Paradossi relativistici

Apparente violazione della legge di conservazione del momento in un sistema elettromagnetico

Introduzione

Due cariche identiche, che chiameremo *q1* e *q2* per poterle distinguere, sono osservate in due sistemi di riferimento inerziali: Σ e Σ’

- Σ è il SRI del laboratorio
- Σ’ è un SRI che si muove rispetto a Σ con velocità v=vi costante.

Introduzione

Assumiamo:

- che le uniche forze presenti sono le forze elettriche di repulsione tra le due cariche, essendo esse dello stesso segno;
- che le masse delle due cariche sono sufficientemente grandi da poter considerare trascurabili le accelerazioni dovute alle suddette forze.

Introduzione

Quindi:

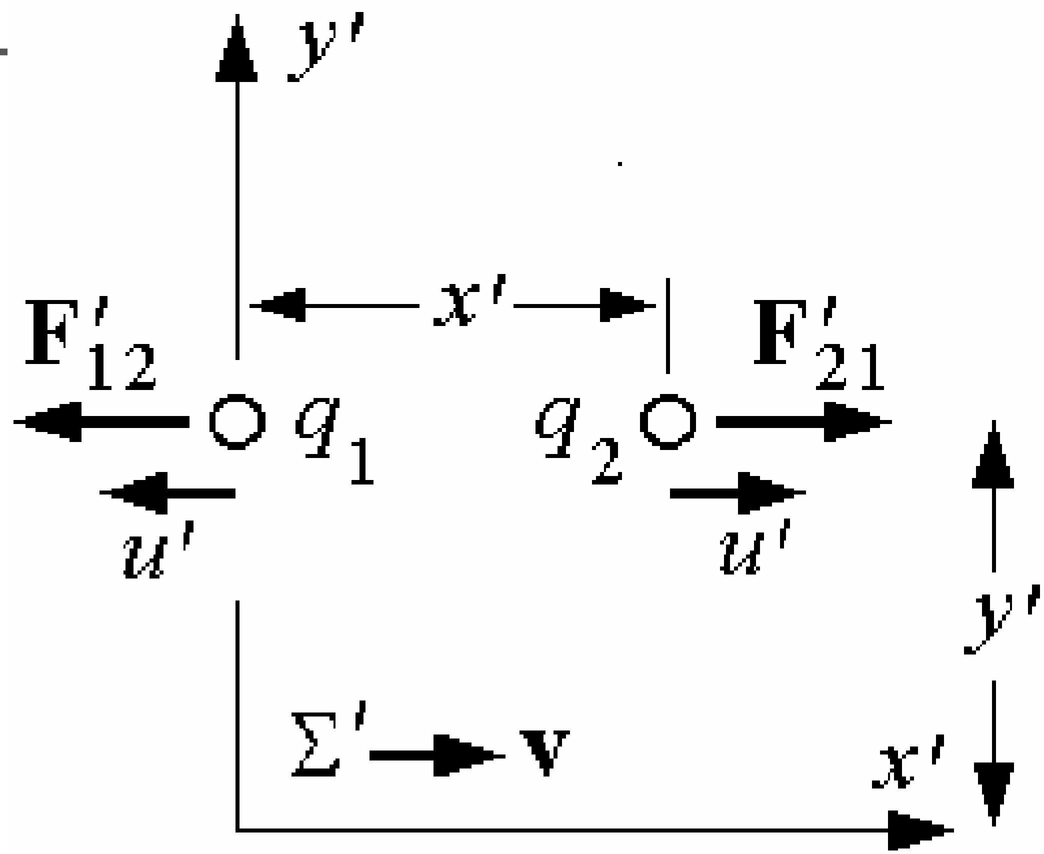
possiamo assumere che le cariche si muovono allontanandosi l'una dall'altra con uguale velocità costante u'.

Nel SRI Σ′

Analizziamo il SRI Σ′. Al tempo $t' = 0$ la carica *q1* è situata sull'asse *y′*, e la carica *q2* è ad una distanza *x′* da *q1* alla stessa altezza sull'asse *x′*

- Posizione q1: 0,y′
- Posizione q2: x′,y′

Nel SRI Σ’



Nel SRI Σ′

Il campo elettrico *E′* generato da una carica nel punto in cui è situata l'altra è:

$$E' = \frac{q\,(1 - u'^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 r'^3[1 - (u'^2/c^2)\sin^2\theta']^{3/2}}\ r'$$

(dalla formula di Heaviside)

Nel SRI Σ'

$$E' = \frac{q\,(1 - u'^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 r'^3[1 - (u'^2/c^2)\sin^2\theta']^{3/2}}\;r'$$

- ε_0 : permittività elettrica nel vuoto;
- u': velocità della carica che genera il campo;
- r': vettore raggio (il modulo è la distanza, la direzione è la congiungente tra la carica che genera il campo e quella che lo subisce);
- θ': l'angolo compreso tra r' e u'
- c : velocità della luce nel vuoto

Nel SRI Σ′

Nel nostro caso

- $\theta' = 0$
- $r' = x'$

Quindi

$$E' = \frac{q\,(1 - u'^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 \underbrace{r'^3}_{= x'^3} [1 - (u'^2/c^2) \underbrace{\sin^2\theta'}_{=0}]^{3/2}} \underbrace{\boldsymbol{r}'}_{= x'}$$

$$E' = \pm \frac{q\,(1 - u'^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 x'^2}\,\boldsymbol{i}$$

Nel SRI Σ′

La forza elettrica esercitata da *q1* su *q2* è:

$$F'_{12} = q_1 E'_{12} = -\frac{q_1 q_2 (1 - u'^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 x'^2}\ i$$

Quella esercitata da *q2* su *q1* è:

$$F'_{21} = q_2 E'_{21} = \frac{q_2 q_1 (1 - u'^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 x'^2}\ i$$

Nel SRI Σ'

Come possiamo vedere

$$F'_{12} = -F'_{21}$$

Le due forze sono uguali in modulo e opposte in direzione: la forza totale nel sistema delle due cariche è uguale a zero.

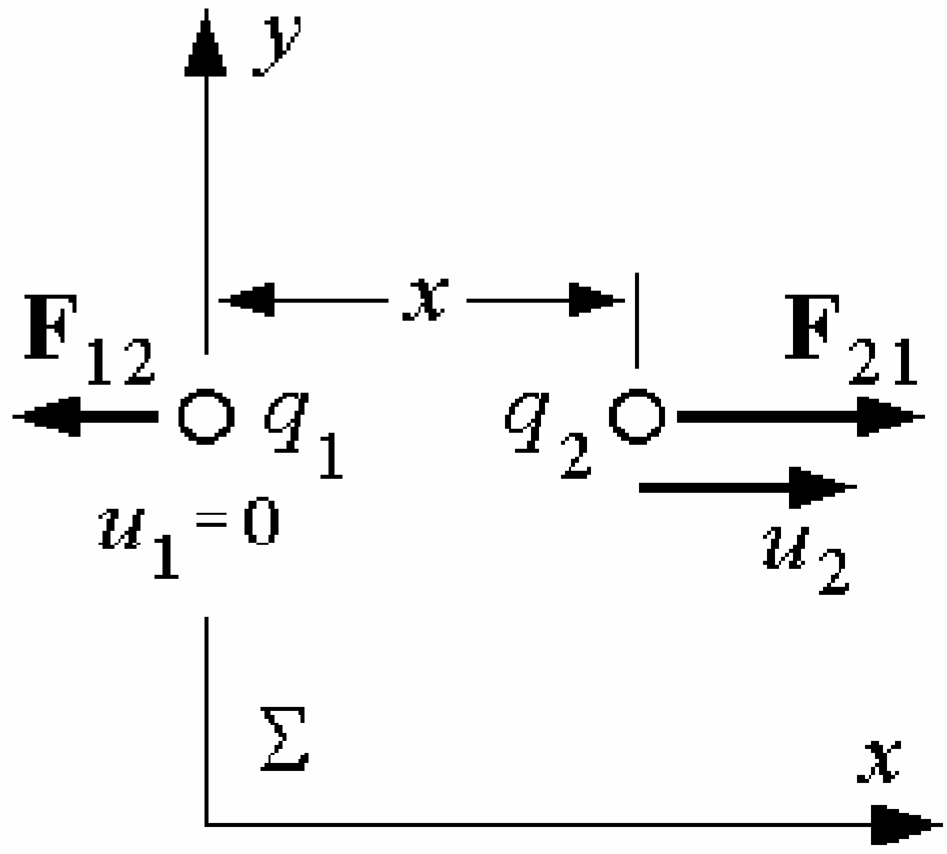
Nel SRI Σ

Considero ora il sistema di riferimento del laboratorio.

Prendiamo a esempio il caso in cui il sistema Σ' si muova con velocità $v = u'i$ rispetto a Σ (con u' velocità delle due cariche in Σ'). In questo caso la carica $q1$ è in quiete, mentre la carica $q2$ si muove con velocità u_2.

Il tempo di osservazione è $t = 0$

Nel SRI Σ



Nel SRI Σ

Possiamo ora ottenere le forze di interazione usando anche in questo caso la formula di Heaviside:

$$E = \frac{q(1 - u^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3[1 - (u^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\, r$$

Nel SRI Σ

Con le stesse considerazioni precedenti:

$$\boldsymbol{F}_{12} = q_1 \boldsymbol{E}_{12} = -\frac{q_1 q_2 (1 - u_2^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\, \boldsymbol{i}$$

è la forza esercitata dal campo generato dalla carica 2 sulla carica 1, con u_2 la velocità della carica 2 nel sistema di riferimento.

Nel SRI Σ

Mentre

$$F_{21} = q_2 E_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 x^2}\, i$$

è la forza esercitata dal campo generato dalla carica 1 sulla carica 2, che è equivalente alla forza di Coulomb (dato che la carica 2 è ferma).

Nel SRI Σ

Come si può immediatamente notare:

$$F_{12} \neq F_{21}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2 x^2}\,\boldsymbol{i}$$

IL SISTEMA NON E' IN EQUILIBRIO

Paradosso

Mentre in Σ′ la somma delle forze è nulla, soddisfacendo il principio di azione-reazione

$$F'_{12} + F'_{21} = 0;$$

nel sistema Σ la forza risultante ha un determinato valore diverso da zero

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2 x^2}\, \boldsymbol{i}$$

Paradosso

CONTRARIAMENTE AL PRINCIPIO DI RELATIVITA', L'EQUILIBRIO DI UN SISTEMA SEMBRA DIPENDERE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO PER OSSERVARLO.

(I postulato: Le leggi fisiche sono le stesse in ogni SRI)

Risoluzione del paradosso

Questo paradosso nasce dal fatto che fino ad ora abbiamo preso in considerazione solo la forza elettrica tra le due cariche, dato che il campo magnetico generato dalle cariche è nullo lungo la congiungente delle due e quindi esse non sperimentano alcuna forza magnetica.

Risoluzione del paradosso

Se però prendiamo in considerazione l'intero campo elettromagnetico generato dall'insieme delle due cariche, vediamo che il campo magnetico nel resto dello spazio non è uguale a zero.

Risoluzione del paradosso

La radiazione elettromagnetica trasporta un momento, chiamato momento elettromagnetico.

Quando le cariche si muovono, provocano una variazione del campo elettromagnetico, e quindi del momento elettromagnetico

Risoluzione del paradosso

Una variazione del momento elettromagnetico crea una forza elettromagnetica

Dobbiamo quindi tener conto non solo delle forze tra le cariche, ma anche dal momento che esse generano!

Risoluzione del paradosso

Quando due cariche, una ferma e l' altra in movimento lungo la congiungente tra le due, interagiscono, generano un momento elettromagnetico di interazione:

$$G = qA$$

con A potenziale vettore creato dalla carica in movimento nel punto in cui si trova la carica ferma.

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Per qualunque coppia di vettori V1 e V2 vale la seguente identità vettoriale:

$$\oint (V_1 \cdot V_2) dS - \oint V_1 (V_2 \cdot dS) - \oint V_2 (V_1 \cdot dS) =$$
$$= \int [V_1 \times (\nabla \times V_2) + V_2 \times (\nabla \times V_1) - V_2 (\nabla \cdot V_1) - V_1 (\nabla \cdot V_2)] \, dV$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Applicando questa identità vettoriale a D (vettore spostamento elettrico dovuto alla carica ferma) e A (potenziale vettore dovuto alla carica che si muove di moto uniforme) otteniamo:

$$\oint(D\cdot A)dS - \oint D(A\cdot dS) - \oint A(D\cdot dS) =$$
$$= \int[D\times(\nabla\times A) + A\times(\nabla\times D) - A(\nabla\cdot D) - D(\nabla\cdot A)]\, dV$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

- Since ***D*** and ***A*** are regular at infinity, l'integrale di superficie vale zero.
- Per una carica stazionaria ∇×D = 0.

$$\cancel{\oint(\mathbf{D}\bullet\mathbf{A})d\mathbf{S}} - \cancel{\oint \mathbf{D}(\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S})} - \cancel{\oint \mathbf{A}(\mathbf{D}\bullet d\mathbf{S})} =$$

$$= \int [\mathbf{D}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \cancel{\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{D})} - \mathbf{A}(\nabla\bullet\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\nabla\bullet\mathbf{A})]\, dV$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

$$\cancel{\oint(D\bullet A)dS} - \cancel{\oint D(A\bullet dS)} - \cancel{\oint A(D\bullet dS)} =$$

$$= \int[D\times(\nabla\times A) + \cancel{A\times(\nabla\times D)} - A(\nabla\bullet D) - D(\nabla\bullet A)]\, dV$$

Quindi

$$0 = \int[D\times(\nabla\times A) - A(\nabla\cdot D) - D(\nabla\cdot A)]\, dV$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

$$\int D\times(\nabla\times A)\, dV = \int A(\nabla\cdot D)\, dV + \int D(\nabla\cdot A)\, dV$$

Ma noi sappiamo, per definizione di A, che $\nabla\times A = B$ (con B densità di flusso magnetico dovuta alla carica in movimento).

Quindi $\int[D\times(\nabla\times A)\, dV$ è uguale a $\int D\times B$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

$\int \mathbf{D}\times\mathbf{B}\, dV$ corrisponde a G, il momento elettromagnetico associato all'interazione tra le cariche.

Quindi la nostra equazione diventa:

$$G = \int A(\nabla\cdot D)\, dV + \int D(\nabla\cdot A)\, dV$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

$$G = \int A(\nabla \cdot D)\, dV + \int D(\nabla \cdot A)\, dV$$

Tenendo conto che $\nabla \cdot D$ corrisponde alla densità di carica (ρ) di una carica puntiforme stazionaria q, otteniamo:

$$G = \int A\, \rho\, dV + \int D(\nabla \cdot A)\, dV$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

$G = \int A\,\rho\,dV + \int D(\nabla\cdot A)\,dV$

Dato che il volume occupato dalla carica stazionaria puntiforme è (per definizione) infinitesimale, $\int \rho\,dV = q$.

Quindi:

$G = qA + \int D(\nabla\cdot A)\,dV$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Il potenziale vettore soddisfa il *gauge* di Lorentz, quindi:

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

denominato φ il potenziale elettrostatico

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Quindi:

$$G = qA + \int D(\nabla \cdot A)\, dV$$

diventa:

$$G = -\frac{1}{c^2}\int D\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}V + qA$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Studio l'andamento di φ, nel caso in cui le cariche siano localizzate sull' asse x, quella stazionaria nell'origine e quella in movimento (q_m) con velocità v = vi ad una distanza da essa pari a d = x + vt (t tempo d'osservazione):

$$\varphi = \frac{q_m}{4\pi\varepsilon_0\left[(x' - x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y'^2 + z'^2)\right]^{1/2}}$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Differenziando questa nel tempo otteniamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{q_m v (x' - x - vt)}{4\pi \varepsilon_0 \left[(x' - x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y'^2 + z'^2) \right]^{3/2}}$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

- Eseguendo alcuni passaggi al denominatore ($(x'-x-vt)^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$; $(y'^2 + z'^2)/r'^2 = \text{sen}^2\Theta$), tenendo conto del fatto che l'unica componente D a contribuire nell'integrale è $D_x = qx'/4\pi\xi_0 R^3$ ed esprimendo l'integrando in R e θ si ottiene:

$$-\frac{\cos\theta}{(x+vt)\left[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta\right]^{1/2}}$$

Calcolo del momento elettromagnetico di interazione

Dato che il numeratore è dipendente solo da cosθ (dispari), l'integrale (dato che su di un intervallo pari) va a *0*

$$G = \cancel{-\frac{1}{c^2}\int D\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}V} + qA$$

Quindi:

$$G = qA$$

Risoluzione del paradosso

Tenendo conto che il potenziale vettore generato da q_2 nel punto in cui si trova q_1 ($x = 0$) vale

$$A = \frac{q_2 u_2}{4\pi \varepsilon_0 c^2 (x + u_2 t)}\, i$$

per il momento elettromagnetico di interazione otteniamo

$$G = \frac{q_1 q_2 u_2}{4\pi \varepsilon_0 c^2 (x + u_2 t)}\, i$$

Risoluzione del paradosso

- Differenziando G rispetto al tempo (tenendo conto che $t_{osservaz}=0$) otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 x^2}\, i$$

- Possiamo notare che questo valore è uguale e opposto al valore della somma delle forze F_{12} e F_{21}

Risoluzione del paradosso

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2 x^2}\ \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} = -\frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2 x^2}\ \boldsymbol{i}$$

Paradosso risolto

Come ci aspettiamo, l'equilibrio tra le cariche rimane anche in questo sistema di riferimento: la forza non bilanciata residua è necessaria per bilanciare la variazione del momento legato al campo elettromagnetico