Onde,radiazioni e relatività.
Anno 2008/2009

Presentazione articolo:
Lorentz transformations with arbitrary line of motion
Chandru Iyer and G M Prabhu

Fare clic per modificare lo stile del sottotitolo dello schema

Aurora La Rosa

Nella maggior parte dei trattati sulla relatività ristretta, la traiettoria è allineata con l'asse delle ascisse. Questa è una scelta naturale, perché in una situazione del genere le coordinate(y, z) sono invarianti sotto le trasformazioni di Lorentz (y’ = y, z’ = z). Tuttavia, è interessante studiare il caso quando la traiettoria non coincide con nessuno degli assi cartesiani come ad esempio un aereo che decolla (o che attera) sale (o scende) con una certa inclinazione rispetto al suolo.

I postulati di Einstein hanno conseguenze importanti per la misurazione degli intervalli di tempo e di spazio. Il problema da risolvere e' trovare la relazione generale fra le coordinate spazio-temporali (x, y, z, t). Consideriamo il caso di due sistemi di riferimento inerziali in moto uno rispetto all'altro con velocità v lungo l'asse x.

Galileo

$$x' = x - vt$$
$$x = x' + vt$$

Lorentz

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$x = \gamma\,(x' + vt')$$

Dove γ e' una costante che può dipendere da v e c ma non dalle coordinate. Inoltre deve diventare uguale ad 1 quando v/c tende a 0. Per vedere se queste equazioni si possono rendere compatibili con la relatività, imponiamo che c sia la stessa in S e S'. Supponiamo che un lampo di luce venga emesso in x= 0 a t= 0.
Assumiamo che le origini dei sistemi di riferimento coincidano a questo istante, quindi il lampo di luce e' emesso a x'=0 e t' =0.

Chiamiamo E1 questo evento. Dopo un certo tempo un osservatore in x osserva il lampo di luce, evento E2. Quando si produce E2? x = ct. In S’ deve essere x’ = ct’. Sostituendo nelle due equazioni si ha:

$ct' = \gamma\ (ct - vt) = \gamma t(c - v)$

$ct = \gamma\ (ct' + vt') = \gamma t'(c + v)$

Moltiplicando fra loro i primi membri di queste equazioni e poi gli ultimi si ha:

$c2tt' = \gamma 2tt'(c - v)(c + v)$

$c2 = \gamma\ 2\ (c2 - v2\ )$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$\beta = v / c =$ *parametro di velocita'*

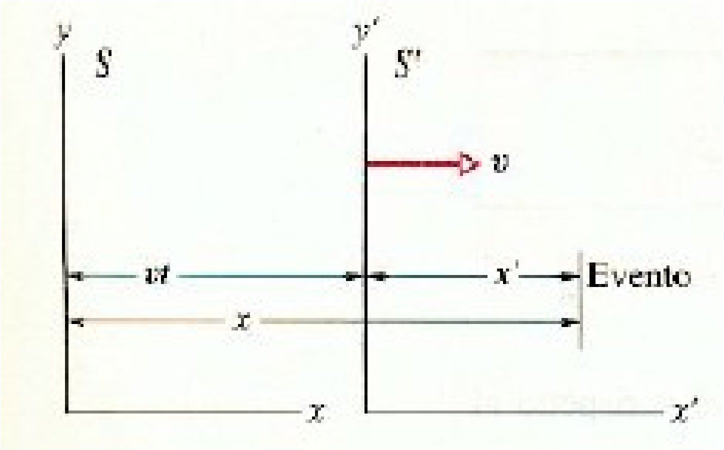
$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =$ *fattore di Lorentz*

Risolvendo le due equazioni precedenti rispetto a t e t’ si ha:

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma\left[\gamma(x' + vt') - vt\right] = \ldots\ldots \longrightarrow$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$



Le equazioni di trasformazione di Lorenz dicono che spazio e tempo sono connessi. Il tempo non e' assoluto ma dipende dalla posizione e dalla velocita'. Spazio e tempo vanno considerati insieme, esiste lo spazio-tempo.

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \quad \longleftrightarrow \quad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Il problema è come trovare le T.d.L per dei sistemi di riferimento che si muovono secondo traiettorie inclinate tra loro. Questo si può risolvere sviluppando una matrice trasformazione che permette facilmente di ottenere le coordinate spaziali e temporali.

SVILUPPO DELLE T.d.L. IN 2D

Nel modello bidimensionale,che è il più semplice algebricamente,il moto avviene nel piano x-y lasciando z non modificata dalle TdL. La matrice di trasformazione per una rotazione sul piano x,y in senso antiorario di un angolo θ è data da:

$$R\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Quindi: x'= xcosθ +ysenθ y'= -xsenθ +ycosθ

Se aggiungiamo la coordinata temporale t la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi se applichiamo la matrice rotazione Rθ alle coordinate x,y,t abbiamo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}.$$

Con t' = t poiché la rotazione spaziale lascia invariata la coordinata temporale.

La matrice di trasformazione di Lorentz per due sistemi di riferimento che sono in moto tra loro reciprocamente, alla velocità v, lungo l'asse x può essere scritta come:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma/c^2 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix},$$

La riga di mezzo della matrice, (0, 1, 0), indica y' = y perché la trasformazione riguarda solo l'asse x, e i due zeri nella colonna centrale della matrice indicano che non vi è alcun effetto incrociato delle coordinate spaziali sul tempo.
Noi utilizziamo il simbolo LXV per indicare una trasformazione di Lorentz di grandezza v lungo l'asse delle ascisse.

Quando il moto è inclinato di un angolo θ con l'asse x, possiamo usare la trasformazione R(-θ)LxvRθ applicata tra due vettori K e K', che osservati si muovono ad una velocità di +v e -v rispettivamente. In ogni sistema di riferimento l'altro è visto in movimento con un'inclinazione rispetto all'asse x o x' dello stesso angolo θ.

Ricordando che cos (-θ) = cos θ e sin (-θ) =-sin θ, si ottiene la matrice A per R(-θ) LXV Rθ:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma\cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta.\cos\theta(\gamma - 1) & -v\gamma\cos\theta \\ \sin\theta\cdot\cos\theta(\gamma - 1) & \gamma\sin^2\theta + \cos^2\theta & -v\gamma\sin\theta \\ \frac{-v\gamma\cos\theta}{c^2} & \frac{-v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

La matrice A trasforma le coordinate (x,y,t) del vettore K nelle coordinate (x',y',t') del vettore K'.

L'inverso della matrice A, cioè quella in cui il sistema di riferimento K' visto da K si muove con velocità –v, la indichiamo con B:

$$B = \begin{pmatrix} \gamma\cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta\cdot\cos\theta(\gamma-1) & v\gamma\cos\theta \\ \sin\theta\cdot\cos\theta(\gamma-1) & \gamma\sin^2\theta + \cos^2\theta & v\gamma\sin\theta \\ \frac{v\gamma\cos\theta}{c^2} & \frac{v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

La matrice B trasforma le coordinate (x',y',t') del vettore K' nelle coordinate (x,y,t) del vettore K.

Utilizzando identità trigonometriche standard, si può verificare che AB = BA = I, la matrice identità.

Quindi se noi designiamo il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$ da K e il vettore $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix}$ da K'

abbiamo K'=AK e K=BK'

Per visualizzare l'asse x’ visto nel sistema di riferimento di K poniamo y’= 0 e t = 0 (questo è l’istante in K in cui tutti i punti hanno y’ = 0). Per questa condizione otteniamo da K’ = AK la seguente equazione:

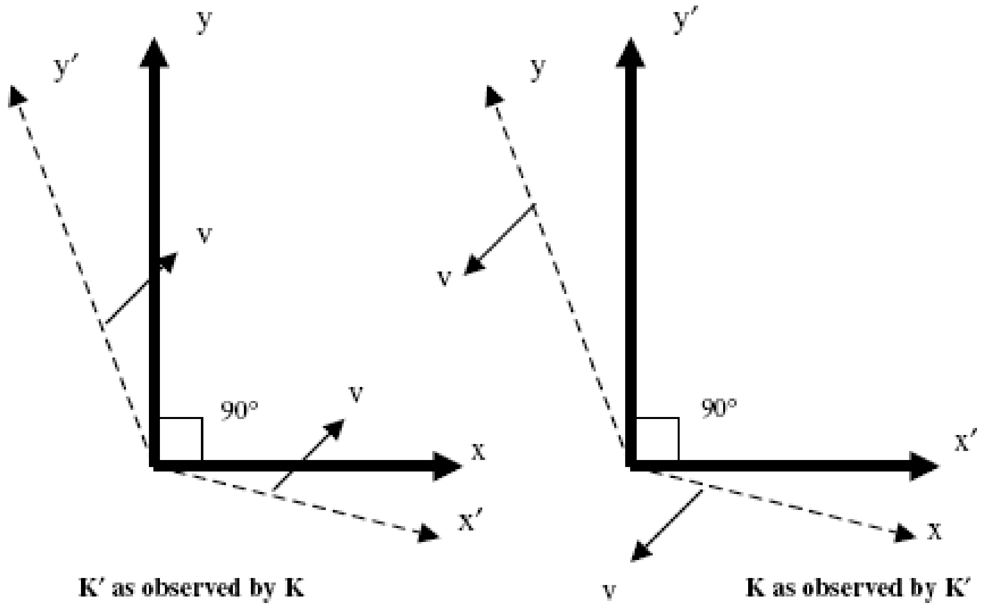
a21*x+a22*y = 0

La pendenza di quest

$$\frac{-a_{21}}{a_{22}} := \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot (\gamma - 1)}{\gamma \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}$$

Come si può notare questa linea ha una pendenza negativa e non è allineata con l'asse delle ascisse; questo come conseguenza del fatto che l'angolo d’inclinazione rispetto all'asse x è lo stesso visto da K e da K’. Inoltre possiamo dedurre (dal fatto che questa pendenza non dipende il segno di V) che la pendenza dell’ asse x’ osservato dal sistema di riferimento di K è uguale alla pendenza dell’ asse x osservato dal sistema di riferimento di K’.
Allo stesso modo la pendenza degli assi y’ e y osservati da K e K’ sono anche negativi.

I due sistemi appaiono non ortogonali uno rispetto all'altro.



Il primo caso in cui viene applicata la matrice di trasformazione trovata è per un oggetto in movimento rispetto ad un'asta in quiete. Consideriamo un bastone di lunghezza L in quiete e un oggetto in movimento alla velocità v e ad un angolo θ con l'asse dell'asta . Qual è la lunghezza apparente dell'asta per un osservatore che si muove con il sistema di riferimento dell'oggetto nell' istante t' = 0?

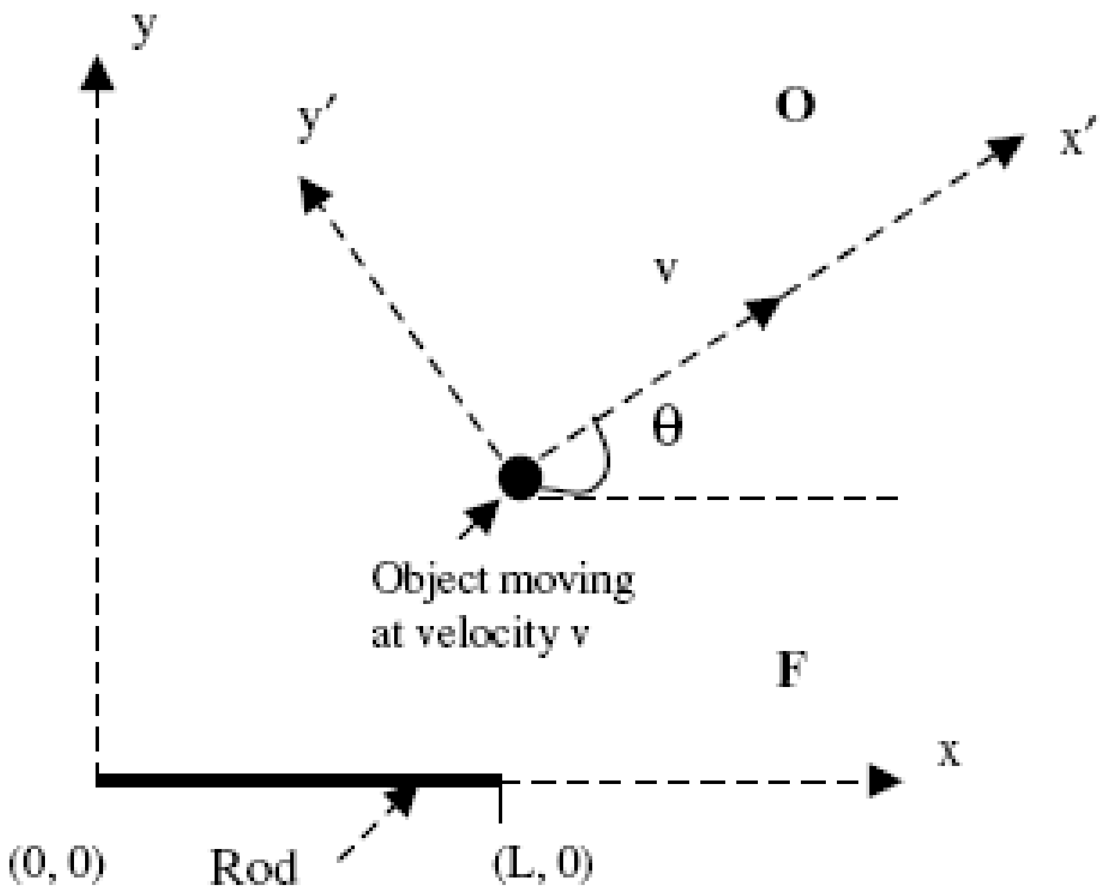
Definiamo due sistemi di riferimento :

F in cui l'asse x è allineato lungo l'asse del bastone. Una punta dell'asta ha coordinate x = 0; y = 0. L'altra estremità dell'asta ha coordinate x = L; y = 0.

Il moto dell'oggetto avviene lungo una direzione inclinata di un angolo θ rispetto all'asse del bastone (asse x).

Per ogni istante t le coordinate spazio-temporali del bastone sono (0,0,t) e (0,L,t).

O in cui l'asse x del sistema è allineato con la direzione del moto dell'oggetto.


y
y′
O
x′
v
θ
Object moving
at velocity v
F
x
(0, 0)
Rod
(L, 0)

Al fine di trasformare F a O si usa la trasformazione [LxvRθ] ottenendo:

$$T = L_{xv} R_\theta = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma/c^2 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\cos\theta & \gamma\sin\theta & -v\gamma \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \frac{-v\gamma\cos\theta}{c^2} & \frac{-v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

Applicando la matrice T possiamo trasformare le coordinate degli eventi da F ad O.
In t = 0 le coordinate di un estremo del bastone passano da (0,0,0) in F a (0,0,0) in O.
Per conoscere le coordinate dell'altro estremo in O nell'istante t'=0 usiamo la matrice T:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Ottenendo:

$$x' = L\gamma\cos\theta - v\gamma t$$

$$y' = -L\sin\theta$$

$$0 = -(Lv\gamma\cos\theta)/c^2 + \gamma t.$$

Risolvere la terza equazione per t e sostituire il suo valore nella prima equazione dà $x' = L \cos\theta / \gamma$.

All' istante $t' = 0$ in O, una punta dell'asta ha coordinate $x' = 0$; $y' = 0$, e l'altra estremità ha coordinate $x' = L\cos\theta/\gamma$ e $y' = -L\sin\theta$.

Pertanto la lunghezza apparente dell'asta osservata da O è

L'= L*((cos2θ/γ2)+sen2θ)

Questa quantità è uguale:

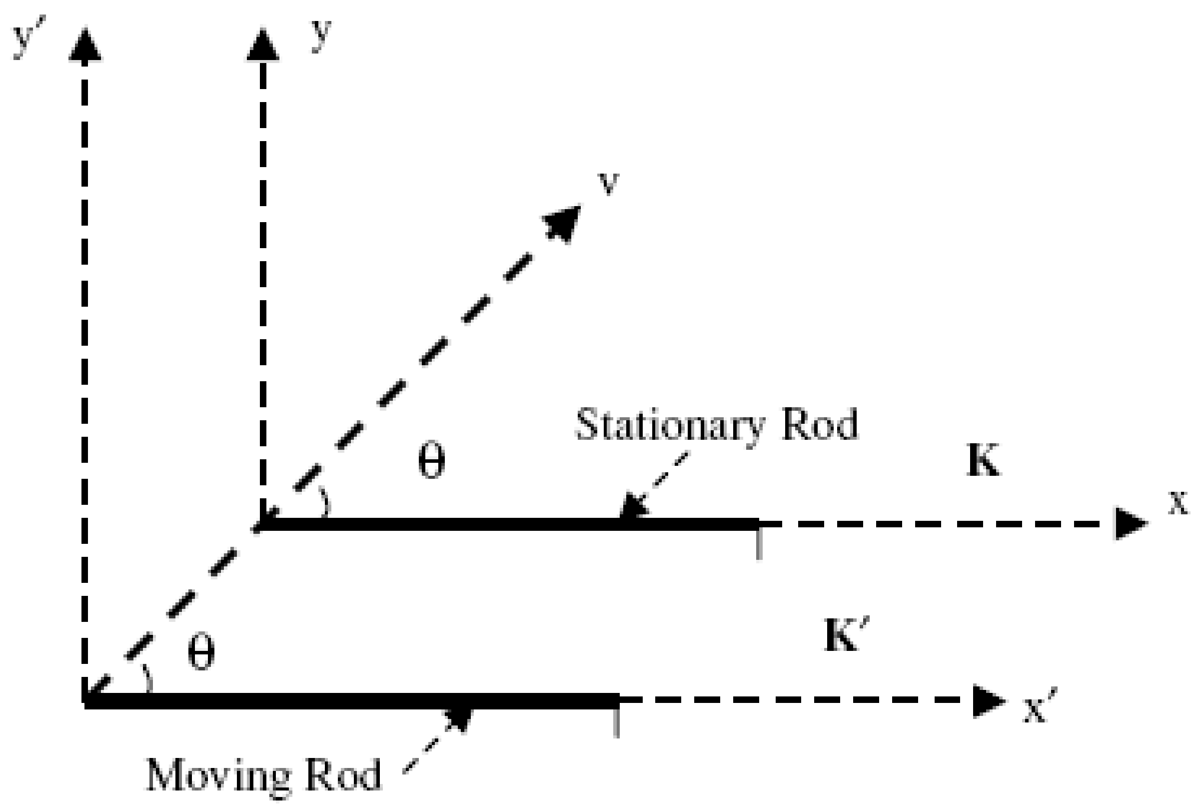
Per $\gamma=1$ L'= L (nessuna moto relativo),

Per $\theta = 0$ L'=L /γ (moto allineato sull'asse x)

Per $\theta = 90$ L'= L (nessuna variazione di lunghezza perpendicolare alla linea del moto).

Tutti questi risultati sono coerenti con i concetti noti di contrazione di Lorentz.

Nel secondo caso di applicazione si attenziona il problema della collisione di due aste che si muovono seguendo una traiettoria inclinata.



Consideriamo due aste di pari lunghezza L paralleli tra loro in moto inclinato di un angolo θ rispetto all'asse delle ascisse. Di queste vogliamo conoscere il tempo di collisione nei due sistemi di riferimento.
Gli assi x e x' vengono fatti coincidere con gli assi delle due aste.
Le matrici A e B danno le trasformazioni diretta ed inversa tra i due vettori K e K'.
Le coordinate di collisione del fondo dell'asta sono considerate come l'origine dello spaziotempo in entrambi i sistemi di riferimento K e K'. La collisione in alto ha coordinate (L,0,t) nel s.d.r. K e (L,0,t') nel sistema di riferimento K'.
Utilizzando una matrice A per trasformare (L, 0, t) ed uguagliando il risultato a (L, 0, t') si ottengono le seguenti equazioni.

$$\begin{pmatrix} L' \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L' \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta.\cos\theta(\gamma - 1) & -v\gamma\cos\theta \\ \sin\theta\cdot\cos\theta(\gamma - 1) & \gamma\sin^2\theta + \cos^2\theta & -v\gamma\sin\theta \\ \frac{-v\gamma\cos\theta}{c^2} & \frac{-v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L(\gamma\cos^2\theta + sen^2\theta) & 0 & -tv\gamma cos\theta \\ Lsen\theta cos\theta(\gamma - 1) & 0 & -tv\gamma sen\theta \\ -\frac{Lv\gamma cos\theta}{c^2} & 0 & t\gamma \end{pmatrix}$$

$$(\gamma \cos^2\theta + \sin^2\theta)L - (v\gamma \cos\theta)t = L$$

$$L \sin\theta \cos\theta(\gamma - 1) - (v\gamma \sin\theta)t = 0$$

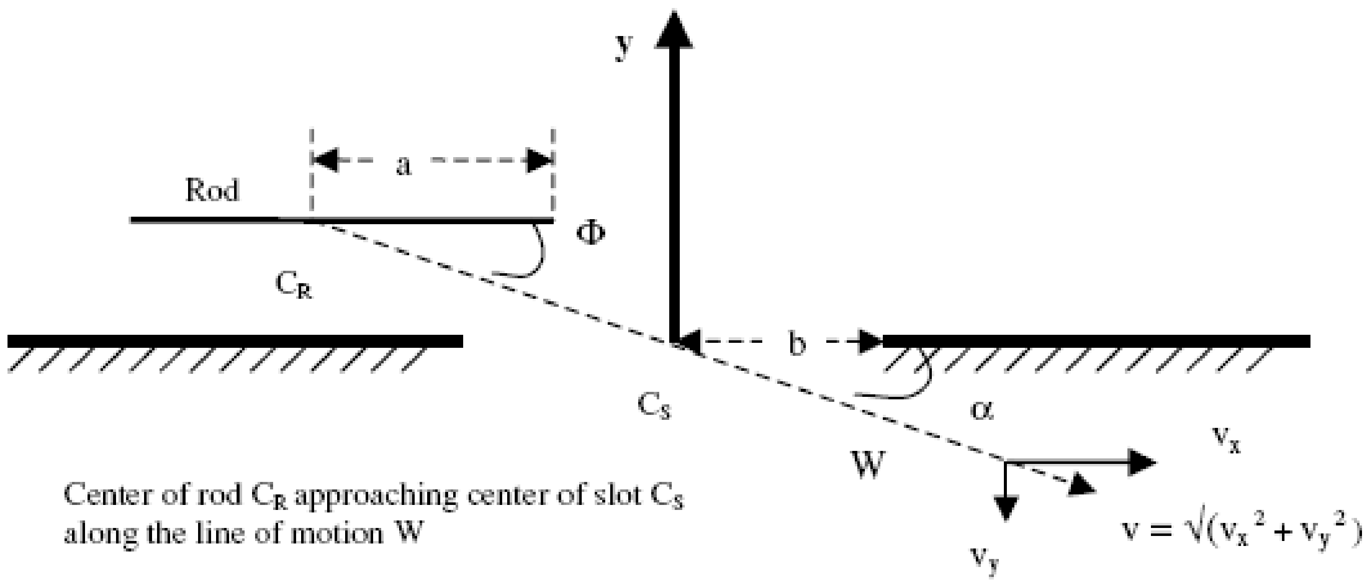
$$-(v\gamma/c^2)L \cos\theta + \gamma t = t'.$$

Dalle prime due si ricava:
$t = (L/v)\cos\theta[1 - (1 / \gamma)]$
La ridondanza dipende dall'aver assunto per ipotesi che le due estremità della prima asta collidano esattamente con le due estremità della seconda.
Sostituendo il risultato trovato nella terza equazione si ricava :
$t' = (L/v)\cos\theta[(1 / \gamma) - 1]$
Questo risultato è conferma della reversibilità della collisione tra la parte superiore e la parte inferiore delle due aste nei due istanti iniziali per due sistemi di riferimento in moto solidale con le aste. Anche in questo caso si trova un risultato consistente con le proprietà delle T.d.L.

Il terzo caso prende in considerazione il problema della collisione di un’asta con una buca.

Vogliamo sapere se un’asta in movimento lungo una direzione non allineata con nessuno dei due assi del sistema di riferimento collidendo con una buca riesca a passargli attraverso.
In questo scenario l'asta si muove in due direzioni, ma solo con costante velocità. Inoltre la linea di moto relativo (che congiunge il centro dell’asta con la buca) non è allineata con nessuno degli assi né dell’asta né della buca, non c'è la gravità, e quindi non c’è stress o la propagazione di stress.
Assumiamo Φ l’angolo tra l’asse dell’asta e la linea di moto e α l’angolo tra l’asse della buca e la linea di moto.

Il sistema di riferimento del bastone ha l'asse x coincidente con l'asse del bastone e l'origine al centro del bastone.
Il sistema di riferimento della buca ha l'asse x coincidente con l'asse della buca e l'origine al centro della buca.
L'incontro tra i due centri avviene in (x,y,t) = (x',y',t') =(0,0,0).



Center of rod C_R approaching center of slot C_S along the line of motion W

Per passare dal sistema di riferimento del bastone a quello della buca occorre eseguire una serie di trasformazioni :
R(-Φ) per allineare la linea di moto con l'asse x nel sistema di riferimento dell'asta.
L x(-v) per passare al sistema di riferimento della buca.
R(α) per allineare l'asse x con l'asse della buca nel suo s.d.r.

La matrice risultante D = R(α) L x(-v) R(-Φ) ha la seguente forma :

$$D = \begin{pmatrix} \gamma\cos\phi\cos\alpha + \sin\alpha\sin\phi & -\gamma\sin\phi\cos\alpha + \sin\alpha\cos\phi & v\gamma\cos\alpha \\ -\gamma\cos\phi\sin\alpha + \cos\alpha\sin\phi & \gamma\sin\phi\sin\alpha + \cos\phi\cos\alpha & -v\gamma\sin\alpha \\ \frac{v\gamma\cos\phi}{c^2} & \frac{-v\gamma\sin\phi}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

Se chiamiamo **a** metà della lunghezza dell'asta e **b** metà della lunghezza della buca il fronte del bastone ha coordinate (a,0,t) per ogni istante nel proprio sistema di riferimento . Allo stesso modo il fronte della buca ha coordinate (b,0,t') per ogni istante t' nel proprio sistema di riferimento.

Affinché l'asta passi attraverso la buca deve valere la trasformazione :

$$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Questo conduce alle seguenti equazioni :

$$a\,\gamma \cos\Phi \cos\alpha + a \sin\alpha \sin\Phi + vt\gamma \cos\alpha = b$$

$$-a\gamma \cos\Phi \sin\alpha + acos\alpha \sin\Phi - vt\gamma \sin\alpha = 0$$

$$(av\gamma/c^2)\cos\Phi + \gamma t = t'.$$

Dalla seconda equazione:

$$t = (a\cos\alpha \sin\Phi - a\gamma \cos\Phi \sin\alpha)/(v\gamma \sin\alpha)$$

E sostituendo t nella prima :

$$a\gamma \cos\Phi \cos\alpha + a \sin\alpha \sin\Phi + (a\cos\alpha \sin\Phi - a\gamma \cos\Phi \sin\alpha)\cos\alpha/\sin\alpha = b.$$

Moltiplicando entrambi i membri per senα e semplificando otteniamo:

$$a \sin \Phi (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = b \sin \alpha$$

$$a \sin \Phi = b \sin \alpha.$$

Troviamo dipendenza solo da quattro quantità proprie del problema :
le lunghezze dell’asta e della buca, gli angoli di inclinazione dell’asta e della buca rispetto all’asse x.
Quindi se :

$$a \sin \Phi < b \sin \alpha,$$

allora l’asta passa attraverso la buca.

Da quanto detto finora possiamo dedurre che, se la linea di moto passante per il centro dell'asta non interseca nel centro la buca, ma la divide in due parti di lunghezza b1 e b2, allora la condizione per l'asta di passare attraverso la buca è:

$$(a \sin \Phi < b_1 \sin \alpha) \text{ AND } (a \sin \Phi < b_2 \sin \alpha)$$

e

$$(a \sin \Phi < b_1 \sin \alpha) \text{ AND } (a \sin \Phi < b_2 \sin \alpha)$$

Possiamo estendere il modello al caso tridimensionale che è algebricamente più complesso.
Per fare questo dobbiamo quindi introdurre una nuova rotazione Φ nel piano x-z:

$$\begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R(\phi)$$

La matrice che permette la trasformazione dalle coordinate (x,y,z,t) a (x’,y’,z’,t’) è

$$R(\theta)*R(\phi)*L(xv)*R(-\phi)*R(-\theta)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & sen\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} R(-\phi)R(-\theta)$$