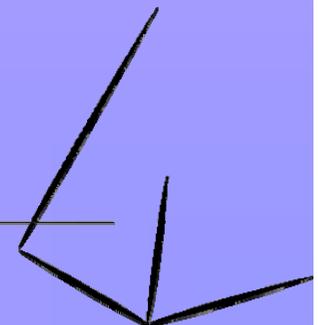


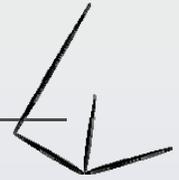
C.d.L. in Scienza dei Materiali:

Corso di introduzione alla relatività ristretta ed alla radiazione

***PERCHE' LA VELOCITA'
DELLA LUCE VIENE
RIDOTTA DI UN
FATTORE "n" QUANDO
VIAGGIA IN UN MEZZO
TRASPARENTE***

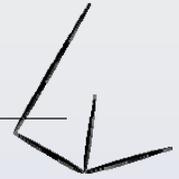


Introduzione



- Dall'ottica geometrica si sa bene che la velocità della luce in un mezzo trasparente è ridotta di un fattore n (indice di rifrazione) rispetto al vuoto.
- L'elettromagnetismo di Maxwell fornisce una semplice spiegazione a questo fenomeno e relaziona n alla suscettività elettrica del materiale. L'analisi convenzionale però non illustra (se non in minima parte) il meccanismo implicato.
- Di seguito si cercherà qualche delucidazione sul “miracolo” per cui la radiazione di molti dipoli indotti contribuisce a produrre un'unica onda che si propaga con la velocità ridotta.

Introduzione



Le equazioni di Maxwell sono:

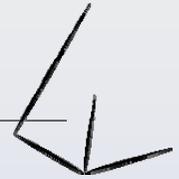
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Introduzione



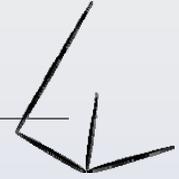
Si applica alla terza equazione di Maxwell la seguente identità vettoriale:

$$\nabla \times (\nabla \times (f)) = \nabla \cdot (\nabla \cdot (f)) - \Delta(f)$$

Nel vuoto, in assenza di cariche e correnti si ottiene l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{Dove:} \quad v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

Introduzione



In un mezzo dielettrico lineare di suscettività χ_e , le equazioni di Maxwell possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

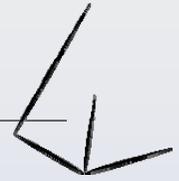
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dove ρ_f e \mathbf{J}_f sono rispettivamente la densità di carica e la densità di corrente libere. Inoltre:

$$\varepsilon = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$$

Introduzione



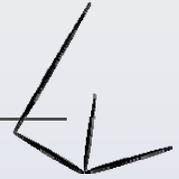
Se si prendono ρ_f e \mathbf{J}_f nulli e si applica di nuovo l'identità vettoriale usata prima si ottiene di nuovo l'equazione delle onde, ma stavolta la velocità è:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\chi_e)\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\chi_e}} = \frac{c}{\sqrt{1+\chi_e}}$$

Con:

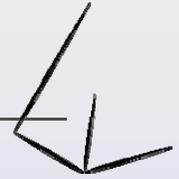
$$n = \frac{1}{\sqrt{1+\chi_e}}$$

Introduzione



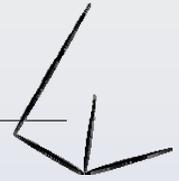
- In questo modo l'elettrodinamica spiega l'evidenza sperimentale, ben nota dall'ottica geometrica, per cui la luce in un mezzo dielettrico trasparente viaggia con velocità ridotta di un fattore n rispetto al vuoto.
- Questa dimostrazione è veloce ed efficace ma non evidenzia il meccanismo implicato.

Introduzione



- Quando un campo elettromagnetico (la luce) colpisce un materiale dielettrico, il campo elettrico incidente induce un dipolo elettrico oscillante in ogni molecola.
- Questi dipoli oscillanti emettono nuovi campi elettrici e magnetici.
- Per una coincidenza meravigliosa, questi campi secondari si combinano perfettamente con i campi primari per produrre un'unica onda che si propaga con la velocità ridotta discussa prima.

Introduzione



- Quanto detto finora è perfettamente logico e corretto, ma poco soddisfacente in quanto si basa su una combinazione miracolosa dei campi dei dipoli indotti.
- Diventa un po' più plausibile se la si riformula nella seguente maniera.
- Si considera la polarizzazione \mathbf{P} indotta in un materiale da un campo elettrico \mathbf{E} . Sarà:
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$
- Questa polarizzazione crea la seguente corrente:

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Introduzione

Si introducono ora le ultime due equazioni ricavate nella IV equazione di Maxwell, tenendo conto che la corrente è:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_p$$

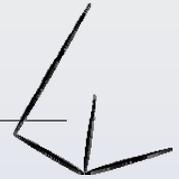
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{J}_f + \vec{J}_p) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial (\varepsilon_0 \chi_e \vec{E})}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \varepsilon_0 \chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

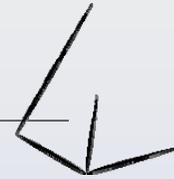
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Introduzione

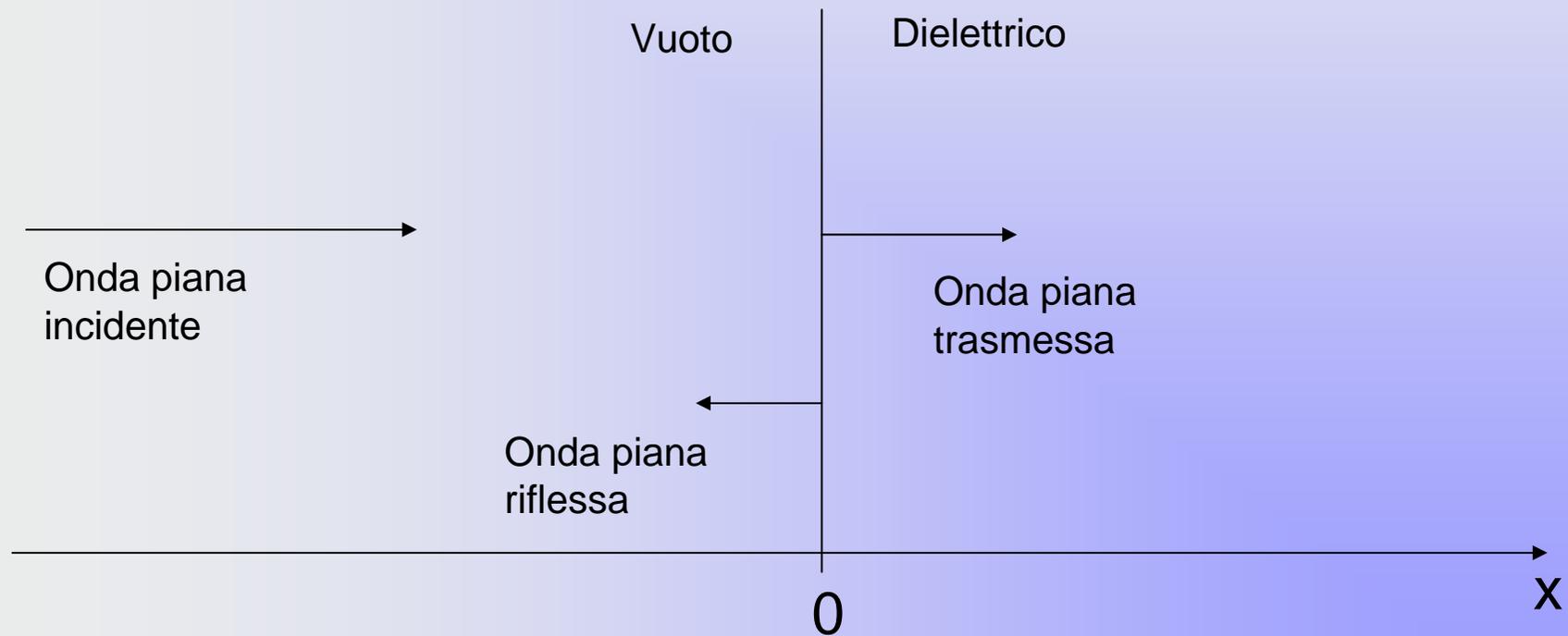


- Quindi il passaggio da ε_0 a ε dal vuoto al dielettrico è attribuibile ai campi generati dalle correnti associate alla polarizzazione del materiale.
- Per vedere in che modo avviene la “cooperazione miracolosa” dei dipoli oscillanti, si cercherà di analizzare il meccanismo con cui avviene il fenomeno.
- Il processo sarà visto come uno sviluppo in potenze di χ_e derivante da perturbazioni (approccio perturbativo).
- Prima di continuare, però, sarà illustrato anche l’approccio standard (non perturbativo) alla risoluzione del problema.

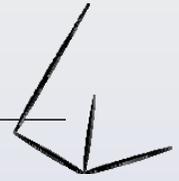
Introduzione



In tutte le discussioni seguenti verrà usato il seguente sistema:



Approccio standard



- Si considera un'onda piana monocromatica incidente su un mezzo dielettrico trasparente ($x > 0$) dal vuoto ($x < 0$).
- Quest'onda darà origine ad un'onda trasmessa ed un'onda riflessa.
- L'onda incidente è:

$$\vec{E}^I(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j}$$

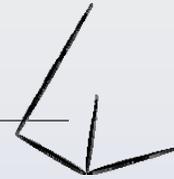
$$\vec{B}^I(x, t) = \frac{1}{c} E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{k}$$

- L'onda riflessa è:

$$\vec{E}^R(x, t) = E_R e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j}$$

$$\vec{B}^R(x, t) = -\frac{1}{c} E_R e^{i(-kx - \omega t)} \hat{k}$$

Approccio standard



- L'onda trasmessa è:

$$\vec{E}^T(x, t) = E_T e^{i(k'x - \omega t)} \hat{j} \qquad \vec{B}^T(x, t) = \frac{n}{c} E_T e^{i(k'x - \omega t)} \hat{k}$$

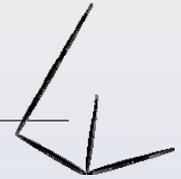
- Nelle equazioni appena esposte valgono le seguenti relazioni di dispersione:

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad k' = n \frac{\omega}{c}$$

- All'interfaccia ($x=0$) i campi devono soddisfare le normali condizioni al contorno elettromagnetiche:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_{1\perp} &= \varepsilon_2 E_{2\perp} & B_{1\perp} &= B_{2\perp} \\ \vec{E}_{1\parallel} &= \vec{E}_{2\parallel} & \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1\parallel} &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2\parallel} \end{aligned}$$

Approccio standard



- Nel caso considerato \vec{E}_\perp e \vec{B}_\perp sono nulli (incidenza normale), e $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, quindi le condizioni al contorno richiedono semplicemente che \vec{E} e \vec{B} siano continui per $x=0$. Otteniamo quindi:

$$E_0 + E_R = E_T$$

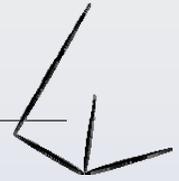
$$E_0 - E_R = nE_T$$

- Da cui si ricava:

$$E_T = \frac{2}{n+1} E_0$$

$$E_R = -\frac{n-1}{n+1} E_0$$

Approccio standard



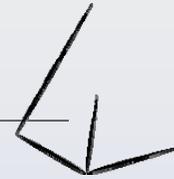
- Il campo elettrico trasmesso quindi sarà:

$$\vec{E}^T(x,t) = \frac{2}{n+1} E_0 e^{i(k'x - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

- Il campo elettrico riflesso invece sarà:

$$\vec{E}^R(x,t) = -\frac{n-1}{n+1} E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} \quad x < 0$$

Approccio standard

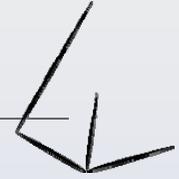


- Conviene però esprimere questi campi in termini di suscettività elettrica:

$$\vec{E}^T(x, t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \chi_e} + 1} E_0 e^{i(\sqrt{1 + \chi_e} kx - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

$$\vec{E}^R(x, t) = -\frac{\sqrt{1 + \chi_e} - 1}{\sqrt{1 + \chi_e} + 1} E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} \quad x < 0$$

Approccio standard

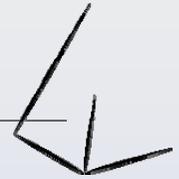


- Espandendo in potenze di χ_e si ottiene:

$$\begin{aligned}\vec{E}^T(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{1 + \chi_e} + 1} E_0 e^{i(\sqrt{1 + \chi_e} kx - \omega t)} \hat{j} = \\ &= \left[1 - \frac{1}{4} \chi_e (1 - 2ikx) + \frac{1}{8} \chi_e^2 (1 - 2ikx - k^2 x^2) + \dots \right] E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j}\end{aligned}$$

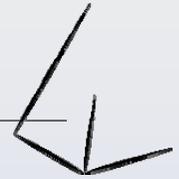
$$\begin{aligned}\vec{E}^R(x, t) &= -\frac{\sqrt{1 + \chi_e} - 1}{\sqrt{1 + \chi_e} + 1} E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} = \\ &= -\frac{1}{4} \chi_e \left(1 - \frac{1}{2} \chi_e + \frac{5}{16} \chi_e^2 + \dots \right) E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j}\end{aligned}$$

Approccio perturbativo



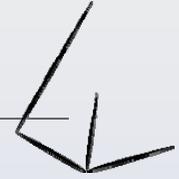
- Si immagina un'onda piana incidente su un mezzo dielettrico.
- Se si approssima il fenomeno allo zeresimo ordine quest'onda semplicemente prosegue il suo cammino senza modifiche.
- A questo punto, però, l'onda l'onda passata ha polarizzato il materiale; questa polarizzazione induce una corrente nel mezzo che genera un nuovo campo che viene chiamato del primo ordine.
- Questo nuovo campo ripeterà le operazioni connesse col passaggio del campo di ordine zero.

Approccio perturbativo



- Lo scopo proposto è dimostrare esplicitamente che la somma di tutti i campi così generati è un'onda piana che si propaga con la velocità ridotta $v = c/n$ all'interno del mezzo considerato.
- Nel contempo, al di fuori del mezzo dielettrico ($x < 0$) gli stessi campi, con ordine maggiore del primo, si combinano per dare origine all'onda riflessa che viaggia con velocità $v = c$.

Approccio perturbativo



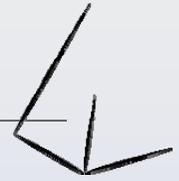
- Nello zeresimo ordine l'onda incidente continua semplicemente il suo percorso. Il campo associato quindi sarà:

$$\vec{E}^0(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

- Si può notare che quest'equazione è consistente con il primo termine dell'equazione trovata per il campo trasmesso nell'approccio standard:

$$\vec{E}^T(x, t) = \underbrace{E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j}}_{\text{circled}} + \frac{1}{4} \chi_e (1 - 2ikx) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} + \frac{1}{8} \chi_e^2 (1 - 2ikx - k^2 x^2) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} + \dots$$

Approccio perturbativo



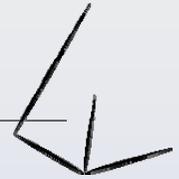
- Il campo \mathbf{E}^0 produce nel mezzo la polarizzazione \mathbf{P}^1 :

$$\vec{P}^1(x, t) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}^0 = \varepsilon_0 \chi_e E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

- La corrente di polarizzazione risultante sarà:

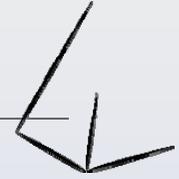
$$\vec{J}_p^1(x, t) = \frac{\partial \vec{P}^1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}^0) = -i\omega \varepsilon_0 \chi_e E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

Approccio perturbativo

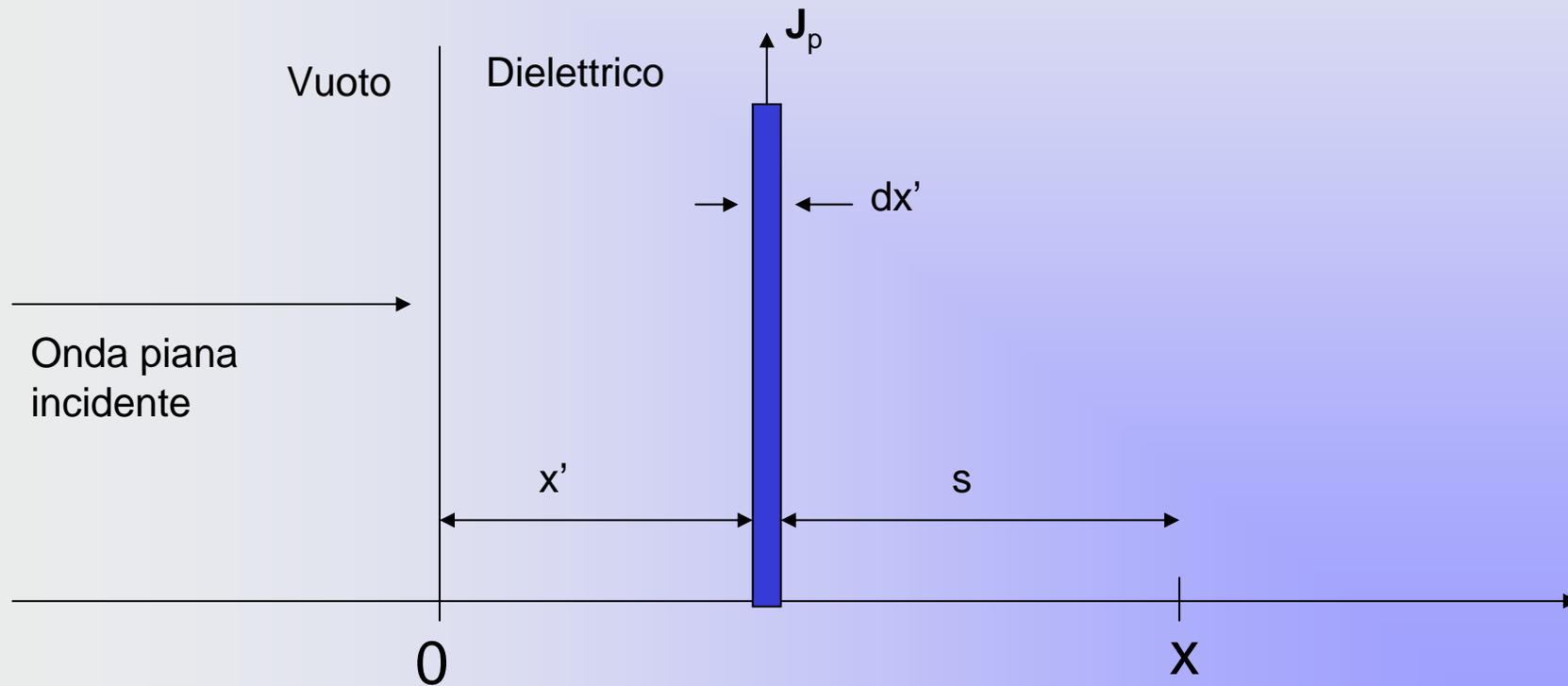


- Per calcolare il campo generato da questa corrente bisogna suddividere idealmente il dielettrico in “fette” di spessore infinitesimo dx' .
- Ciascuna di queste fette deve essere considerata un piano yz che contiene una corrente di superficie .
- Per ricavare la formula generale del campo generato da una corrente superficiale contenuta in un piano neutro si considera la corrente $\mathbf{K}(t)$ uniforme e dipendente dal tempo.

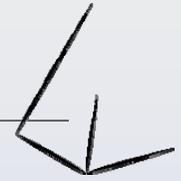
Approccio perturbativo



Verrà considerato quindi il seguente schema:



Approccio perturbativo



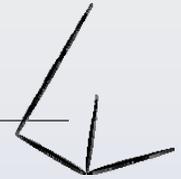
- Il potenziale vettore ritardato in un punto a distanza s sopra il piano è:

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(t_r)}{\sqrt{r^2 + s^2}} da$$

- Dove t_r è il tempo ritardato e da è un elemento infinitesimale di area.

$$t_r = t - \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{c} \qquad da = 2\pi \cdot r dr$$

Approccio perturbativo



- Il potenziale vettore ritardato quindi diventa:

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty \vec{K} \left(t - \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{c} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} dr$$

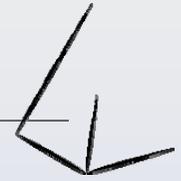
- Per semplificare l'integrale si definisce una nuova variabile u , tale che:

$$u = \frac{1}{c} (\sqrt{r^2 + s^2} - s) \quad du = \frac{1}{c} \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} dr \quad t - \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{c} = t - \frac{s}{c} - u$$

- Quindi si ottiene:

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty \vec{K} \left(t - \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{c} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} dr$$

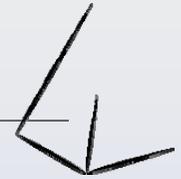
Approccio perturbativo



- Partendo dal potenziale vettore è semplice ricavare il campo elettrico:

$$\begin{aligned}\vec{E}(s, t) &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{K} \left(t - \frac{s}{c} - u \right) \right] du = \\ &= \frac{\mu_0 c}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial u} \vec{K} \left(t - \frac{s}{c} - u \right) \right] du = \\ &= \frac{\mu_0 c}{2} \left[\vec{K} \left(t - \frac{s}{c} - u \right) \right]_0^\infty = -\frac{\mu_0 c}{2} \left[\vec{K} \left(t - \frac{s}{c} \right) - \vec{K}(-\infty) \right]\end{aligned}$$

Approccio perturbativo

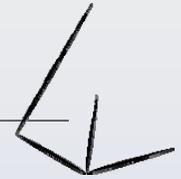


- Se si assume che la corrente vada a zero per grandi distanze di tempo, il secondo termine può essere considerato nullo. Di conseguenza il risultato è:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 c}{2} \vec{K} \left(t - \frac{s}{c} \right)$$

- Sebbene l'assunzione appena fatta non sia strettamente verificata per la corrente \mathbf{J}_p^1 (che è puramente immaginaria), descrive al meglio la circostanza fisica, nella quale la sorgente della luce incidente è stata accesa in un determinato istante finito.

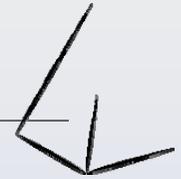
Approccio perturbativo



- Formalmente è possibile risolvere il problema addizionando una piccola parte immaginaria alla frequenza ($\omega \rightarrow \omega + i\varepsilon$), la quale attenua il campo ad alti valori negativi di t , e prendendo alla fine dei calcoli il limite $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Tenuto conto di tutto ciò il campo perturbativo in x dovuto alla corrente \mathbf{J}_p^1 è:

$$\begin{aligned}\vec{E}^1(x,t) &= \left(-\frac{\mu_0 c}{2}\right) (-i\omega \varepsilon_0 \chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left(\int_0^\infty e^{i\left[kx' - \omega\left(t - \frac{s}{c}\right)\right]} dx' \right) = \\ &= + \left(\frac{i\omega \chi_e E_0 \hat{j} c}{2} \right) (\mu_0 \varepsilon_0) \cdot \left(\int_0^x e^{i\left[kx' - \omega\left(t - \frac{x-x'}{c}\right)\right]} dx' + \int_x^\infty e^{i\left[kx' - \omega\left(t - \frac{x'-x}{c}\right)\right]} dx' \right)\end{aligned}$$

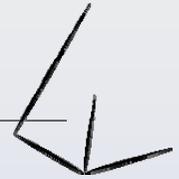
Approccio perturbativo



- Proseguendo si ottiene:

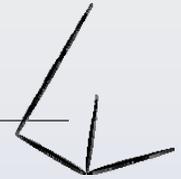
$$\begin{aligned}\vec{E}^1(x,t) &= + \left(\frac{i\omega\chi_e E_0 \hat{j}c}{2} \right) (\mu_0 \epsilon_0) \cdot \left(\int_0^x e^{i\left[kx' - \omega\left(t - \frac{x-x'}{c}\right)\right]} dx' + \int_x^\infty e^{i\left[kx' - \omega\left(t - \frac{x'-x}{c}\right)\right]} dx' \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{c\omega}{c^2} (i\chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left[\int_0^x e^{i\left(kx' - \omega t + \omega \frac{x-x'}{c}\right)} dx' + \int_x^\infty e^{i\left(kx' - \omega t + \omega \frac{x'-x}{c}\right)} dx' \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} (i\chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left[\int_0^x e^{i(kx' - \omega t + kx - kx')} dx' + \int_x^\infty e^{i(kx' - \omega t + kx' - kx)} dx' \right] = \\ &= \frac{ik}{2} (i\chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left[\int_0^x e^{i(+kx - \omega t)} dx' + \int_x^\infty e^{2ikx'} e^{i(-kx - \omega t)} dx' \right] =\end{aligned}$$

Approccio perturbativo



- Il limite superiore del secondo integrale porta ad un termine della forma $e^{2ikL} e^{(-kx-\omega t)}$ con $L \rightarrow \infty$ che rappresenta un'onda retroriflessa dall'altro lato del dielettrico ($x = L$).
- In questo caso un termine del genere non è voluto, è nuovamente un artefatto della corrente sinusoidale pura, e sparisce se attenuiamo l'onda incidente come illustrato precedentemente: il fattore e^{2ikL} andrà a zero nel limite di $L \rightarrow \infty$.

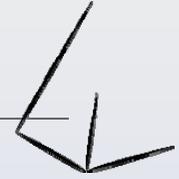
Approccio perturbativo



- L'integrale quindi verrà svolto come segue:

$$\begin{aligned}\vec{E}^1(x,t) &= \frac{ik}{2} (i\chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left[\int_0^x e^{i(+kx-\omega t)} dx' + \int_x^\infty e^{2ikx'} e^{i(-kx-\omega t)} dx' \right] = \\ &= \frac{ik}{2} (i\chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left[\left(e^{i(+kx-\omega t)} \right) x' \Big|_0^x + \left(e^{i(-kx-\omega t)} \right) \left(\frac{e^{2ikx'}}{2ik} \Big|_x^\infty \right) \right] = \\ &= \frac{ik}{2} (i\chi_e E_0 \hat{j}) \cdot \left[e^{i(+kx-\omega t)} (x-0) + \frac{e^{i(-kx-\omega t)}}{2ik} \left(\cancel{e^{2ikL}} - e^{2ikx} \right) \right] = \\ &= \frac{ikx}{2} e^{i(+kx-\omega t)} (i\chi_e E_0 \hat{j}) - \frac{ik}{2} \frac{e^{i(-kx-\omega t+2kx)}}{2ik} (i\chi_e E_0 \hat{j}) = -\frac{\chi_e}{4} (1-2ikx) E_0 e^{i(+kx-\omega t)} \hat{j}\end{aligned}$$

Approccio perturbativo



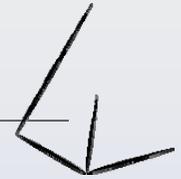
- Il campo elettrico $\mathbf{E}^1(x,t)$ diventerà quindi:

$$\vec{E}^1(x,t) = -\frac{1}{4} \chi_e (1 - 2ikx) \vec{E}^0(x,t) \quad x > 0$$

- Si può notare che quest'equazione è consistente con il secondo termine dell'equazione trovata per il campo trasmesso nell'approccio standard:

$$\vec{E}^T(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} - \frac{1}{4} \chi_e (1 - 2ikx) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} + \frac{1}{8} \chi_e^2 (1 - 2ikx - k^2 x^2) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} + \dots$$

Approccio perturbativo



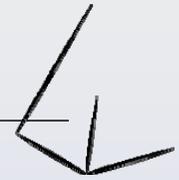
- Il campo \mathbf{E}^1 produce nel mezzo la polarizzazione \mathbf{P}^2 :

$$\vec{P}^2(x, t) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}^1 = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \chi_e^2 (1 - 2ikx) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

- La corrente di polarizzazione risultante sarà:

$$\vec{J}_p^2(x, t) = \frac{\partial \vec{P}^2}{\partial t} = +\frac{1}{4} i \omega \varepsilon_0 \chi_e^2 (1 - 2ikx) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} \quad x > 0$$

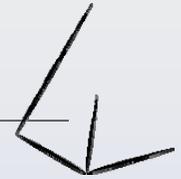
Approccio perturbativo



- Il campo prodotto da questa corrente sarà:

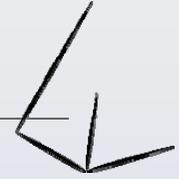
$$\begin{aligned}
 \vec{E}^2 &= -\frac{\mu_0 c}{2} \vec{J}_p^2 \left(x, t - \frac{s}{c} \right) = \\
 &= -\frac{\mu_0 c}{2} \int_0^\infty i \omega \varepsilon_0 \frac{\chi_e^2}{4} (1 - 2ikx') E_0 e^{i \left[kx' - \omega \left(t - \frac{s}{c} \right) \right]} \hat{j} dx' = \\
 &= -\frac{\chi_e^2}{8} i \mu_0 \varepsilon_0 c \omega E_0 \hat{j} \int_0^\infty (1 - 2ikx') e^{i \left[kx' - \omega \left(t - \frac{s}{c} \right) \right]} dx' = \\
 &= -\frac{\chi_e^2}{8} \frac{ic\omega}{c^2} E_0 \hat{j} \left[\int_0^x (1 - 2ikx') e^{i \left[kx' - \omega \left(t - \frac{x-x'}{c} \right) \right]} dx' + \int_x^\infty (1 - 2ikx') e^{i \left[kx' - \omega \left(t - \frac{x'-x}{c} \right) \right]} dx' \right] =
 \end{aligned}$$

Approccio perturbativo



$$\begin{aligned}
 \vec{E}^2 &= -\frac{\chi_e^2}{8} \frac{i\omega}{c} E_0 \hat{j} \left(\int_0^x e^{i[kx' - \omega t + kx - kx']} dx' - 2ik \int_0^x x' e^{i[kx' - \omega t + kx - kx']} dx' + \right. \\
 &+ \left. \int_x^\infty e^{i[kx' - \omega t + kx' - kx]} dx' - 2ik \int_x^\infty x' e^{i[kx' - \omega t + kx' - kx]} dx' \right) = \\
 &= -\frac{\chi_e^2}{8} ik E_0 \hat{j} \left(e^{i(kx - \omega t)} \int_0^x dx' - 2ike^{i(kx - \omega t)} \int_0^x x' dx' + e^{i(-kx - \omega t)} \int_x^\infty e^{2ikx'} dx' - \right. \\
 &\left. - 2ike^{i(-kx - \omega t)} \int_x^\infty x' e^{2ikx'} dx' \right) =
 \end{aligned}$$

Approccio perturbativo



$$\vec{E}^2 = -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} (e^{i(kx-\omega t)}(x-0) - 2ike^{i(kx-\omega t)} \left(\frac{x^2}{2} - 0 \right) + \frac{e^{i(-kx-\omega t)}}{2ik} \times$$

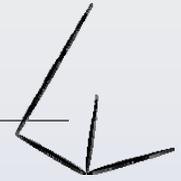
$$\times \left(\cancel{e^{2ikL}} - e^{2ikx} \right) - 2ike^{i(-kx-\omega t)} \left(\frac{x'e^{2ikx'}}{2ik} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{2ikx'}}{2ik} \cdot 1 dx' \right) =$$

$$= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} (xe^{i(kx-\omega t)} - ikx^2 e^{i(kx-\omega t)} - \frac{e^{i(-kx-\omega t+2kx)}}{2ik} - e^{i(-kx-\omega t)} \times$$

$$\times \left(\cancel{Le^{2ikL}} - xe^{2ikx} - \frac{e^{2ikx'}}{2ik} \Big|_x^\infty \right) =$$

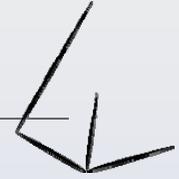
$(L \rightarrow \infty)$

Approccio perturbativo



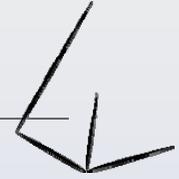
$$\begin{aligned}\vec{E}^2 &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} (xe^{i(kx-\omega t)} - ikx^2 e^{i(kx-\omega t)} - \frac{1}{2ik} e^{i(kx-\omega t)} - e^{i(-kx-\omega t)}) \times \\ &\times \left(-xe^{2ikx} - \frac{1}{2ik} e^{2ikL} + \frac{1}{2ik} e^{2ikx} \right) = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} (xe^{i(kx-\omega t)} - ikx^2 e^{i(kx-\omega t)} - \frac{1}{2ik} e^{i(kx-\omega t)} - \\ &- \left(-x + \frac{1}{2ik} \right) e^{i(-kx-\omega t+2kx)}) =\end{aligned}$$

Approccio perturbativo



$$\begin{aligned}\vec{E}^2 &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} \left(x - ikx^2 - \frac{1}{2ik} + x - \frac{1}{2ik} \right) e^{i(kx - \omega t)} = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} \left(\frac{2ikx + 2k^2 x^2 - 1 + 2ikx - 1}{2ik} \right) e^{i(kx - \omega t)} = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} E_0 \hat{j} \frac{2(2ikx + k^2 x^2 - 1)}{2} e^{i(kx - \omega t)} = \\ &= \frac{\chi_e^2}{8} (1 - 2ikx - k^2 x^2) e^{i(kx - \omega t)} E_0 \hat{j}\end{aligned}$$

Approccio perturbativo



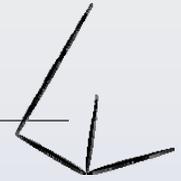
- Il campo elettrico $\mathbf{E}^2(x,t)$ sarà quindi:

$$\vec{E}^2(x,t) = \frac{1}{8} \chi_e^2 (1 - 2ikx - k^2 x^2) \vec{E}^0(x,t) \quad x > 0$$

- Si può notare che quest'equazione è consistente con il secondo termine dell'equazione trovata per il campo trasmesso nell'approccio standard:

$$\vec{E}^T(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} - \frac{1}{4} \chi_e (1 - 2ikx) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} + \frac{1}{8} \chi_e^2 (1 - 2ikx - k^2 x^2) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j} + \dots$$

Approccio perturbativo



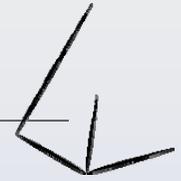
- A questo punto si può intuire la progressione :

$$\vec{E}^n(x, t) = \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^2 Q_n(z) \cdot \vec{E}^0(x, t) \quad x > 0$$

- Dove Q_n è un polinomio di ordine n nella variabile $z = -2ikx$.
- Per i casi precedenti i Q_n erano:

$$Q_0 = 1 \quad Q_1 = \frac{1}{2}(1 + z) \quad Q_2 = \frac{1}{2}\left(1 + z + \frac{z^2}{4}\right)$$

Approccio perturbativo



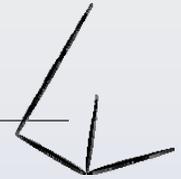
- La corrente di polarizzazione causata da questi campi sarà:

$$\vec{J}_p^{n+1}(x, t) = \frac{\partial \vec{P}^n}{\partial t} = -i\omega\epsilon_0\chi_e \vec{E}^n(x, t) \quad x > 0$$

- La quale produrrà un campo:

$$\vec{E}^{n+1}(x, t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^{n+1} \vec{E}^0(x, t) \cdot \left(\int_0^z Q_n(z') dz' + e^z \int_z^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' \right)$$

Approccio perturbativo



- Evidentemente la relazione di ricorsione per Q_n è:

$$Q_{n+1}(z) = \frac{1}{2} \left(\int_0^z Q_n(z') dz' + e^z \int_z^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' \right)$$

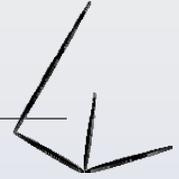
- Da cui si ricava:

$$\frac{dQ_{n+1}}{dz} = \frac{1}{2} e^z \int_z^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' = Q_{n+1} - \frac{1}{2} \int_0^z Q_n(z') dz'$$

- E quindi:

$$\frac{d^2 Q_{n+1}}{dz^2} - \frac{dQ_{n+1}}{dz} + \frac{1}{2} Q_n = 0$$

Approccio perturbativo



- L'onda trasmessa totale è:

$$\vec{E}^T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}^n(x, t) = f(z) \vec{E}^0(x, t)$$

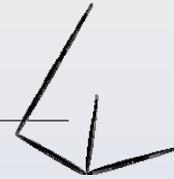
- Dove:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n Q_n(z)$$

- Ne segue che:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{df}{dz} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n Q_{n-1} = 0$$

Approccio perturbativo



- Ridefinendo la sommatoria con $n \rightarrow n + 1$ si ottiene:

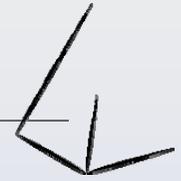
$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{df}{dz} - \frac{\chi_e}{4} f = 0$$

- Questa è un'equazione differenziale in $f(z)$; la sua soluzione generale è:

$$f(z) = A(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1-\sqrt{1+\chi_e})z}{2}} + B(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1+\sqrt{1+\chi_e})z}{2}}$$

- Rimangono da determinare $A(\chi_e)$ e $B(\chi_e)$.

Approccio perturbativo



- Quando $\chi_e = 0$ si avrà: $f(z) = A(0) + B(0)e^z$

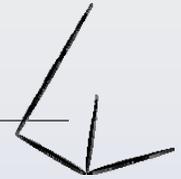
- Da $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n Q_n(z)$ si può capire che se $\chi_e = 0$ si ha:

$$f(z) = Q_0(z) = 1$$

- Evidentemente:

$$A(0) = 1 \quad \text{e} \quad B(0) = 0$$

Approccio perturbativo



- Analogamente, differenziando la soluzione generale rispetto a χ_e , e ponendo $\chi_e = 0$, si ottiene:

$$f'(z) = A'(0) - \frac{z}{4} + B'(0)e^z$$

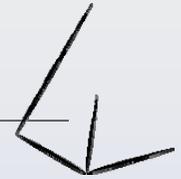
- Da $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n Q_n(z)$ si può capire che se $\chi_e = 0$ si ha:

$$f'(z) = -\frac{1}{2}Q_1(z) = -\frac{1}{4} - \frac{z}{4}$$

- Evidentemente:

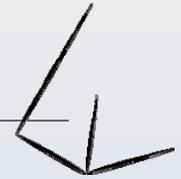
$$A'(0) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad B'(0) = 0$$

Approccio perturbativo



- Da qui si può notare che tutte le derivate di B conterranno un fattore e^z .
- Questo fattore è assente in $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n Q_n(z)$.
- Di conseguenza tutte le derivate di B devono essere nulle.
- Quindi: $B(\chi_e) = 0$
- Rimane da determinare solo $A(\chi_e)$.

Approccio perturbativo



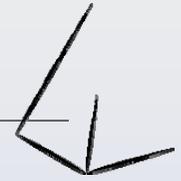
- Per calcolare $A(\chi_e)$ si cerca $f(0)$.
- Si parte dalla relazione di ricorsione per Q_n :

$$Q_{n+1}(z) = \frac{1}{2} \left(\int_0^z Q_n(z') dz' + e^z \int_z^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' \right)$$

- La si calcola per $z = 0$:

$$Q_{n+1}(0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^0 Q_n(z') dz' + e^0 \int_0^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' \right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz'$$

Approccio perturbativo



- Poi si calcola $f(0)$ partendo dalla definizione di $f(z)$:

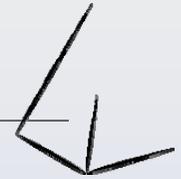
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n Q_n(z) \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n Q_n(0) = +Q_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n Q_n(0)$$

- A questo punto si inserisce nella sommatoria il valore di Q_n ottenuto con la formula ricorsiva illustrata prima:

$$f(0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Q_{n-1}(z') e^{-z'} dz' = 1 - \frac{\chi_e}{4} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^{n-1} Q_{n-1}(z') e^{-z'} dz'$$

Approccio perturbativo



- Cambiando l'indice della sommatoria da n a $n+1$ si avrà:

$$f(0) = 1 - \frac{\chi_e}{4} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n Q_n(z') e^{-z'} dz' = 1 - \frac{\chi_e}{4} \int_0^\infty f(z') e^{-z'} dz'$$

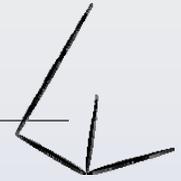
- Ora si inserirà nell'integrale la definizione di $f(z)$ che contiene $A(\chi_e)$:

$$f(z) = A(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1-\sqrt{1+\chi_e})z}{2}} + B(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1+\sqrt{1+\chi_e})z}{2}}$$

- Visto che $B(\chi_e) = 0$ la forma di $f(z)$ che inseriremo sarà:

$$f(z) = A(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1-\sqrt{1+\chi_e})z}{2}}$$

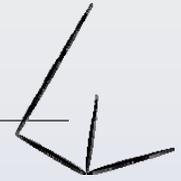
Approccio perturbativo



- Quindi:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - \frac{\chi_e}{4} \int_0^{\infty} f(z') e^{-z'} dz' = 1 - \frac{\chi_e}{4} \int_0^{\infty} A(\chi_e) e^{\left(\frac{1-\sqrt{1+\chi_e}}{2}\right)z'} e^{-z'} dz' = \\ &= 1 - A(\chi_e) \frac{\chi_e}{4} \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{1-\sqrt{1+\chi_e}}{2}-1\right)z'} dz' = 1 - A(\chi_e) \frac{\chi_e}{4} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\chi_e})z'} dz' = \\ &= 1 - A(\chi_e) \frac{\chi_e}{4} \frac{2}{1+\sqrt{1+\chi_e}} e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\chi_e})z'} \Big|_0^{\infty} = \\ &= 1 - A(\chi_e) \frac{\chi_e}{4} \frac{2}{1+\sqrt{1+\chi_e}} \left(e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\chi_e})\infty} - e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\chi_e})0} \right) = \end{aligned}$$

Approccio perturbativo



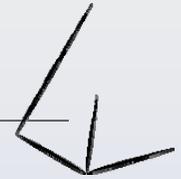
$$f(0) = 1 - A(\chi_e) \frac{\chi_e}{4} \left(-\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}} \right) \left(\underbrace{e^{-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \chi_e})\infty}}_0 - \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \chi_e})0}}_1 \right)$$

$$\longrightarrow f(0) = 1 - A(\chi_e) \frac{2\chi_e}{4(1 + \sqrt{1 + \chi_e})}$$

- Ma $f(0)$ può essere ricavato anche dalla definizione data precedentemente di $f(z)$:

$$f(z) = A(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1 - \sqrt{1 + \chi_e})z}{2}} \longrightarrow f(0) = A(\chi_e) \cdot e^{\frac{(1 - \sqrt{1 + \chi_e})0}{2}} = A(\chi_e)$$

Approccio perturbativo



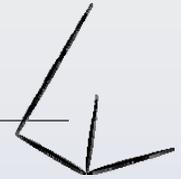
- Quindi eguagliando le due definizioni di $f(0)$ e risolvendo rispetto ad $A(\chi_e)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} A(\chi_e) &= \left(1 + \frac{2\chi_e}{4(1 + \sqrt{1 + \chi_e})} \right)^{-1} = \left(\frac{4 + 4\sqrt{1 + \chi_e} + 2\chi_e}{4(1 + \sqrt{1 + \chi_e})} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{2(2 + 2\sqrt{1 + \chi_e} + 1\chi_e)}{4(1 + \sqrt{1 + \chi_e})} \right)^{-1} = \left(\frac{(1 + \sqrt{1 + \chi_e})^2}{2(1 + \sqrt{1 + \chi_e})} \right)^{-1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}} \end{aligned}$$

- Di conseguenza $f(z)$ sarà:

$$f(z) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}} e^{\frac{(1 - \sqrt{1 + \chi_e})z}{2}}$$

Approccio perturbativo

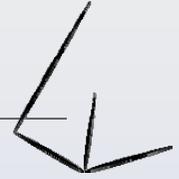


- A questo punto l'onda trasmessa totale (ricordando la definizione $z = -2ikx$) sarà:

$$\begin{aligned}\vec{E}^T(x,t) &= f(z)\vec{E}^0(x,t) = \frac{2}{1+\sqrt{1+\chi_e}} e^{-ikx(1-\sqrt{1+\chi_e})} E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{j} = \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{1+\chi_e}} E_0 e^{i(-kx+\sqrt{1+\chi_e}kx+kx-\omega t)} \hat{j} = \frac{2}{1+\sqrt{1+\chi_e}} E_0 e^{i(\sqrt{1+\chi_e}kx-\omega t)} \hat{j} = \\ &= \frac{2}{1+n} E_0 e^{i(nkx-\omega t)} \hat{j}\end{aligned}$$

- Cioè esattamente quella che avevamo trovato all'inizio tramite metodi tradizionali.

Approccio perturbativo



- Vista l'onda trasmessa ora si procede nella stessa maniera per l'**onda riflessa**.
- Ci si occuperà quindi della regione con $x < 0$.
- Nello zeroesimo ordine non c'è riflessione (tutta l'onda viene trasmessa).
- Al primo ordine procediamo come per l'onda trasmessa, l'unica differenza è che x sarà sempre minore di x' quindi ci sarà un'unica definizione per s .
- Come prima la polarizzazione di primo ordine e la conseguente corrente saranno generate dall'onda trasmessa.

Approccio perturbativo

$$\vec{E}^1(x, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} \vec{J}_p^1\left(x, t - \frac{s}{c}\right) \quad \text{con} \quad \vec{J}_p^1(x, t) = -i\omega\varepsilon_0\chi_e E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j}$$

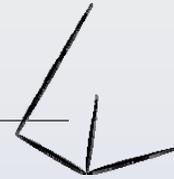
$$\vec{E}^1(x, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} (-i\omega\varepsilon_0\chi_e E_0 \hat{j}) \int_0^\infty e^{i\left[kx' - \omega\left(t - \frac{s}{c}\right)\right]} dx' =$$

$$= \frac{ik}{2} \chi_e E_0 \hat{j} \int_0^\infty e^{i[kx' - \omega t + kx' - kx]} dx' = \frac{ik}{2} \chi_e E_0 \hat{j} e^{i(-kx - \omega t)} \int_0^\infty e^{2ikx'} dx' =$$

$$= \frac{ik}{2} \chi_e E_0 \hat{j} e^{i(-kx - \omega t)} \left(\frac{e^{2ikx'}}{2ik} \Big|_0^\infty \right) = \frac{\chi_e}{4} E_0 \hat{j} e^{i(-kx - \omega t)} \left(\cancel{e^{2ikL}} - e^{2ik0} \right) =$$

$$= -\frac{\chi_e}{4} E_0 \hat{j} e^{i(-kx - \omega t)}$$

Approccio perturbativo



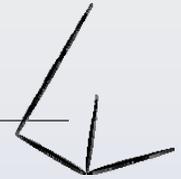
- Il campo elettrico $\mathbf{E}^1(x,t)$ sarà quindi:

$$\vec{E}^1(x,t) = -\frac{\chi_e}{4} E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j} \quad x < 0$$

- Si può notare che quest'equazione è consistente con il primo termine dell'equazione trovata per il campo riflesso nell'approccio standard:

$$\vec{E}^R(x,t) = \left(\underbrace{-\frac{1}{4} \chi_e}_{\text{circled}} + \frac{1}{8} \chi_e^2 - \frac{5}{64} \chi_e^3 + \dots \right) E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j}$$

Approccio perturbativo



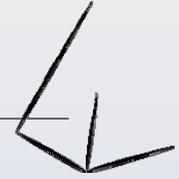
- Al secondo ordine il campo verrà generato da \mathbf{J}_p^2 :

$$\vec{E}^2(x, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} \vec{J}_p^2 \left(x, t - \frac{s}{c} \right) \quad \text{con} \quad \vec{J}_p^2(x, t) = \frac{\chi_e^2}{4} i \omega \varepsilon_0 (1 - 2ikx) E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j}$$

- Quindi si avrà:

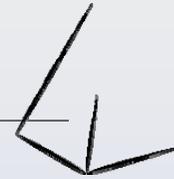
$$\begin{aligned} \vec{E}^2(x, t) &= -\frac{\mu_0 c}{2} \left(i \omega \varepsilon_0 \frac{\chi_e^2}{4} E_0 \hat{j} \right) \int_0^\infty (1 - 2ikx') e^{i \left[kx' - \omega \left(t - \frac{s}{c} \right) \right]} dx' = \\ &= -\frac{ik}{8} \chi_e^2 E_0 \hat{j} \int_0^\infty (1 - 2ikx') e^{i[kx' - \omega t + kx' - kx]} dx' = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} ik E_0 \hat{j} e^{i(-kx - \omega t)} \left(\int_0^\infty e^{2ikx'} dx' - 2ik \int_0^\infty x' e^{2ikx'} dx' \right) = \end{aligned}$$

Approccio perturbativo



$$\begin{aligned}\vec{E}^2(x, t) &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} e^{i(-kx-\omega t)} \left[\frac{e^{2ikx'}}{2ik} \Big|_0^\infty - 2ik \left(\frac{x' e^{2ikx'}}{2ik} - \int_0^\infty \frac{e^{2ikx'}}{2ik} 1 dx' \right) \right] = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} e^{i(-kx-\omega t)} \left[\frac{(e^{2ikL} - e^{2ik0})}{2ik} - \left(Le^{2ikL} - 0e^{2ik0} - \frac{e^{2ikx'}}{2ik} \Big|_0^\infty \right) \right] = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} e^{i(-kx-\omega t)} \left[-\frac{1}{2ik} - \frac{(-e^{2ikL} + e^{2ik0})}{2ik} \right] = \\ &= -\frac{\chi_e^2}{8} ikE_0 \hat{j} e^{i(-kx-\omega t)} \left(-\frac{2}{2ik} \right) = \frac{\chi_e^2}{8} E_0 \hat{j} e^{i(-kx-\omega t)}\end{aligned}$$

Approccio perturbativo



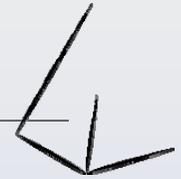
- Il campo elettrico $\mathbf{E}^2(x,t)$ sarà quindi:

$$\vec{E}^2(x,t) = \frac{\chi_e^2}{8} E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j} \quad x < 0$$

- Si può notare che quest'equazione è consistente con il primo termine dell'equazione trovata per il campo riflesso nell'approccio standard:

$$\vec{E}^R(x,t) = \left(-\frac{1}{4} \chi_e + \frac{1}{8} \chi_e^2 + \frac{5}{64} \chi_e^3 + \dots \right) E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j}$$

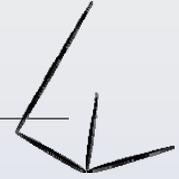
Approccio perturbativo



- In generale, il campo \mathbf{E}^{n+1} generato dalla corrente \mathbf{J}_p^{n+1} è:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{n+1}(x,t) &= \left(-\frac{\mu_0 c}{2}\right) (-i\omega \varepsilon_0 \chi_e) \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j} \times \\ &\times \left(-\frac{1}{2ik}\right) \int_0^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' = \\ &= -\frac{\chi_e}{2} ik \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j} \left(\frac{1}{2ik}\right) \int_0^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz' = \\ &= \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^{n+1} \frac{E_0 e^{i(-kx-\omega t)} \hat{j}}{2} \int_0^\infty Q_n(z') e^{-z'} dz'\end{aligned}$$

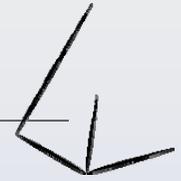
Approccio perturbativo



- Sapendo che: $Q_{n+1}(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Q_n(z') e^{-z'} dz'$
- Si ottiene: $\vec{E}^{n+1}(x, t) = E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} \left(\frac{\chi_e}{2} \right)^{n+1} Q_{n+1}(0)$
- L'onda riflessa totale sarà:

$$\vec{E}^R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}^n(x, t) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2} \right)^n Q_n(0) \right] E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j}$$

Approccio perturbativo



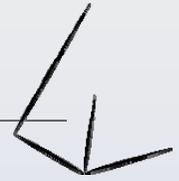
- Sapendo inoltre che: $f(0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n Q_n(0)$

- E: $f(0) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}}$

- Si ottiene:

$$\begin{aligned}\vec{E}^R(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}^n(x, t) = [f(0) - 1] E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} = \\ &= \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}} - 1 \right) E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} = \left(\frac{2 - 1 - \sqrt{1 + \chi_e}}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}} \right) E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j}\end{aligned}$$

Approccio perturbativo

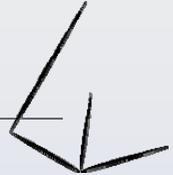


- Quindi:

$$\vec{E}^R(x, t) = \frac{1 - \sqrt{1 + \chi_e}}{1 + \sqrt{1 + \chi_e}} E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \hat{j} = \frac{1 - n}{1 + n} E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{j}$$

- Cioè esattamente quella che avevamo trovato all'inizio tramite metodi tradizionali.

Conclusioni



- Si può concludere affermando che non ci sono sorprese, solo una conferma che ciò che è stato l'ipotesi assunta all'inizio dell'approccio perturbativo è consistente.
- Inoltre è stato fornito un mezzo per comprendere in modo più profondo il meccanismo per il quale la velocità della luce è ridotta in un mezzo dielettrico.
- Naturalmente non si pretende che l'approccio perturbativo riportato sia superiore a quello tradizionale.
- Tuttavia è istruttivo (e confortante) vedere in dettaglio come le correnti di polarizzazione indotte in un mezzo dielettrico danno origine sia all'onda riflessa che all'onda trasmessa, la quale viaggia alla velocità ridotta c/n .