RAPPRESENTAZIONE

GEOMETRICA DELLE

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

E DI LORENTZ

Le trasformazioni di Lorentz devono rispettare due concetti fondamentali:

La velocità della luce **c** deve essere isotropa passando da un sistema di riferimento inerziale all’altro.

Le trasformazioni di Lorentz **devono** essere approssimabili con le trasformazione galileiane per sistemi inerziali che possiedono una velocità molto inferiore a **c**

La rappresentazione geometrica si basa sull' invarianza dell'intervallo:

$$ds^2 = dx^2 - cdt^2 = dx'^2 - cdt'^2$$

Coordinate del sistema
(x,y,z,t)

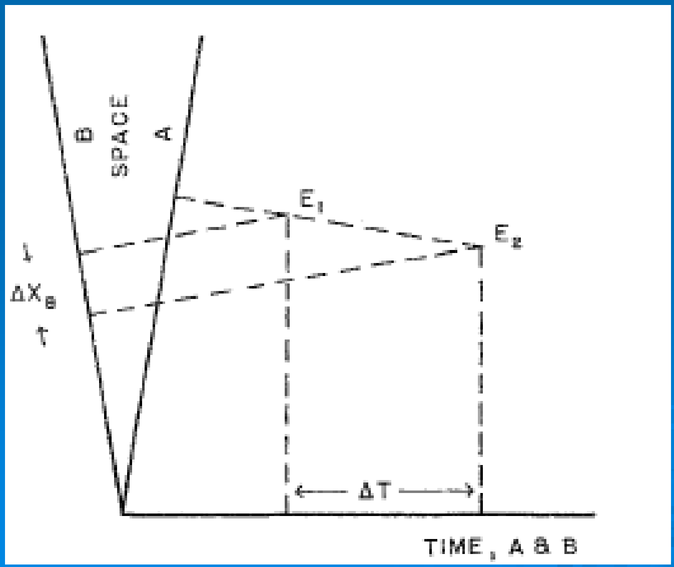
Coordinate del sistema
(x',y'z',t') ottenuto mediante
rotazione

$(x_1,y_1,z_1,t_1) \longrightarrow$ **evento (E)**

Trasformazione galileiane

$x' = x - vt$
$y' = y$
$z' = z$
$\boxed{t' = t}$ → La simultaneità degli eventi è **invariante** passando da un sistema di riferimento all'altro

In base a queste ipotesi la rappresentazione geometrica è la seguente:



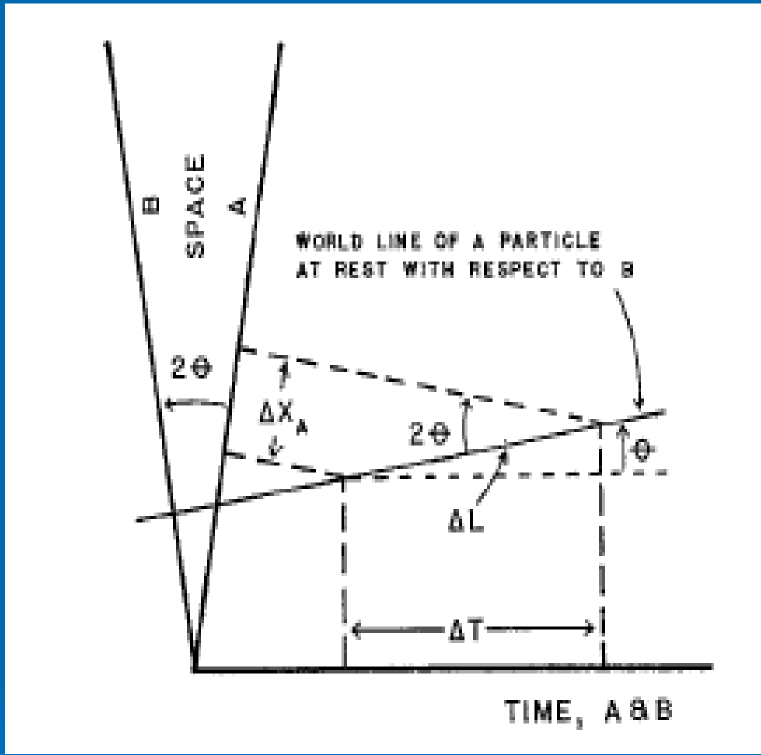
E_1= passaggio della locomotiva del treno

E_2= passaggio dell'ultima cabina del treno

A = sistema coordinate terra

B = sistema coordinate treno

In base al sistema considerato la velocità sarà data da:



$$\Delta t = \Delta L \cos(\theta)$$

$$\Delta x_A = \Delta L \sin(2\theta)$$

$$\boxed{\Delta x_A / \Delta t = 2\sin(\theta) = v}$$

Questa formula di v differisce da quella usuale v = tan(θ) a causa del metodo di rappresentazione degli assi.

Rappresentazione geometrica della composizione delle velocità

Supponiamo questa volta di avere 3 sistemi

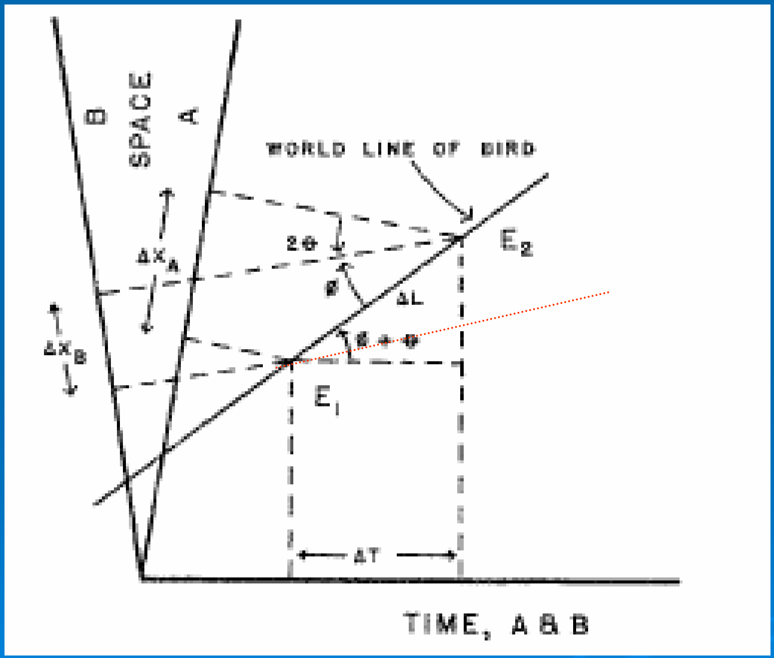
Il primo (sistema terra) in quiete

Il secondo(sistema treno) in movimento con una velocità v rispetto al primo

Il terzo (sistema 3) in movimento rispetto al secondo con una velocità u_B

Con quale velocità viaggia il corpo rispetto al sistema terra?

In base alla trasformazioni di galileo le velocità sono additive.E' possibile dimostrate graficamente questo teorema



$$\Delta x_A = \Delta L \sin(\theta + 2\varphi)$$

$$\Delta x_B = \Delta L \sin(\varphi)$$

$$\Delta t = \Delta L \cos(\theta + \varphi)$$

$$\Delta x_A / \Delta t = \sin(\theta + 2\varphi) \sec(\theta + \varphi)$$

$$= \Delta x_B / \Delta t + v$$

$$\boxed{u_A = u_B + v}$$

Trasformazioni di Lorentz

La velocità della luce **c** deve rimanere **invariata** passando da un sistema di riferimento ad un altro.

La simultaneità **decade** passando da un sistema di riferimento ad un altro

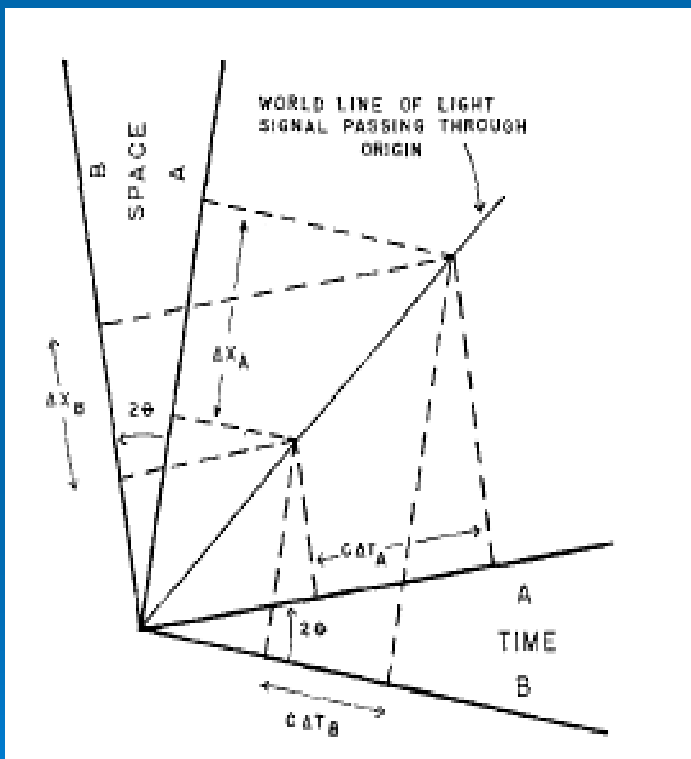
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(x - vt\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

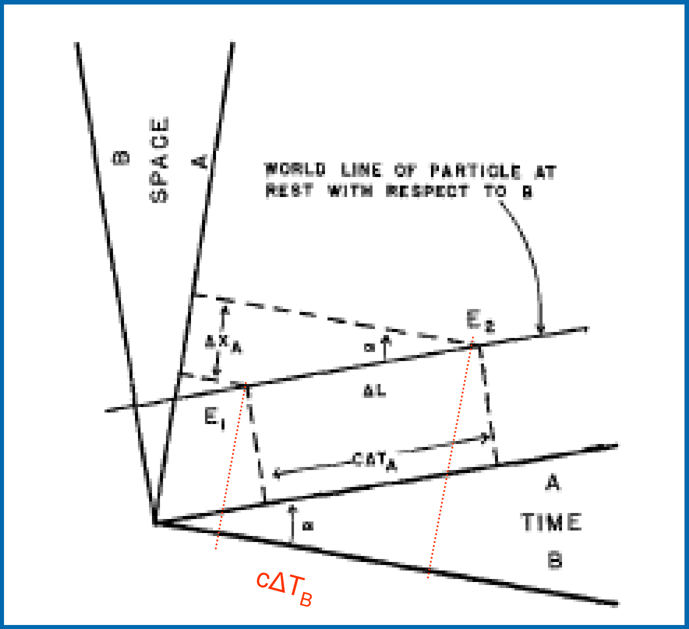
$$\boxed{t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - vx/c^2\right)}$$

Per rispettare tali ipotesi è necessario che la rappresentazione geometrica degli assi venga modificata:



In base alle trasformazioni di Lorentz $t \neq t'$ Questo implica che si avranno due assi del tempo(ct,ct’). Mediante questo cambiamento degli assi è possibile mantenere l’ **invarianza** di **c.**

In base a questo nuovo sistema di coordinate la velocità sarà data da



$$\alpha = 2\theta$$
$$\Delta x_A = \Delta L \sin(\alpha)$$
$$\Delta x_B = 0$$
$$c\Delta t_A = \Delta L$$
$$\Delta x_A / \Delta t_A = c \sin(\alpha)$$

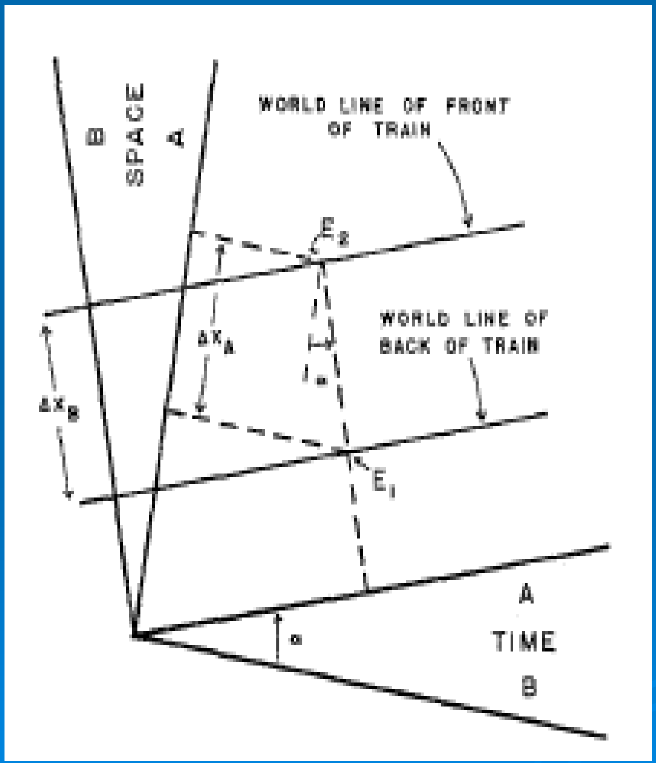
Se $\quad v = \Delta x_A / \Delta t_A \quad$ allora $\quad \cos(\alpha) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

La simultaneità non sussiste poiché $\boxed{c\Delta T_B \neq c\Delta T_A}$

Il concetto di relatività della simultaneità diventa fondamentale nella misura delle lunghezze effettuate da sistemi di riferimento differenti.

Misurare un oggetto = misurare **simultaneamente** inizio e fine

Prendiamo in esame di nuovo l'esempio del treno:



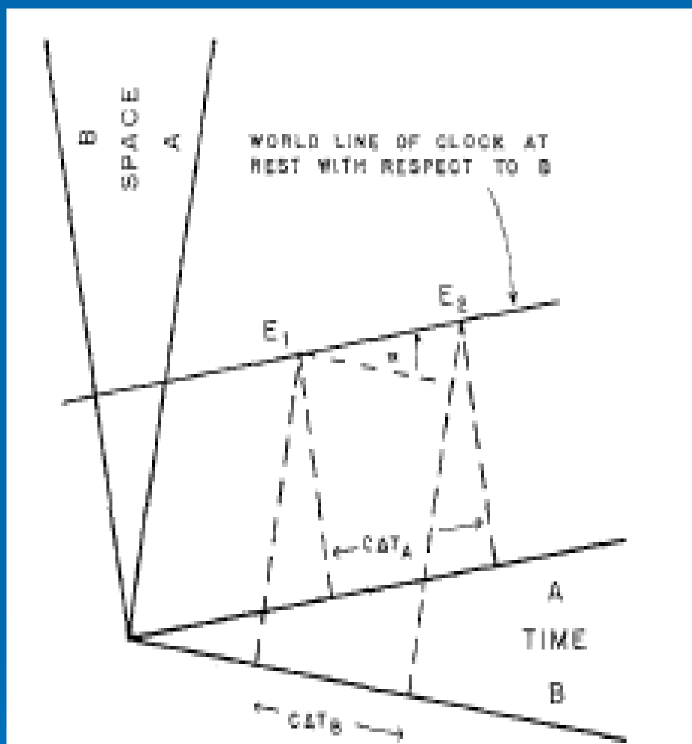
In questo caso si avrà:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \cos(\alpha)$$

$$= \Delta x_B \boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Inverso fattore di contrazione

La misura stessa del tempo differisce passando da un sistema ad un altro a causa dell'assenza di simultaneità



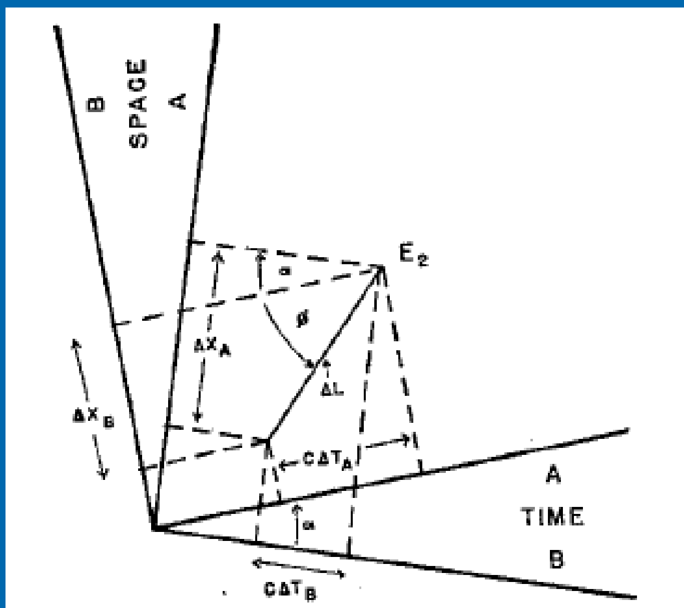
In questo caso si avrà:

$$\Delta T_B = \Delta T_A \cos(\alpha)$$

$$= \Delta T_A \boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Fattore di dilatazione

Le trasformazioni di Lorentz sono correlate graficamente ai sistemi considerati nel seguente modo:



$$\Delta x_A = \Delta L \sin(\varphi + \alpha)$$

$$\Delta x_B = \Delta L \sin(\varphi)$$

$$c\Delta T_A = \Delta L \cos(\varphi)$$

$$c\Delta T_B = \Delta L \cos(\varphi + \alpha)$$

Quindi

$$\Delta x_A = \Delta L(\sin\phi\ \cos\alpha + \cos\phi\ \sin\alpha)$$
$$= \Delta x_B(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} + c\Delta t_A v/c,$$

$$\Delta x_B = (\Delta x_A - v\Delta t_A)(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

E

$$c\Delta t_B = \Delta L(\cos\phi\ \cos\alpha - \sin\phi\ \sin\alpha),$$
$$= c\Delta t_A(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} - \Delta x_B v/c,$$
$$c\Delta t_A = (c\Delta t_B + \Delta x_B v/c)(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sostituendo Δx_B

$$c\Delta t_B = (c\Delta t_A - \Delta x_A v/c)(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sostituendo Δt_A

$$\Delta x_A = (\Delta x_B + v\Delta t_B)(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$