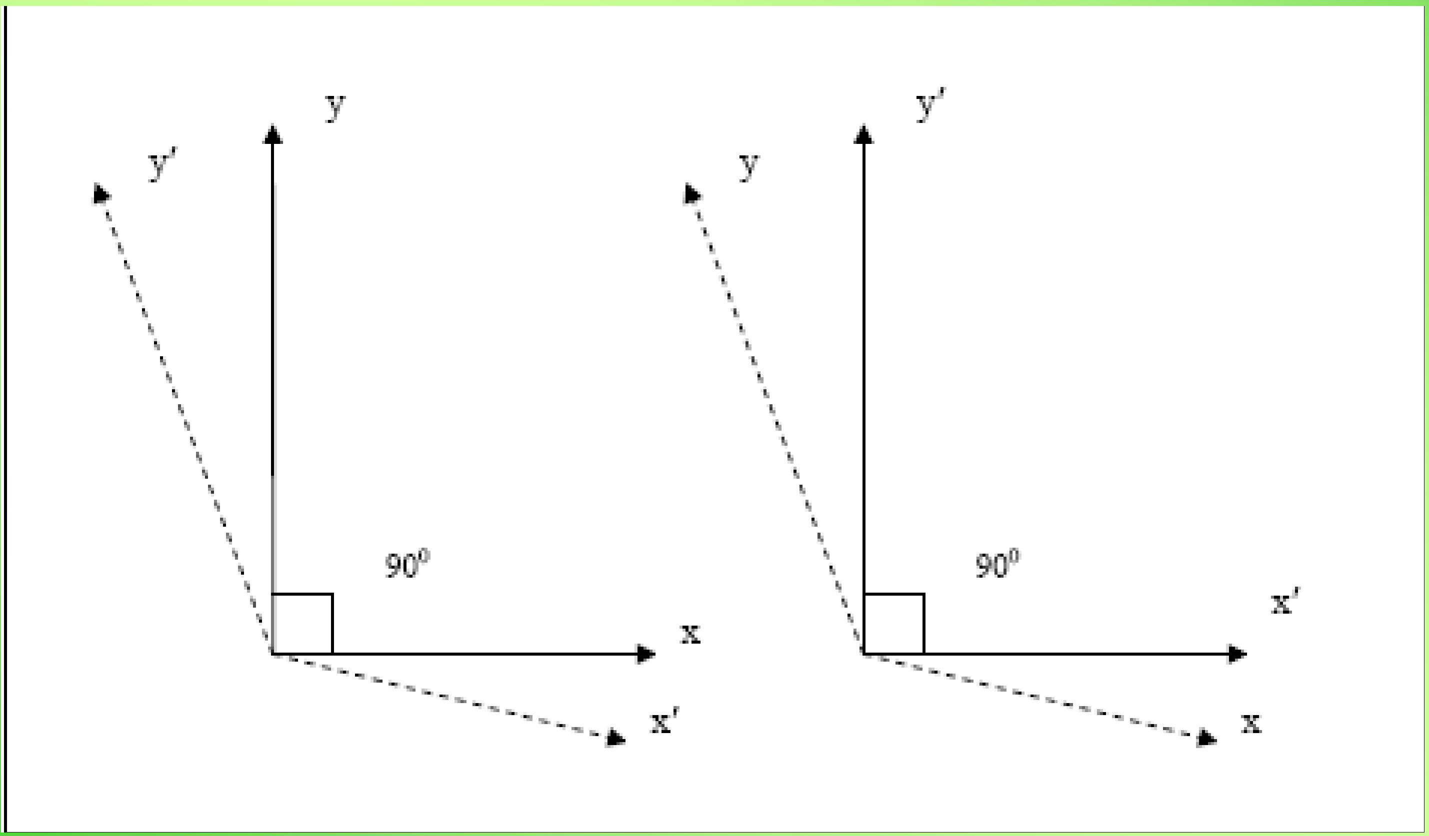
- **Questa riga non è allineata con l'asse x come conseguenza del fatto che l'angolo d'inclinazione rispetto all'asse delle ascisse visto da K e da K'è lo stesso.**

- **Di conseguenza la pendenza di x' vista dal s.d.r. di K è uguale alla pendenza di x vista dal s.d.r. di K'.**

- **Allo stesso modo la pendenza per gli assi y' e y è anche negativa.**

- **Quindi i due sistemi appaiono non ortogonali uno rispetto all'altro.**

**Visualizzazione di come appaiono gli assi dei due sistemi di riferimento uno rispetto all'altro :**



# Applicazione a casi fisici reali.

**La matrice di trasformazione trovata è stata impiegata nella risoluzione di alcuni problemi di fisica**:

- **Caso I : Oggetto in movimento rispetto ad una bastone in quiete.**
- **Caso II: Collisione di due bastoni che si muovono seguendo una traiettoria inclinata.**
- **Caso III : Problema della collisione di un bastone e con una buca**.

# Caso I

- **Consideriamo un bastone di lunghezza L in quiete e un oggetto in movimento alla velocità v .**

- **Qual è la lunghezza con cui appare il bastone per un osservatore che si muove solidalmente con il sistema di riferimento dell'oggetto nell' istante t' = 0?**

**Definiamo  due sistemi di riferimento :**

## F in cui

**L’asse x è allineato lungo l’asse del bastone.**

**I due estremi del bastone hanno coordinate (0,0) e (L,0).**

**Il moto dell’oggetto avviene lungo una direzione inclinata di un angolo $\theta$ rispetto all’asse del bastone (asse x).**

**Per ogni istante t le coordinate spazio-temporali del bastone**
**Sono (0,0,t) e (0,L,t).**

## O in cui

**L’asse x del sistema è allineato con la direzione del moto dell’oggetto.**

- **Il problema si può visualizzare in questo modo :**

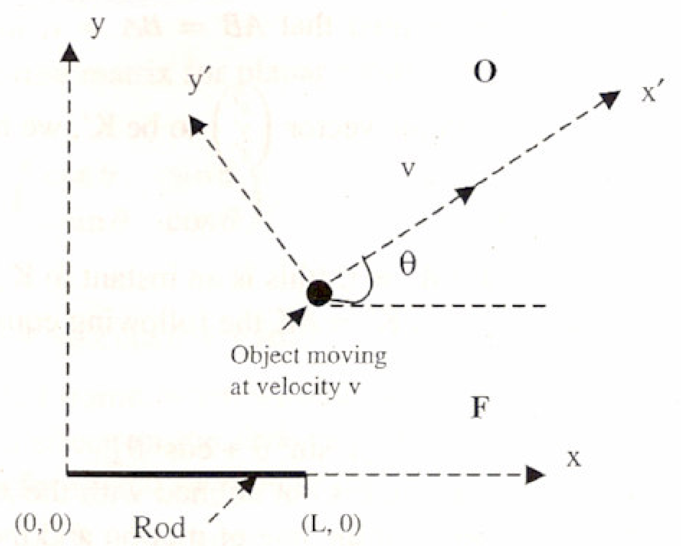



Figure 3. Rod in frame F and object in frame O moving at velocity $v$.

- **Per passare da F a O possiamo usare la trasformazione $L_{xv}R_{\theta}$ ottenendo:**

$$L_{xv} \cdot R_{\theta} := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v \cdot \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v\gamma}{c^2} & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Matrice di trasformazione T.**

- **Applicando la matrice T possiamo trasformare le coordinate degli eventi da F ad O.**

**In t = 0 le coordinate di un estremo del bastone passano da (0,0,0) in F a (0,0,0) in O.**

**Per conoscere le coordinate dell'altro estremo in O nell'istante t'=0 usiamo la matrice T:**

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ 0 \end{pmatrix} := T \cdot \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

**Ricavando le equazioni :**

**1) $x' = L\gamma\cos\theta - v\gamma t$**

**2) $y' = -L\mathrm{sen}\theta$**

**3) $0 = -(Lv\gamma\cos\theta)/c^2 + \gamma t$**

- **Risolvendo rispetto a t nella terza equazione e sostituendo nella prima abbiamo :**

$x' = (L \cos\theta)/\gamma$

**All'istante t'= 0 in O**

**Per un estremo**

$x' = 0$

$y' = 0$

**Per l'altro estremo**

$x' = (L \cos\theta)/\gamma$

$y' = -L \mathrm{sen}\theta$

**Inoltre la lunghezza del bastone vista da O risulta essere :**

$$L' = L*((\cos^2\theta/\gamma^2)+\mathrm{sen}^2\theta)$$

**Considerazioni finali :**

**$L' = L$ per $\gamma = 1$ (nessun moto relativo)**

**$L' = L/\gamma$ per $\theta = 0°$ (moto allineato con l'asse x)**

**$L' = L$ per $\theta = 90°$ ( nessuna variazione di lunghezza perpendicolarmente alla linea di moto).**

**Tutte consistenti con i ben noti concetti delle T.d.L.**

**O.K. il modello funziona!!!**

# Caso II

- **Consideriamo due bastoni di pari lunghezza L paralleli tra loro in moto inclinato di un angolo $\theta$ rispetto all'asse delle ascisse.**

- **Vogliamo conoscere il tempo di collisione nei due sistemi di riferimento.**

- **Gli assi x e x' vengono fatti coincidere con gli assi dei due bastoni.**

- **Le matrici A e B danno le trasformazioni diretta ed inversa tra i due vettori K e K'.**

- **Le coordinate di collisione dei due bastoni sono :**

| S.d.R | Top collision | Bottom collision |
|---|---|---|
| **K** | (0,0,0) | (L,0,t) |
| **K'** | (0,0,0) | (L,0,t') |

- **Graficamente si può visualizzare così :**



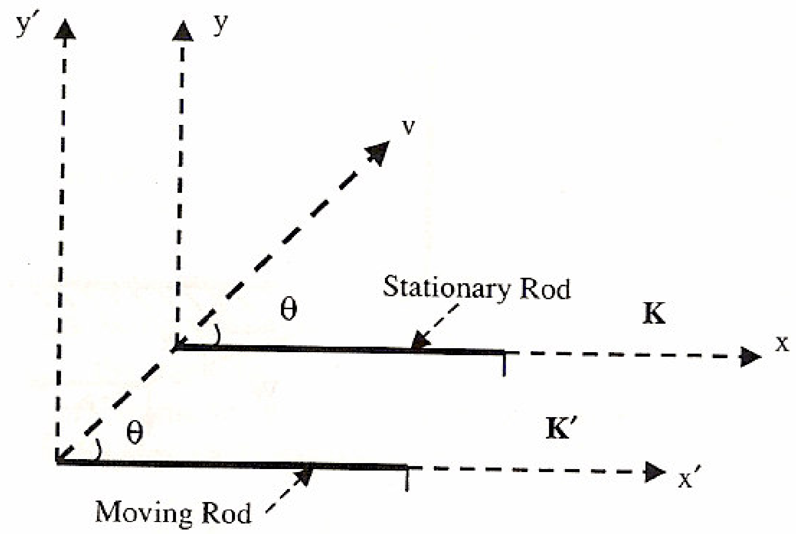



**Figure 4.** Rod in frame K′ moves towards stationary rod in frame K at velocity $v$.

- **Applicando la matrice A per trasformare (L,0,t) e ponendolo uguale a (L,0,t') si ottengono le seguenti equazioni :**

**1)** $(\gamma \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)L - (v^*\gamma \cos\theta)t = L$

**2)** $L\,\mathrm{sen}\theta * \cos\theta(\gamma-1) - (v^*\gamma\,\mathrm{sen}\theta)t = 0$

**3)** $-(v^*\gamma/c^2)L\cos\theta + \gamma t = t'$

- **Dalle equazioni 1 e 2 otteniamo lo stesso risultato per il tempo :**

$t = (L/\gamma)^*\cos\theta * [1 - (1 / \gamma)]$

**La ridondanza dipende dall'aver assunto per ipotesi che le due estremità del primo bastone collidano esattamente con le due estremità del secondo.**

- **Sostituendo il risultato trovato nella terza equazione si ricava :**

$$t' = (L/\gamma) * \cos\theta * [(1 / \gamma) - 1]$$

- **Conferma della reversibilità della collisione tra top e bottom dei due bastoni nei due istanti iniziali per due sistemi di riferimento in moto solidale con i bastoni.**

- **Ancora una volta si trova un risultato consistente con le proprietà delle T.d.L.**

**O.K. il modello funziona!!!**

# Caso III

- **Bastone in movimento lungo una direzione non allineata con nessuno dei due assi del sistema di riferimento collide con una buca.**

- **Vogliamo sapere se il bastone passa attraverso la buca.**

## Assunzioni del modello :

- **Il bastone si muove lungo due direzioni a velocità costante v.**

- **La linea di moto relativo (che congiunge il centro del bastone con la buca) non è allineata con nessuno degli assi né del bastone né della buca.**

- **Non c’è forza di gravità.**

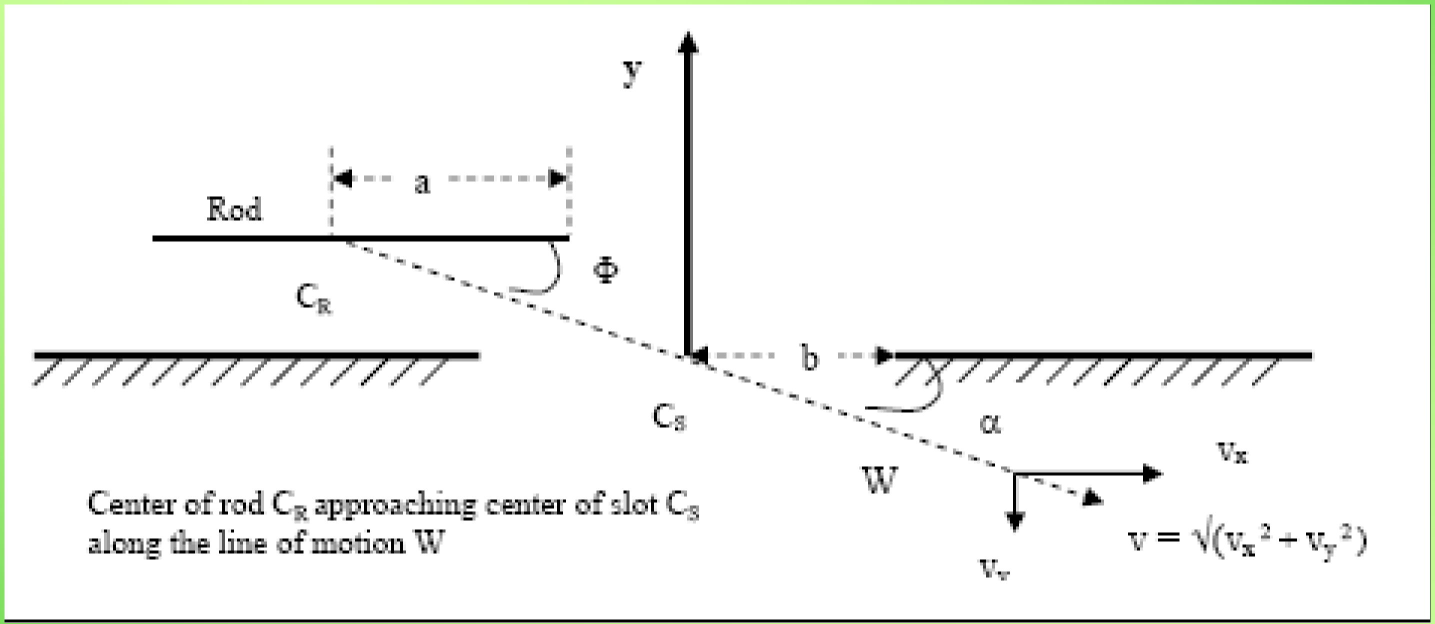
- **Non c‘è  stress o propagazione dello stress.**

- $\Phi$ **l'angolo tra l'asse del bastone e la linea di moto.**
- $\alpha$ **l'angolo tra l'asse della buca e la linea di moto.**
- **Il sistema di riferimento del bastone ha l'asse x coincidente con l'asse del bastone e l'origine al centro del bastone.**
- **Il sistema di riferimento della buca ha l'asse x coincidente con l'asse della buca e l'origine al centro della buca.**
- **L'incontro tra i due centri avviene in (x,y,t) = (x',y',t') = (0,0,0).**

**Nota :**

**Poiché l' angolo d'inclinazione è differente questo rappresenta un caso più generale di quelli visti in precedenza.**

## Il problema si può visualizzare graficamente così :



- **Per passare dal sistema di riferimento del bastone a quello della buca occorre eseguire una serie di trasformazioni :**

- **$R_{(-\phi)}$ → per allineare la linea di moto con l'asse x nel s.r. del bastone.**

- **$L_{x(-v)}$ → per passare al sistema di riferimento della buca.**

- **$R_{(\alpha)}$ → per allineare l'asse x con l'asse della buca nel suo s.r.**

- **La matrice risultante $D = R_{(\alpha)} L_{x(-v)} R_{(-\phi)}$ ha la seguente forma :**

$$D := \begin{pmatrix} \gamma \cdot \cos\Phi \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\Phi & -\gamma \cdot \operatorname{sen}\Phi \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\Phi & v\gamma\cos\alpha \\ -\gamma \cdot \cos\Phi \cdot \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\Phi & \gamma \cdot \operatorname{sen}\Phi \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\Phi & -v\gamma\operatorname{sen}\alpha \\ \dfrac{v \cdot \gamma \cdot \cos\Phi}{c^2} & -\dfrac{v \cdot \gamma \cdot \cos\Phi}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

- **Se chiamiamo a metà della lunghezza del bastone e b metà della lunghezza della buca il fronte del bastone ha coordinate (a,0,t) per ogni istante nel proprio sistema di riferimento . Allo stesso modo il fronte della buca ha coordinate (b,0,t’) per ogni istante t’ nel proprio sistema di riferimento.**

- **Affinché il bastone passi attraverso la buca deve valere la trasformazione :**

$$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ t \end{pmatrix} := D \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

- **Questo conduce alle seguenti equazioni :**
- **1) $a\gamma^*\cos\Phi\cos\alpha + a\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\Phi + vt\gamma\cos\alpha = b$**
- **2) $a\gamma^*\cos\Phi\,\mathrm{sen}\alpha + a\cos\alpha\,\mathrm{sen}\Phi + vt\gamma\,\mathrm{sen}\alpha = 0$**
- **3) $(av\gamma/c^2)\cos\Phi + \gamma t = t'$**
- **Dalla seconda equazione :**

**$t = (a\cos\alpha\,\mathrm{sen}\alpha - a\gamma\cos\Phi\,\mathrm{sen}\alpha)/(v\gamma\,\mathrm{sen}\alpha)$**

- **E sostituendo t nella prima :**

**$a\gamma^*\cos\Phi\cos\alpha + a\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\Phi + ((a\cos\alpha\,\mathrm{sen}\alpha - a\gamma\cos\Phi\,\mathrm{sen}\alpha)\cos\alpha/\,\mathrm{sen}\alpha$**

- **Moltiplicando entrambi i membri per sen$\alpha$ e semplificando :**

$$a * sen\Phi(sen^2\alpha + cos^2\alpha) = b * sen\alpha$$

- **ossia :**

$$a * sen\Phi = b * sen\alpha$$

- **Troviamo dipendenza solo da quattro quantità proprie del problema :**

**Le lunghezze del bastone e della buca.**

**Gli angoli di inclinazione del bastone e della buca rispetto all’asse x.**

- **Quindi se :**

$$a \cdot \operatorname{sen}\Phi < b \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

**allora il bastone passa attraverso la buca.**

**Nota : se la linea di moto passante per la buca non la interseca nel centro allora il bastone la attraversa se valgono le seguenti condizioni :**

$$a \cdot \operatorname{sen}\Phi < b_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad a \cdot \operatorname{sen}\Phi < b_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

**dove $b_1$ e $b_2$ sono le lunghezze delle due parti in cui rimane divisa la buca.**

**Risultati confermati dalla letteratura.**

**O.K. il modello funziona!!!**

# Conclusioni.

- **Modello per le TdL in 2D.**
- **Applicazione a tre casi fisici reali ottenendo dei risultati consistenti con la letteratura.**
- **Facilità di trasformazione per problemi in cui la linea di moto non sia allineata con gli assi.**
- **Possibilità di estendere il modello al caso tridimensionale (algebricamente più complesso).**