$$E = \gamma E_0$$

Un paradosso relativistico circa l'energia elettrostatica

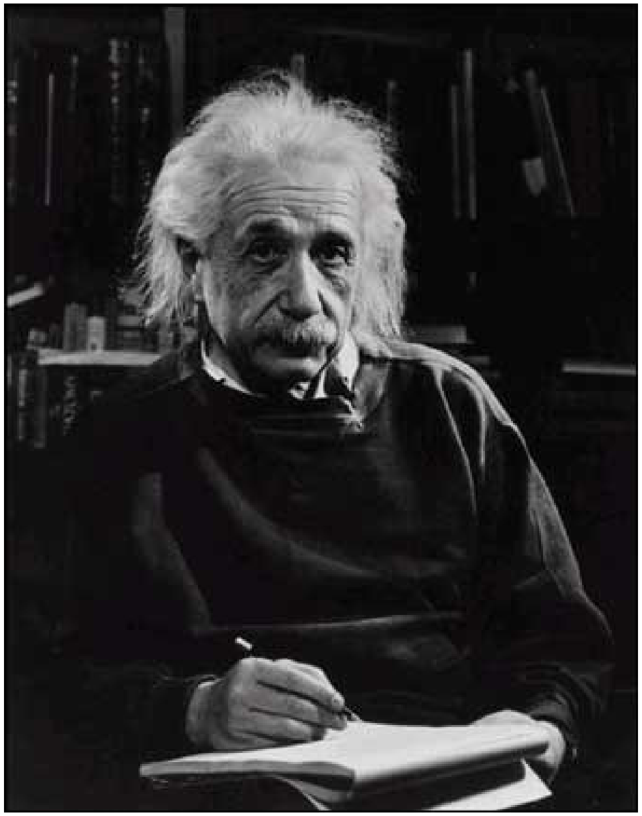
Presentazione dell'articolo "A simple relativistic paradox about electostatic energy" di Wolfang Rindler e Jack Denur; Dicembre 1987

Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

Prima di entrare nel merito specifico del paradosso descritto nell'articolo, tre brevissime digressioni:

- Relazione massa/energia in Relatività ristretta
- Breve richiamo sulle proprietà dei Condensatori
- Cenni sugli sforzi nei materiali



Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

Relazioni Massa/Energia in RR 1

- La massa di un corpo non è una proprietà indipendente dal sistema di riferimento in cui la si considera a differenza di quanto assunto in meccanica newtoniana

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}$$

- L'energia totale relativistica è: $E^2 \equiv m_0^2 c^4 \gamma^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

- La quantità $E^2 - p^2 c^2$ è costante a prescindere dal SRI; quindi viene lasciata immutata da qualunque TdL.

Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

Relazioni Massa/Energia in RR 2

Relativisticamente si conserva l'energia totale; non ha senso alcuna distinzione tra energia di massa (di riposo) ed energia di moto. Massa ed energia sono legate dalla celebre relazione:

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

Considerando diversi SRI deve sempre essere valida la relazione:

$$Energia = \gamma\, Energia\, a\, riposo$$

$$E = \gamma E_0$$

Condensatori 1

- Un condensatore è un sistema di due conduttori fra i quali esiste induzione completa
- La capacità di un condensatore a lamine piane è $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{l}$
- La sua energia è $\frac{1}{2} C \Delta V^2$
- Si ricava agilmente l'espressione della *densità di energia*:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Sforzi nei materiali 1

Per interpretare quanto accade all'interno di un corpo soggetto ad una sollecitazione dobbiamo introdurre il concetto di **sforzo**. In generale su un elemento di volume di un sistema continuo isotropo, agiranno sia forze di volume che forze di superficie.

In generale le **forze di volume** non intervengono nella trattazione dell'elastcità lineare.

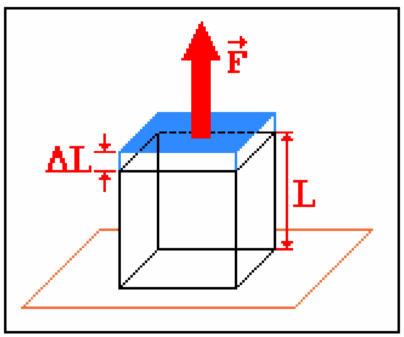
Le **forze di superficie** sono quelle localizzate sulle superfici del corpo e si trasmettono in tutte le superfici infinitesime in cui il corpo continuo può supporsi essere diviso.

Per sforzo si intende la forza trasmessa per unità di superficie, che si crea a seguito dell'applicazione di sollecitazioni esterne su un sistema.

Sforzi nei materiali 2

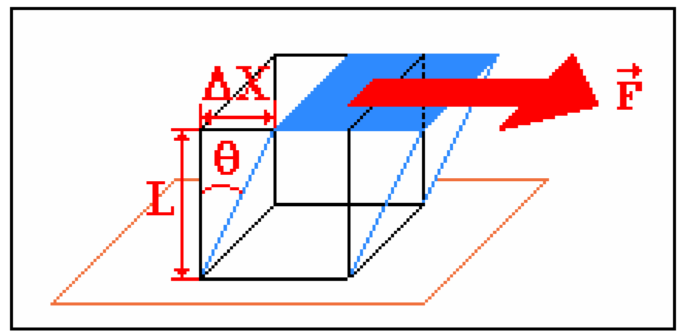
Gli sforzi possono essere **normali** (se diretti ortogonalmente alla superficie) oppure **di taglio** se diretti parallelamente alla superficie:

SFORZI NORMALI



$$\sigma = \vec{F}\cdot\vec{n} = F\cos\theta$$

SFORZI DI TAGLIO



$$\tau = \vec{F}\cdot\vec{t} = F\sin\theta$$

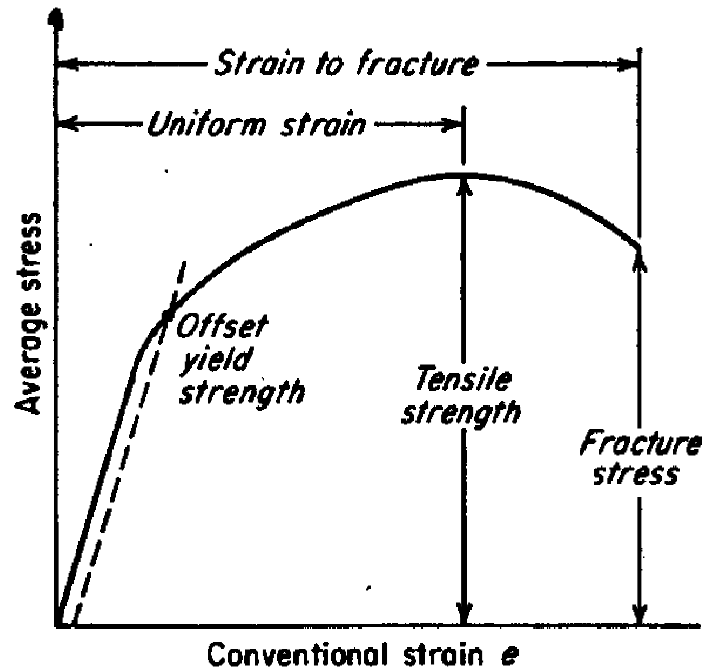
Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

Sforzi nei materiali 3

Quando un corpo è sollecitato da forze esterne si instaurano nel suo interno delle tensioni. Le tensioni sono forze per unità di superficie e possono decomporsi in una componente normale (cioè perpendicolare alla superficie considerata) ed in una tangenziale (cioè parallela alla superficie stessa).

Nella figura accanto è riportata una curva sforzo/deformazione tipica di un materiale che, ad un regime di deformazione elastica, postpone (passando per il **carico di snervamento**) un regime di deformazione plastica fino ad arrivare a rottura.



Sforzi nei materiali 4

Si considerino gli sforzi agenti su di una generica superficie infinitesima il cui versore normale è **n.** Essi sono descritti dal **tensore degli sforzi** di quella specifica superficie:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

I termini sulla diagonale principale sono gli **sforzi normali** agenti sulla superficie generica. I termini fuori dalla diagonale principale rappresentano le componenti degli **sforzi di taglio.** Si sottolinea che per gli elementi fuori dalla diagonale principale valgono le seguenti relazioni:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx};\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx};\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Il tensore degli sforzi è dunque **simmetrico.**

Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

Il sistema in esame 1

Le due armature (piane, cariche e parallele) di area **A** di un condensatore in vuoto costituiscono due facce opposte di un box rettangolare, di lunghezza **l**. Il box è in quiete in un sistema di riferimento S_0 il cui asse **x** è scelto parallelo alle linee di forza del campo elettrico. Il box può essere osservato anche da un sistema di riferimento **S** rispetto al quale si muove con velocità **v** nella direzione delle linee di forza.

E' una proprietà delle TdL applicate ai campi elettromagnetici il fatto che un campo elettrico **E** parallelo in un sistema di riferimento inerziale S_0 si trasformi in un identico campo elettrico **E** parallelo in un qualsiasi SRI **S** in moto rispetto ad S_0 lungo la direzione del campo.

Quindi **E** è costante.

Allora anche la ***densità di energia*** del campo elettrico sarà costante, vista la sua definizione.

Tuttavia, la lunghezza del box in **S** sarà contratta di un fattore γ

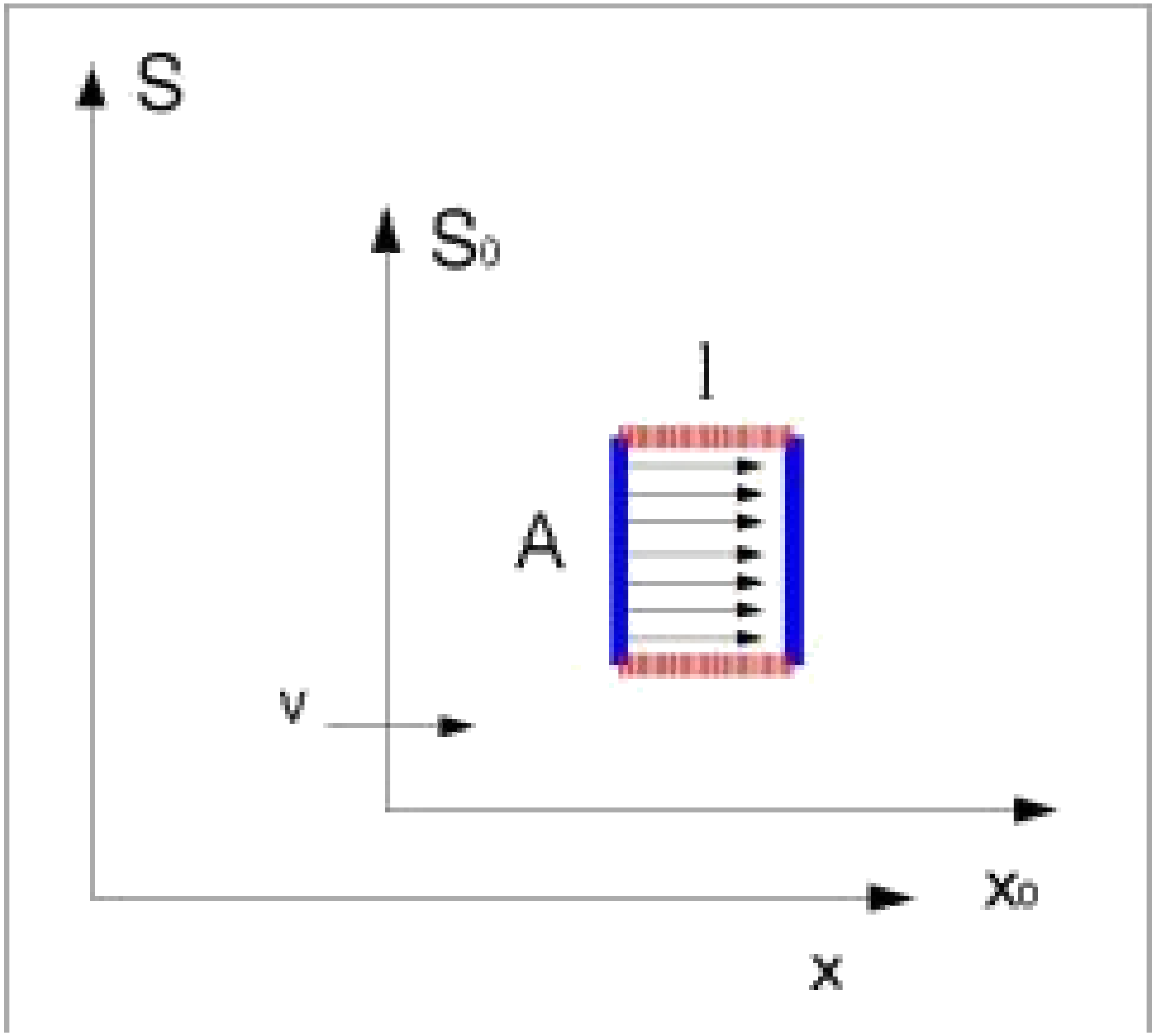
a causa del fenomeno della contrazione delle lunghezze (conseguenza diretta della forma delle TdL).

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

Un paradosso relativistico

$$E = \gamma\, E_0$$

Il sistema in esame 2



Un paradosso relativistico

$E = \gamma E_0$

Il paradosso.

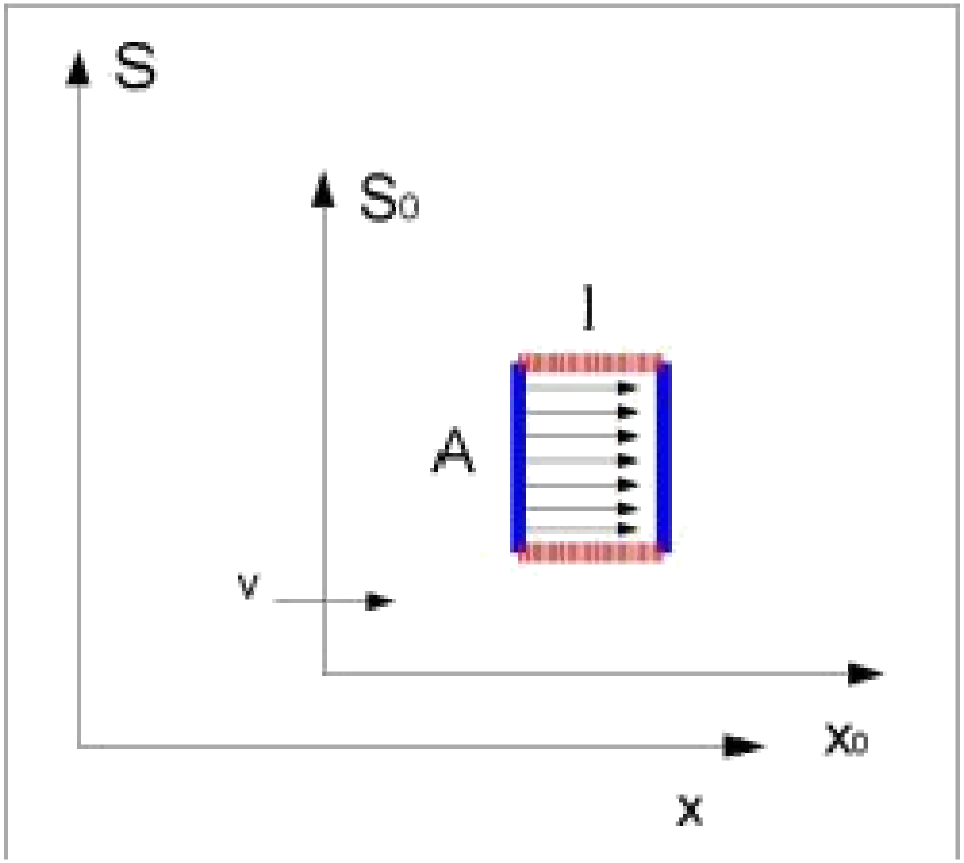
Dato che la *densità di energia* elettrostatica ρ è costante e considerato il fatto che in S la lunghezza del box è diminuita, allora ne consegue che l'energia (massa!) debba essere diminuita di un fattore γ

Questo risultato è in profondo conflitto con la regola generale secondo la quale la massa (energia) di ogni sistema isolato debba trasformarsi come quella di una particella:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$E = \gamma E_0$$

La massa (energia) dovrebbe aumentare di un fattore γ e invece ne appare diminuita.



Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

Qualcosa non va!!

Che cosa?

Il fatto che le due pareti del box di lunghezza l in S_0 non abbiano massa trascurabile.

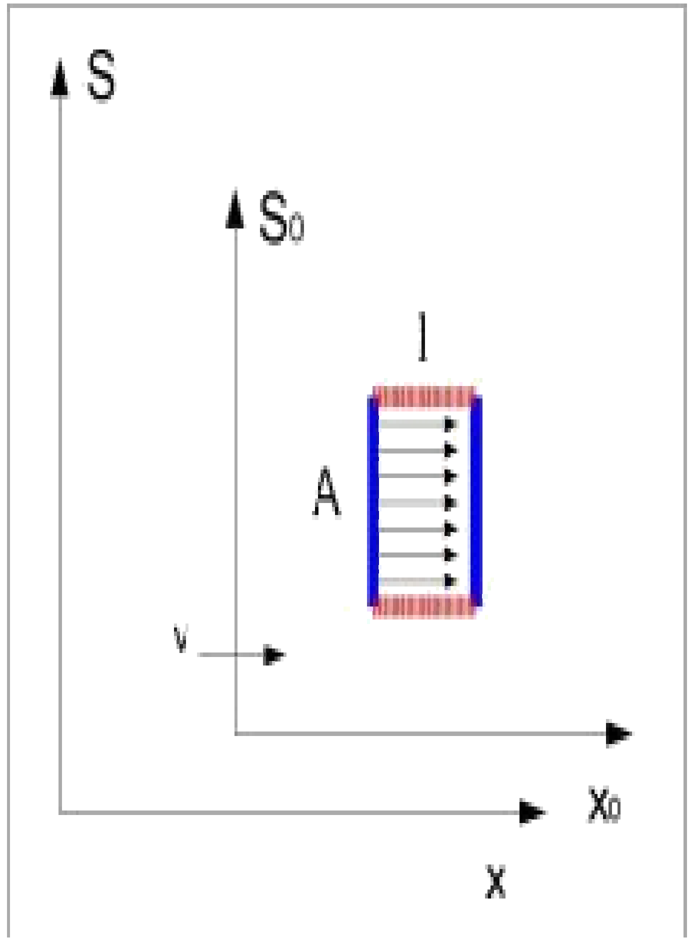
Infatti non possono essere infinitamente leggere, dovendo fornire la pressione necessaria a controbilanciare la tensione del campo nel mantenere separate le due armature del condensatore.

Ne consegue che la loro massa non è trascurabile. Inoltre la presenza di questa pressione fa si che la massa di queste pareti non si trasformi come quella di una particella singola (ovvero di un corpo privo di stress).

Un paradosso relativistico

$E = \gamma E_0$

ρ_0	densità di energia (massa) in S_0
t_0	sforzo nella direzione x in S_0
ΔA	sezione superficiale di contatto tra le due pareti (rosse nella figura accanto) e le armature del condensatore (in blu)



La densità ρ nel sistema di riferimento inerziale S è la seguente:

(1) $$\rho = \gamma^2 (\rho_0 + v^2 t_0)$$

Ricordo che si usano unità tali per cui c sia uguale ad 1.

Un paradosso relativistico

$E=\gamma E_0$

La forza di pressione esercitata dalle pareti sulle armature, nel SRI S_0, è $t_0 \Delta A$. Questa deve bilanciare la forza elettrostatica tra le armature: $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 A$

quindi:

$$t_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 A / \Delta A \qquad (2)$$

Dalle equazioni (1) e (2) segue che la massa M delle pareti del box nel SRI S è data dall'espressione seguente:

$$M = \left(\frac{l}{\gamma}\right)\Delta A \rho = l \Delta A \gamma \left[\rho_0 + v^2 E^2 \epsilon_0 A / 2 \Delta A\right]$$

$$M = \gamma \left[M_0 + v^2 E^2 \epsilon_0 l A / 2\right]$$

Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$

M_0 è la massa delle pareti in S_0.

La massa del sistema in S nella sua interezza è data da:

$$M + U = \gamma [M_0 + v^2 E^2 \epsilon_0 l A / 2] + E^2 \epsilon_0 l A / 2\gamma$$

Dalla quale si ricava agilmente, ricordando che $\gamma (v^2 + \frac{1}{\gamma^2}) = \gamma$:

$$M + U = \gamma (M_0 + U_0) \quad (3)$$

Dove U e U_0 sono le energie del campo elettrico in S ed S_0 rispettivamente.

Un paradosso relativistico

$E = \gamma E_0$

Dall'equazione (3) si deduce che in realtà è tutto come atteso!!

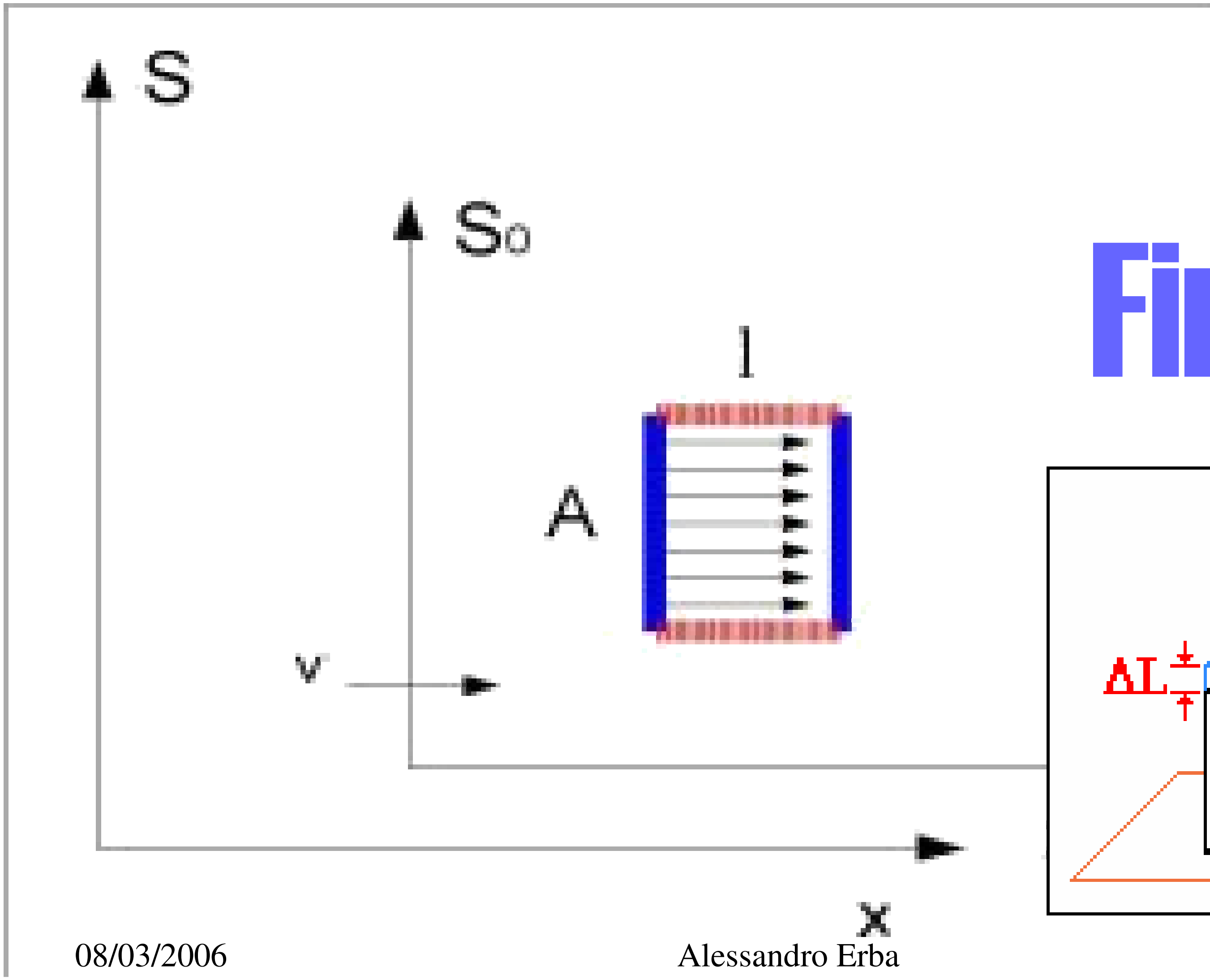
LA MASSA (ENERGIA) DEL SISTEMA CONSIDERATO NELLA SUA INTEREZZA SI TRASFORMA COME QUELLA DI UNA PARTICELLA.

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad\qquad E = \gamma E_0$$

In una trattazione più completa si potrebbero considerare anche le masse finite delle armature del condensatore; queste, a differenza delle pareti del box, si trasformano normalmente non essendo soggette a stress. Il risultato espresso dall'equazione (3) è di già soddisfacente.

Un paradosso relativistico

$$E = \gamma E_0$$



Fine.