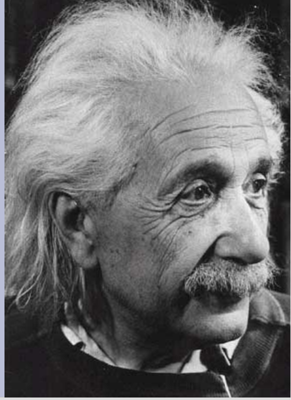
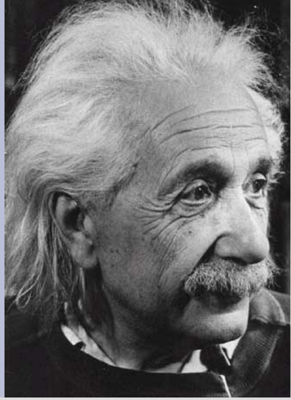
Massa ed energia nella relatività ristretta

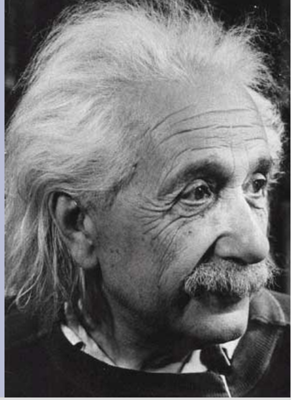


Cambiamento nella massa inerziale di un sistema di due cariche puntuali, dovuto all'energia potenziale elettrostatica



Introduzione I

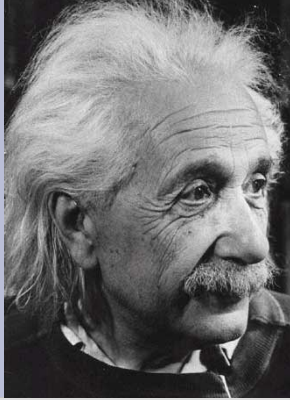
Nella relatività einsteiniana massa ed energia sono grandezze intimamente collegate; la massa di un sistema e` infatti in relazione con il suo contenuto in energia.



Introduzione II

Questa relazione tra energia e materia ha diverse conseguenze:

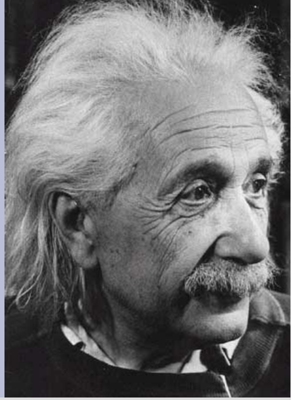
- Attribuzione di inerzia ad ogni forma di energia.
- Ogni processo che comporti un variazione nell'energia del sistema e` in realtà accompagnato da una variazione della massa a riposo (si conserva l'energia totale relativistica).
- La massa di un sistema formato da più componenti e` in generale differente dalla somma delle masse dei componenti isolati.



Introduzione III

La teoria della relatività discende direttamente dall'elettrodinamica;

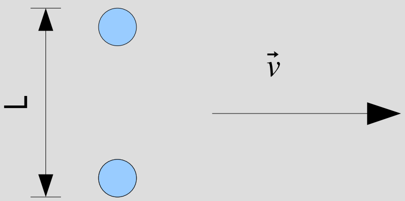
Può essere interessante studiare un problema di elettrodinamica, per il quale i risultati relativistici possano essere ottenuti anche dalle soluzioni per i campi e le forze elettromagnetiche.



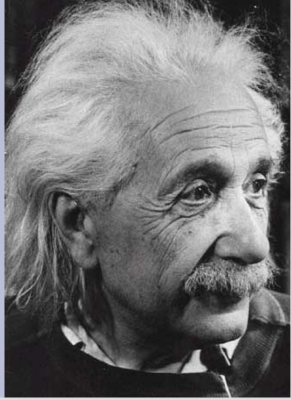
Il sistema

Il sistema e` costituito nel seguente modo:

- Le due carche puntiformi sono separate da una distanza L.
- Vengono applicate 2 forze esterne in grado di mantenere invariata questa separazione.
- Una terza forza esterna e` in grado di accelerare il sistema da fermo fino a velocita` elevate.

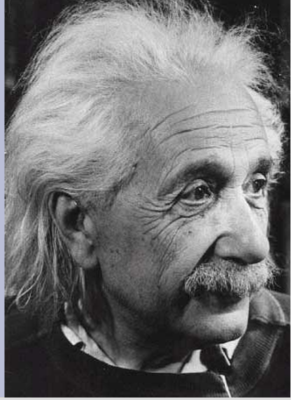


$\vec{v}=\vec{a}\cdot t \quad x=\frac{1}{2}a\cdot t^2$



Approssimazioni

Accelerazione molto piccola: si trascura la potenza P dissipata come radiazione



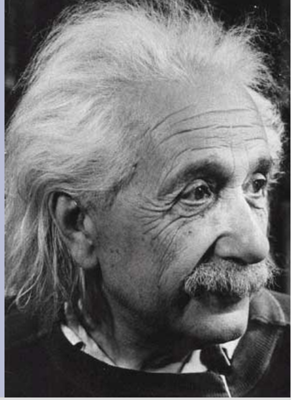
Cariche isolate

Se le cariche del sistema fossero presenti l'una separata dall'altra le forze necessarie ad imprimere l'accelerazione *a* sarebbero:

$$\vec{F}_{acc1}=\frac{d}{dt}(m_{10}\gamma v\hat{i}) \qquad \vec{F}_{acc2}=\frac{d}{dt}(m_{20}\gamma v\hat{i})$$

E classicamente per il sistema binario varrebbe:

$$\vec{F}_{acc1}+\vec{F}_{acc2}=\hat{i}(m_{10}+m_{20})\gamma^3 a$$



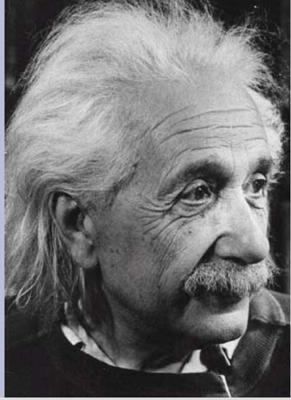
Energia di riposo del sistema

Relativisticamente l'energia totale a riposo del sistema include il contributo legato all'energia potenziale elettrostatica:

$$E_0 = m_{10} c^2 + m_{20} c^2 + q_1 q_2 / l$$

e la massa a riposo diventa:

$$M_0 = m_{10} + m_{20} + \frac{q_1 q_2}{l c^2}$$

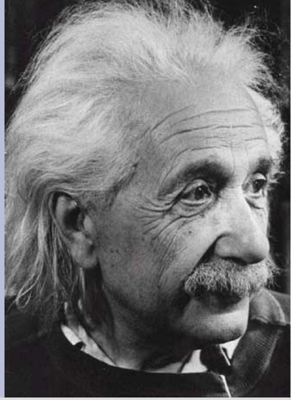


Forza e accelerazione

La forza necessaria per imprimere l'accelerazione al sistema delle due cariche non e` allora la semplice somma delle forze sufficienti ad imprimere la stessa accelerazione alle due cariche separate.

Il termine aggiuntivo della forza e` dato da:

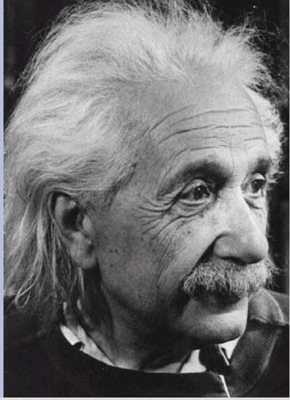
$$\overrightarrow{\Delta F}_{ext\ tot} = \hat{i}\,\frac{q_1 q_2}{l\,c^2}\,\gamma^3 a$$



Cosa dice l'elettrodinamica? I

Quando le due particelle cariche sono accelerate insieme, ciascuna delle due genera dei campi elettromagnetici che determinano l'azione di forze sulla compagna.

Dal bilancio complessivo delle forze agenti sulla coppia di cariche puntiformi, risulta evidente come questi contributi elettromagnetici interni debbano essere controbilanciati da un qualche contributo addizionale alla forza esterna.



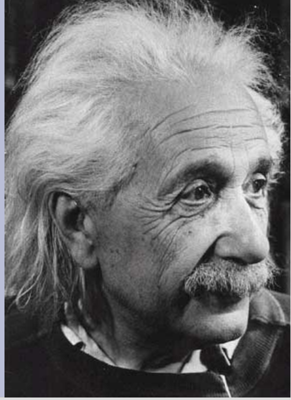
Cosa dice l'elettrodinamica? II

Complessivamente deve allora essere verificata la relazione:

$$\overrightarrow{\Delta F}_{ext\ tot} = -\vec{F}_{em\ 1} - \vec{F}_{em\ 2}$$

Le forze elettromagnetiche agenti su ciascuna carica per la presenza dell'altra, possono essere ricavate dalle formule dell'elettromagnetismo classico, e la somma tra le forze deve portare allo stesso risultato ottenuto a partire dalle considerazioni relativistiche.

Campi e forze al tempo ritardato I

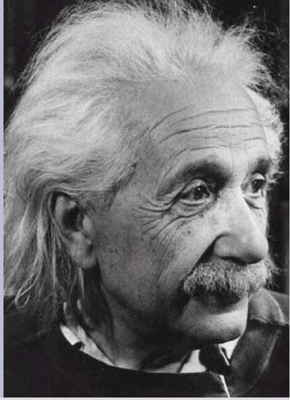


Le forze elettromagnetiche che agiscono su ciascuna carica a causa della presenza della compagna possono essere ricavate dalle formule dell'elettromagnetismo classico:

$$\vec{E}=\left[\frac{(\hat{n}-\beta)(1-\beta^2)}{K^3 R^2}\right]_{ret}+\frac{e}{c}\left[\frac{\hat{n}}{K^3 R}\times[(\hat{n}-\beta)\times\dot{\beta}]\right]_{ret}$$

dove e e\` la carica della particella sorgente, e $q$ e\` la carica della particella che subisce la forza; valgono inoltre:

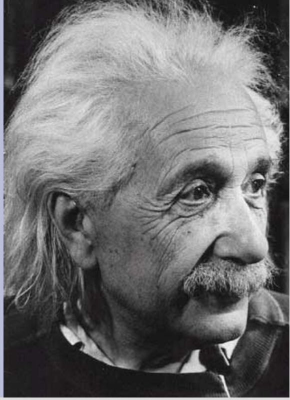
$$\vec{B}=[\hat{n}]_{ret}\times\vec{E} \qquad \vec{F}=q(\vec{E}+\beta\times\vec{B}) \qquad K=1-\hat{n}\cdot\vec{\beta}$$



Campi e forze al tempo ritardato II

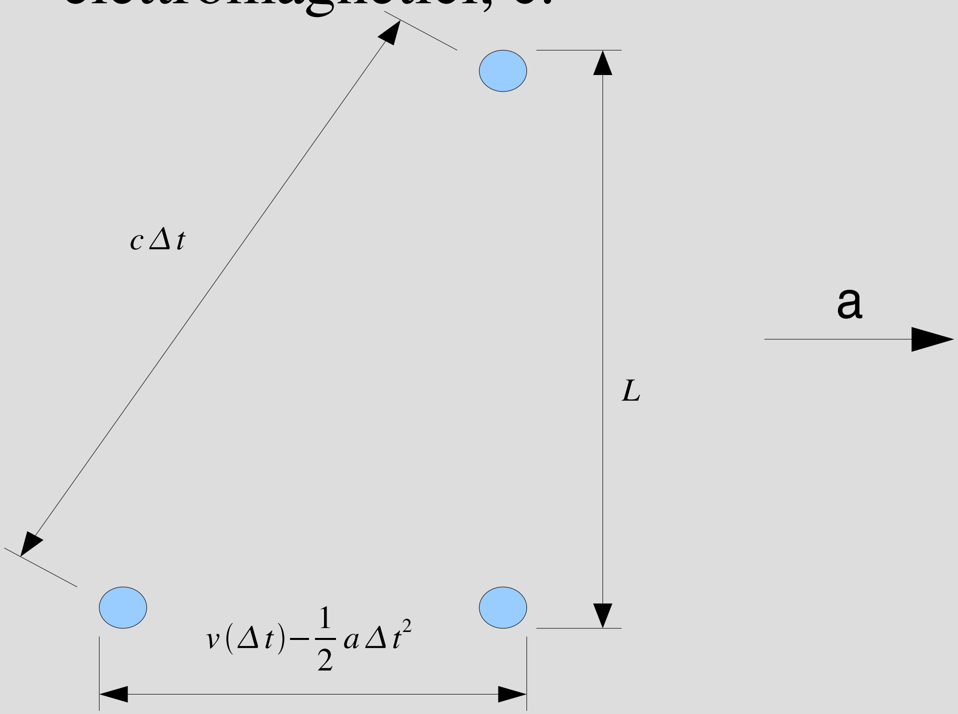
Dalla simmetria del sistema si può dedurre che:

- Le componenti y delle forze sono in direzioni opposte per le due particelle e quindi si elidono vicendevolmente
- La simmetria ha gli stessi effetti sulle componenti lungo z delle forze
- Sopravvivono solo i contributi paralleli alla direzione del moto accelerato.



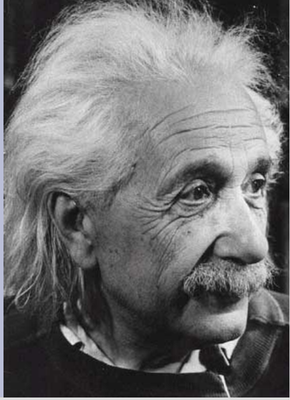
Campi e forze al tempo ritardato III

La necessita` di introdurre i potenziali ritardati discende dalla finitezza della velocita` di propagazione dei campi elettromagnetici, c.



Si ricorda che:

- $\Delta t = t - t_{ret}$
- Inoltre *t* e` il tempo trascorso dal momento in cui e` stata appiccata l'accelerazione *a* al sistema di carche.



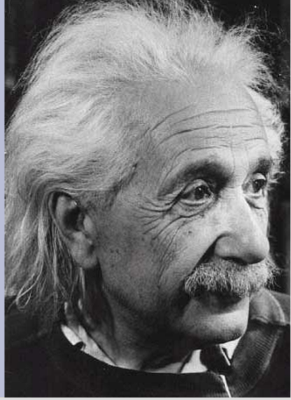
Assunzioni e Approssimazioni

- Si considera una accelerazione molto piccola, tale che:

$$a(\Delta t) << v$$

- In questa approssimazione si può esprimere l'intervallo dovuto al ritardo come sviluppo in serie: al primo ordine in *a*:

$$(\Delta t) = l(c^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a v l^2 (c^2 - v^2)^{-2}$$



Tempo ritardato

Si arriva cosi` all'espressione per il tempo ritardato:

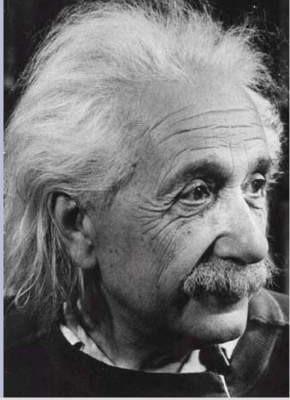
$$t_{ret} = t - \Delta t$$

$$t_{ret} = t - l(c^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a\, v\, l^2 (c^2 - v^2)^{-2} + O(a^2)$$

e a quelle per le quantità espresse nell'espressione per il campo elettrico:

$$\hat{n} = \hat{i}\left[\frac{v}{c} - \frac{1}{2}\frac{avl}{c\sqrt{c^2 - v^2}}\right] + \hat{j}\left[\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} + \frac{1}{2}\frac{avl}{c\sqrt{c^2 - v^2}}\right] + O(a^2)$$

$$\vec{\beta} = \hat{i}\left[\frac{v}{c} - \frac{al}{c\sqrt{c^2 - v^2}}\right] + O(a^2)$$



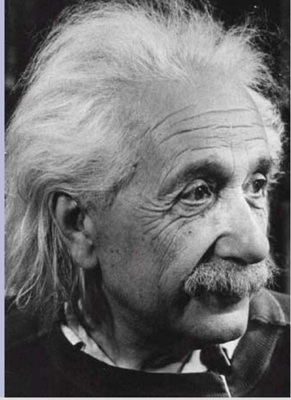
La Forza Elettromagnetica I

Dalle relazioni precedenti si può ricavare l'espressione per la componente lungo x del campo dovuta a q2;

$$E_{x1} = \frac{-q_2\, a}{2\, c^2\, l \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

, e da questa l'espressione per la forza elettromagnetica su q1:

$$F_{em\ 1\ x}^{(a)} = \frac{-q_1\, q_2\, a}{2\, c^2\, l \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$



La Forza Elettromagnetica II

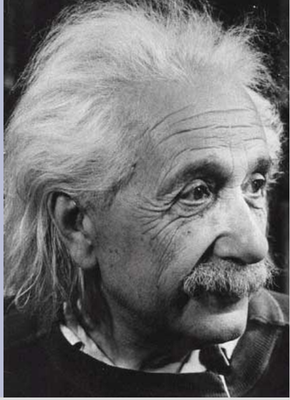
Per simmetria la componente x della forza elettromagnetica sulla carica q2 e` perfettamente identica; quindi, dato che

$$\Delta \vec{F}^{(a)}_{ext\ \ tot} = -\vec{F}^{(a)}_{em\ \ 1} - \vec{F}^{(a)}_{em\ \ 2}$$

allora segue che:

$$\Delta \vec{F}^{(a)}_{ext\ \ tot} = \hat{i}\left(\frac{q_1 q_2}{l c^2}\right)\gamma^3 a$$

cioe` esattamente il risultato previsto relativisticamente.



Conclusioni

Peculiarità dell'articolo:

- mostra come molta dell'informazione ottenibile dalla teoria della relatività ristretta, nello studio di problemi di elettrodinamica, fosse in realtà gia` contenuta nelle espressioni dell'elettrodinamica stessa e dell'elettromagnetismo classici.
- costituisce un esempio del tipo di considerazioni e problemi che, sollevati dall'elettromagnetismo, hanno portato alla formulazione della teoria della relatività stessa; in quest'ottica può essere formativo studiare sistemi di questo tipo, dato che la maggior parte delle volte la teoria della relatività viene affrontata e citata senza particolare riferimento all'elettromagnetismo.