Emanuele Francesco Marano

Corso di laurea in Scienza dei Materiali

A.A. 2008-2009

Esame di Onde, Radiazione, Relatività

Professore: Ezio Menichetti

Emanuele Marano

Geodetiche senza l’utilizzo delle equazioni differenziali

Calcoli di relatività generale per introdurre la fisica moderna alle classi di studenti ai primi anni dell’università

D R Rowland - European Journal of Physics **27** (2006) 57-70, online at stacks.iop.org/EJP/27/57

Qualche concetto di Relatività Generale

- Una delle principali novità della relatività generale rispetto alla fisica classica consiste nel nuovo approccio di Einstein, che vede i corpi massivi *non come generatori di forza gravitazionale*, ma come fonte di distorsione del reticolo spaziotemporale.

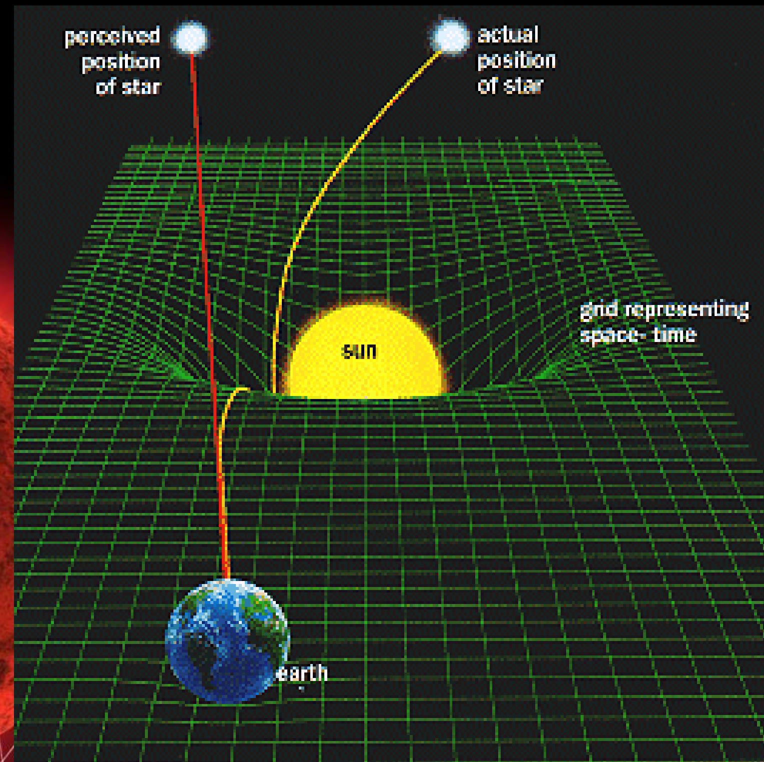
Qualche concetto di Relatività Generale

- Einstein descrive quindi il moto di un corpo sottoposto ad una forza gravitazionale come un *moto in uno spazio curvo in cui non sia presente tale interazione*[1].

- L'effetto dei corpi massivi è unicamente quello di curvare lo spazio-tempo.

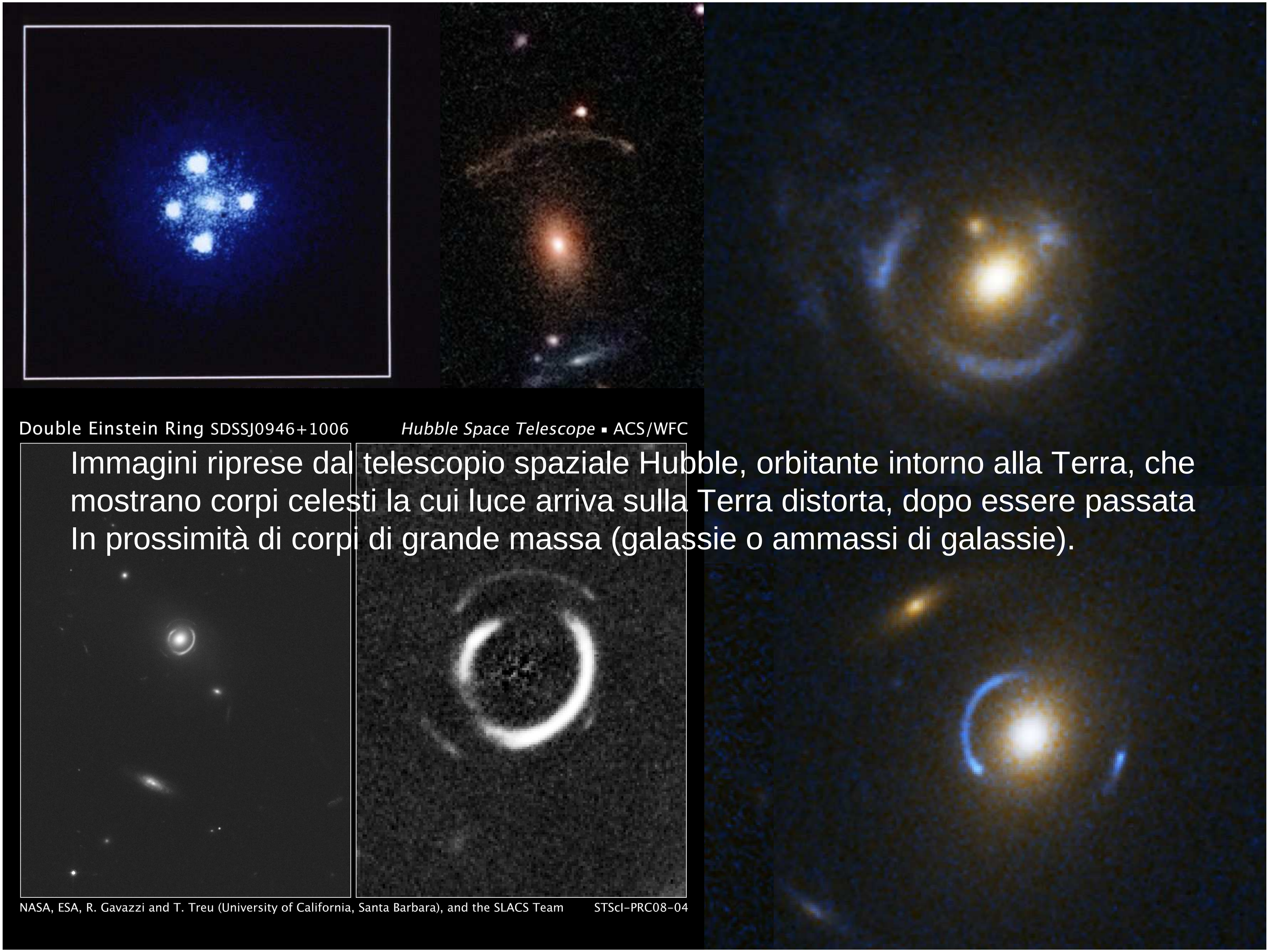
[1] Marco Potenza, L'universo di Einstein, HOEPLI, pag.60

Qualche concetto di Relatività Generale



Secondo la meccanica newtoniana (1°principio della dinamica), un corpo sul quale la risultante delle forze è nulla, si muove di moto rettilineo uniforme.

Nello spazio tempo quadridimensionale un corpo sul quale non agiscono forze si muoverà secondo una traiettoria geodetica, cioè lungo le linee più brevi che collegano 2 punti fra loro.
Ma se lo spazio-tempo è curvo (cioè è presente una massa che lo deforma), lo saranno anche le geodetiche e quindi il corpo seguirà una traiettoria (che più avanti chiameremo linea di universo) non più rettilinea.
Un esempio può esser dato dalla luce proveniente da stelle lontane. Se nel percorso per giungere fino alla Terra, la luce passa vicino a corpi di grande massa, sarà curvata dalla distorsione spaziotemporale presente in prossimità della massa e noi vedremo la luce della stella provenire da una direzione diversa da quella vera.



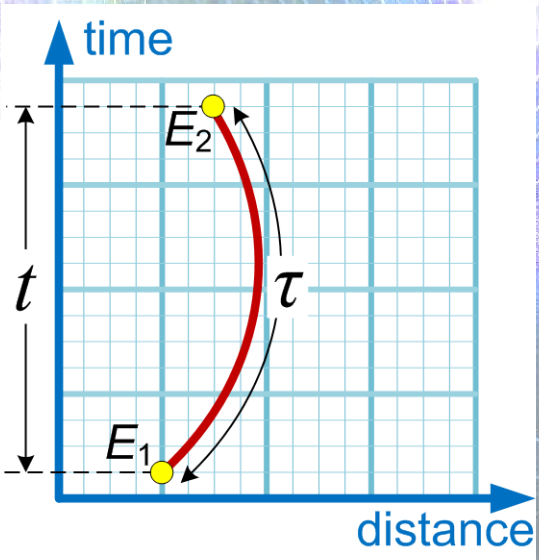
Immagini riprese dal telescopio spaziale Hubble, orbitante intorno alla Terra, che mostrano corpi celesti la cui luce arriva sulla Terra distorta, dopo essere passata In prossimità di corpi di grande massa (galassie o ammassi di galassie).


Emanuele Marano

Alcune definizioni

- Tempo proprio τ

  È il tempo misurato da un orologio fra 2 eventi che accadono nello stesso luogo in cui l'orologio si trova (quindi con velocità relativa rispetto agli eventi pari a 0 e stesso campo gravitazionale (o distorsione spaziotemporale) agente).

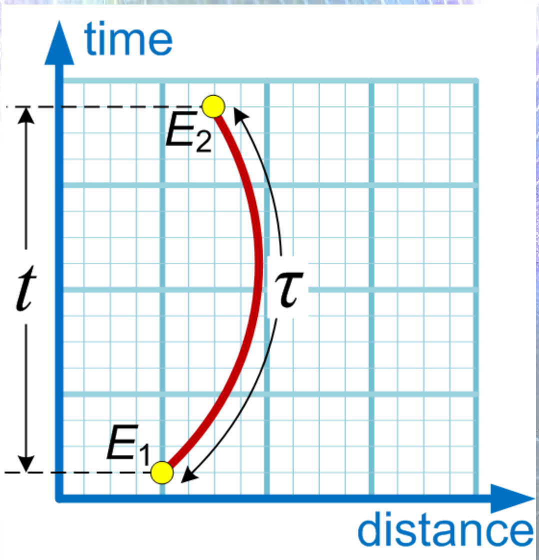


Alcune definizioni

- Tempo di riferimento t

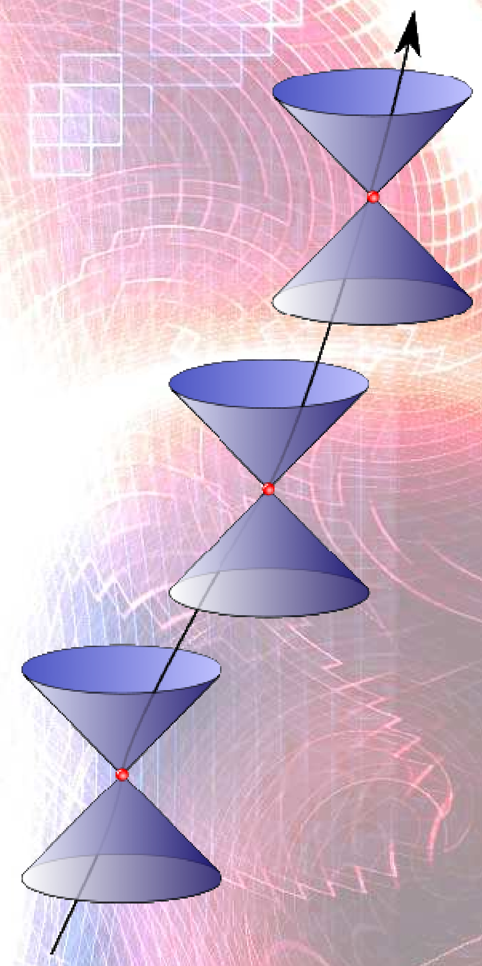
  È la coordinata temporale di un evento misurato rispetto al sistema di riferimento di un osservatore esterno.

  Nel caso particolare della relatività ristretta e di un sistema di riferimento stazionario rispetto ad un dato evento, il tempo di riferimento coincide con il tempo proprio.



Alcune definizioni

- Linea di universo (world line)



È un concetto introdotto per la prima volta da Minkowski.

Consiste in una generalizzazione del concetto di traiettoria in 4 dimensioni, di cui una è rappresentata dal tempo.

È quindi, più semplicemente, il percorso di un oggetto che si muove in un universo quadridimensionale, con 3 dimensioni spaziali ed 1 temporale.

Alcune definizioni

Geodetica

- Generalmente il concetto di geodetica è limitato alla “più breve lunghezza euclidea su una superficie curva di 2 dimensioni spaziali”.
- In relatività generale la geodetica è la generalizzazione in uno spazio-tempo curvo della retta in uno spazio-tempo piatto, è per cui la linea oraria di un corpo non soggetto a forze.

Alcune definizioni

Geodetica

- In relatività generale il concetto di geodetica è esteso alla “curva che massimizza il tempo proprio tra 2 eventi”, grazie al principio della geodetica (principle of extremal aging, Taylor & Wheeler):

“Il percorso che una particella libera segue fra 2 eventi nello spaziotempo è quello per il quale l’intervallo di tempo fra i 2 eventi, misurato dall’orologio della particella (tempo proprio), è massimo”.

- Questo si può capire intuitivamente pensando al paradosso dei gemelli della relatività speciale: il gemello che non subisce accelerazione è quello che invecchia di più.

Di cosa ci occupiamo in questa presentazione?

- Spesso una delle cose che rimangono in mente parlando di relatività generale è lo schema (sullo sfondo della slide) dello spazio-tempo deformato da un corpo celeste come una “palla su un foglio di gomma”. Questo però non dà un idea di come gli effetti gravitazionali hanno a che fare nella nostra vita di tutti i giorni.

Di cosa ci occupiamo in questa presentazione?

- Per questo è necessario un metodo con il quale l’idea di geodetica nello spazio-tempo possa essere facilmente introdotta con una matematica relativamente semplice, adatta a studenti dei primi anni.

Di cosa ci occupiamo in questa presentazione?

In genere, per calcolare le geodetiche, anche quelle più semplici, che descrivono ad esempio la caduta di un grave su una superficie terrestre, sono necessari calcoli molto complessi e conoscenze matematiche di un livello elevato (calcolo delle variazioni).

Di cosa ci occupiamo in questa presentazione?

- Qui cercheremo di ricavare le linee geodetiche per alcuni casi particolari facendo uso di una matematica semplice, adatta a studenti dei primi di anni di università e ad uno strumento visivo chiamato diagramma di Epstein, che verrà illustrato in seguito.

Casi considerati

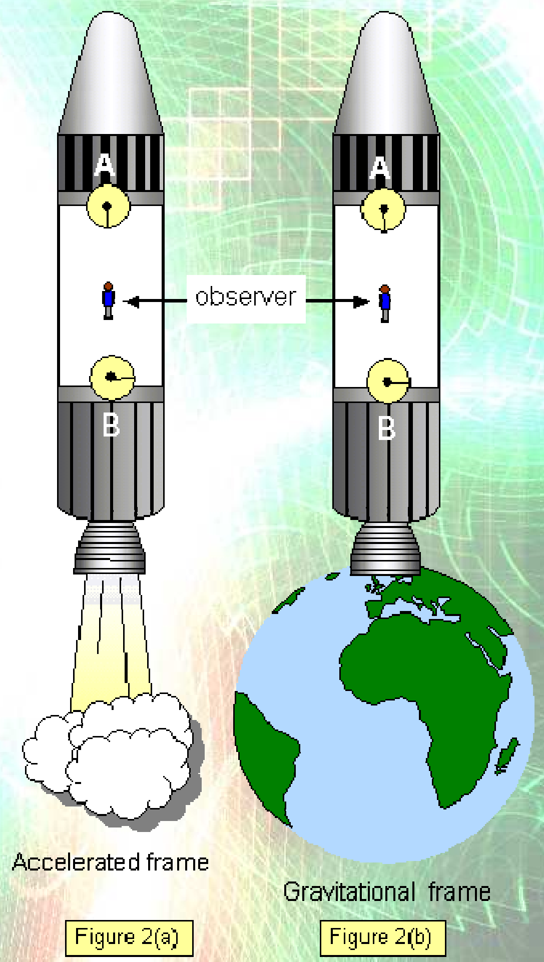
- I casi a cui ci riferiremo saranno solo quelli con particelle che cadono verticalmente in un *campo gravitazionale statico ed uniforme.*

Il più semplice diagramma di Epstein:
Caso di un campo uniforme

- Consideriamo una particella lasciata libera per la quale l'accelerazione iniziale è quella del campo gravitazionale in cui è immersa ed è costante dappertutto.
- Questa è una buona approssimazione per piccole estensioni spaziali, e può spiegare bene perché una palla cade al suolo quando è rilasciata da una certa altezza.

Premessa: l'"esperimento ideale" degli orologi su 2 razzi.

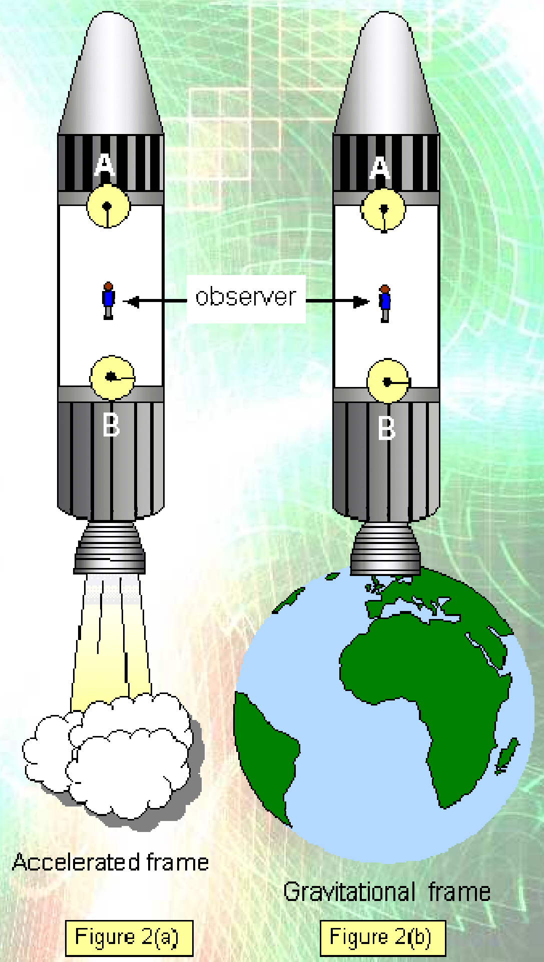
- 2 orologi A e B sono messi dentro un razzo ad altezze diverse ed emettono impulsi di luce ad intervalli regolari, che saranno visti da un osservatore posto esattamente in mezzo ai 2 orologi[2].



[2] http://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Relativity/text/General_relativity/index.html

Premessa: l'"esperimento ideale" degli orologi su 2 razzi.

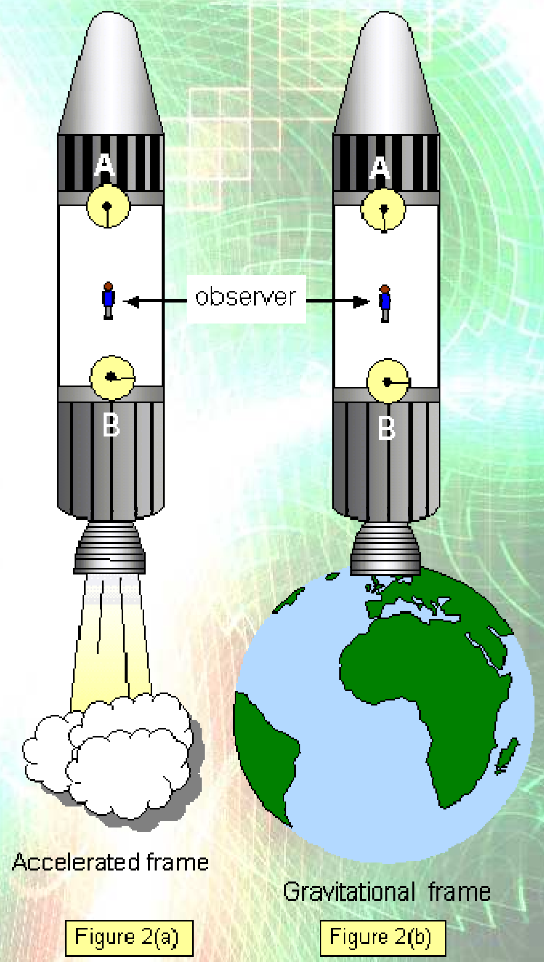
- Se il razzo inizia ad accelerare (Fig2a), l'osservatore vedrà arrivare l'impulso proveniente dall'orologio A prima dell'impulso proveniente dall'orologio B. Questo perché l'osservatore "sta andando incontro" all'impulso luminoso proveniente da A.



[2] http://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Relativity/text/General_relativity/index.html

Premessa: l'"esperimento ideale" degli orologi su 2 razzi.

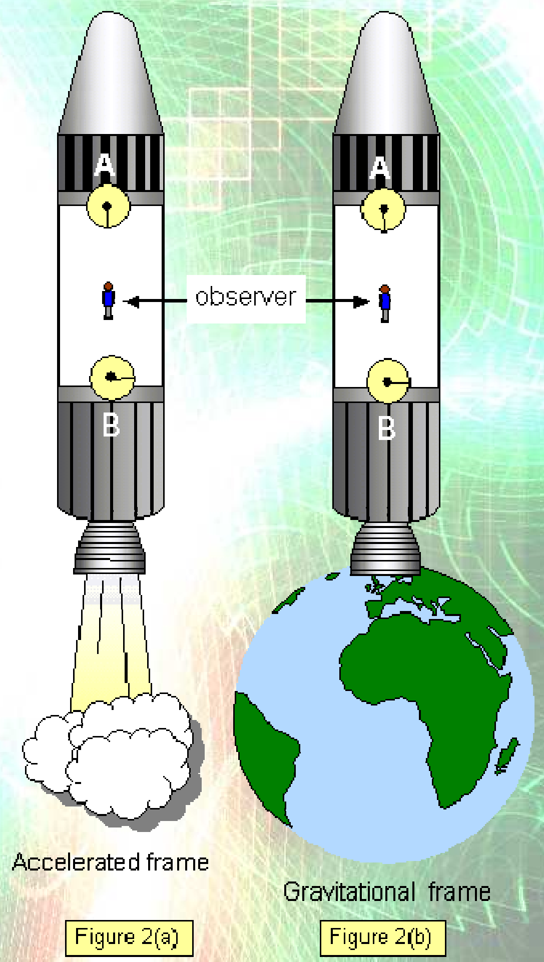
- Quindi in 2 orologi situati a differente altezza in un sistema accelerato, il tempo scorre in maniera diversa.
- Per il principio di equivalenza di Einstein è però impossibile distinguere un sistema accelerato da uno immerso in un campo gravitazionale uniforme.



[2] http://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Relativity/text/General_relativity/index.html

Premessa: l'"esperimento ideale" degli orologi su 2 razzi.

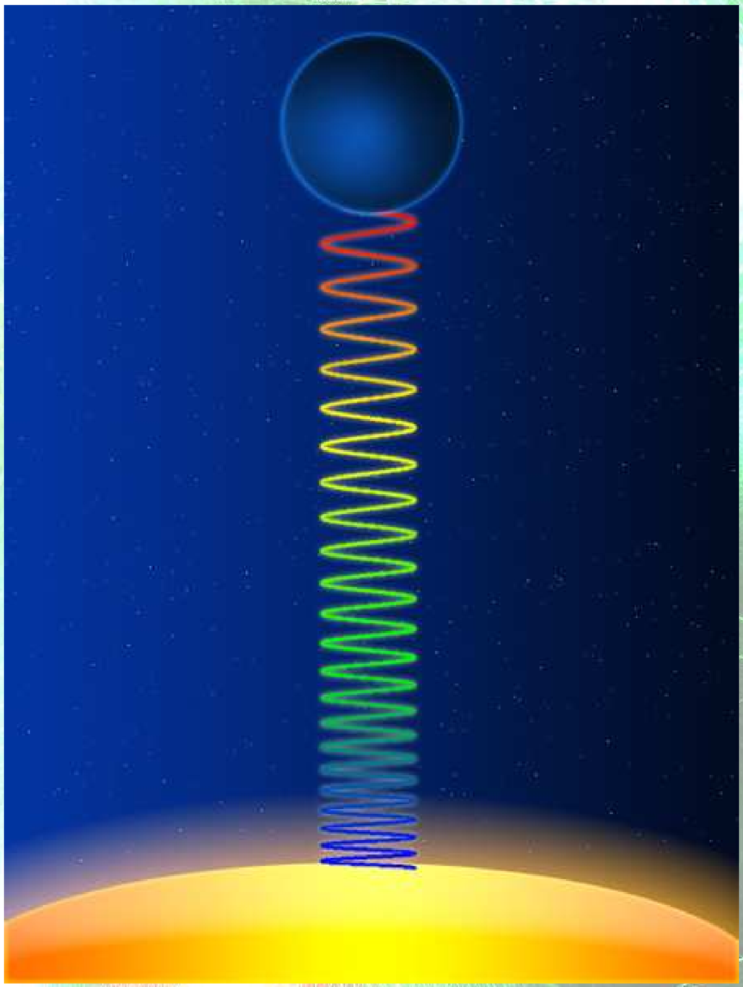
- Lo stesso effetto si avrà quindi su uno stesso razzo con motori spenti che poggia sulla Terra (Fig 2b) e il rapporto fra i tempi di A e B misurati dall'osservatore sarà $1+\frac{gz}{c^2}$ (risultato proveniente da calcoli di relatività generale), dove *g* rappresenta l'accelerazione del campo gravitazionale, *z* la distanza fra gli orologi e *c* la velocità della luce.



[2] http://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Relativity/text/General_relativity/index.html

Premessa: l'"esperimento ideale" degli orologi su 2 razzi.

- Questo effetto, che cosidereremo in tutto il resto della presentazione, è chiamato *Redshift gravitazionale*, in quanto, considerando una radiazione luminosa emessa da un corpo massivo, a causa della dilatazione temporale, si ha che allontanandosi dalla sorgente il periodo dell'onda aumenta; la frequenza quindi risulterà più bassa via via che ci si allontana dalla sorgente, e se consideriamo frequenze nel visibile, esse risulteranno spostate verso il rosso rispetto alla frequenza vera e propria emessa.



- Ora, pensando ad un sistema, sempre con un campo gravitazionale *g* uniforme, in cui *z* rappresenta la distanza da un'altezza di riferimento, si dimostra che il ritmo dell'orologio più in alto è più veloce di un fattore $\exp\left(\frac{gz}{c^2}\right)$

  rispetto all'orologio più in basso.

  Sviluppando in serie di Taylor per $\left|\frac{gz}{c^2}\right| \ll 1$

  si ottiene proprio $\exp\left(\frac{gz}{c^2}\right) \approx 1 + \frac{gz}{c^2}$

  come in precedenza (sulla superficie terrestre c^2/g è nell'ordine dell'anno luce).

- Riferendoci ora ad un sistema di riferimento in cui il tempo di riferimento t viene misurato a *z=0* ed il tempo proprio τ è quello relativo ad una particella che si trova ad un'altezza *z*, abbiamo che

$$\frac{\Delta t(z)}{\Delta \tau(z)} = \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right) \qquad (1)$$

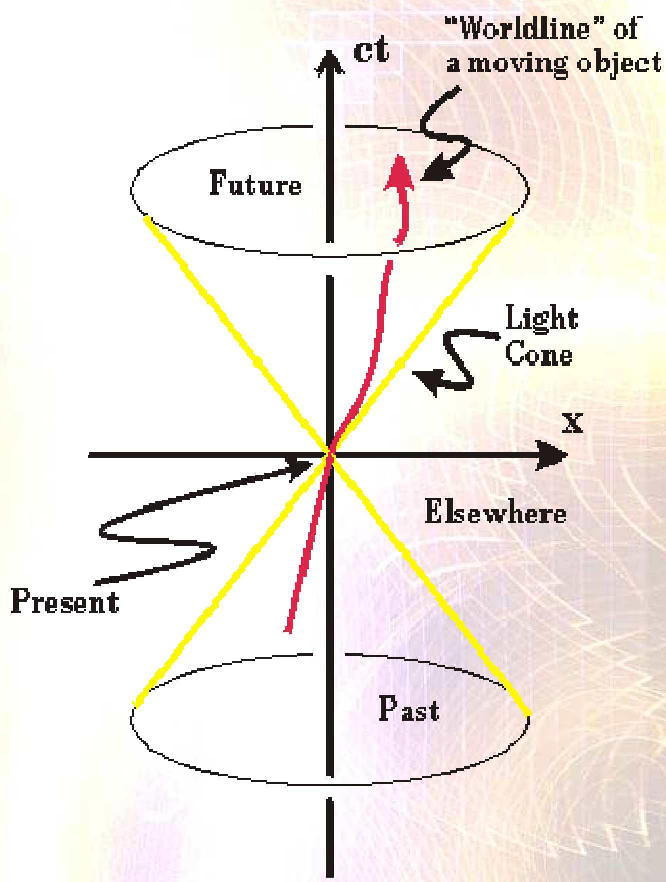
come si può ricavare dalle espressioni precedenti.

Domanda

- Ora ci poniamo la domanda:
- Come può essere ricavata la linea di universo $(ct(\tau),z(\tau))$ di una particella che cade liberamente in un campo gravitazionale uniforme?
- Questa linea, avendo una particella libera, dovrà essere una *geodetica* e quindi dovrà massimizzare il tempo proprio (a cui possiamo riferirci con più semplicità pensando al tempo misurato da un “orologio da polso” portato dalla nostra particella).

Il diagramma di Epstein

- Per ricavare la geodetica usiamo il diagramma di Epstein.
- In un convenzionale grafico spazio-tempo gli eventi sono indicati con *(ct,z)* e le linee di universo sono tracciate in funzione del parametro τ.



Il diagramma di Epstein

- Nel diagramma di Epstein, per riportare *z* in funzione di τ, si usa un set di numeri in modo che la lunghezza euclidea dell'arco della traiettoria risultante(e non della linea di universo) è dato da $c\Delta t$, dove Δt è il tempo di riferimento.
- Questo (che sarà più chiaro avanti) è possibile grazie al fatto che *z,t* e τ non sono indipendenti fra di loro, ma sono collegati da:

$$\frac{\Delta t(z)}{\Delta \tau(z)} = \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right) \qquad (1)$$

Il diagramma di Epstein

- Possiamo ancora pensare questo come un'estensione dell'equazione

$$s^2 = c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta z)^2$$

con s uguale alla lunghezza 4-dimensionale della linea di universo percorsa

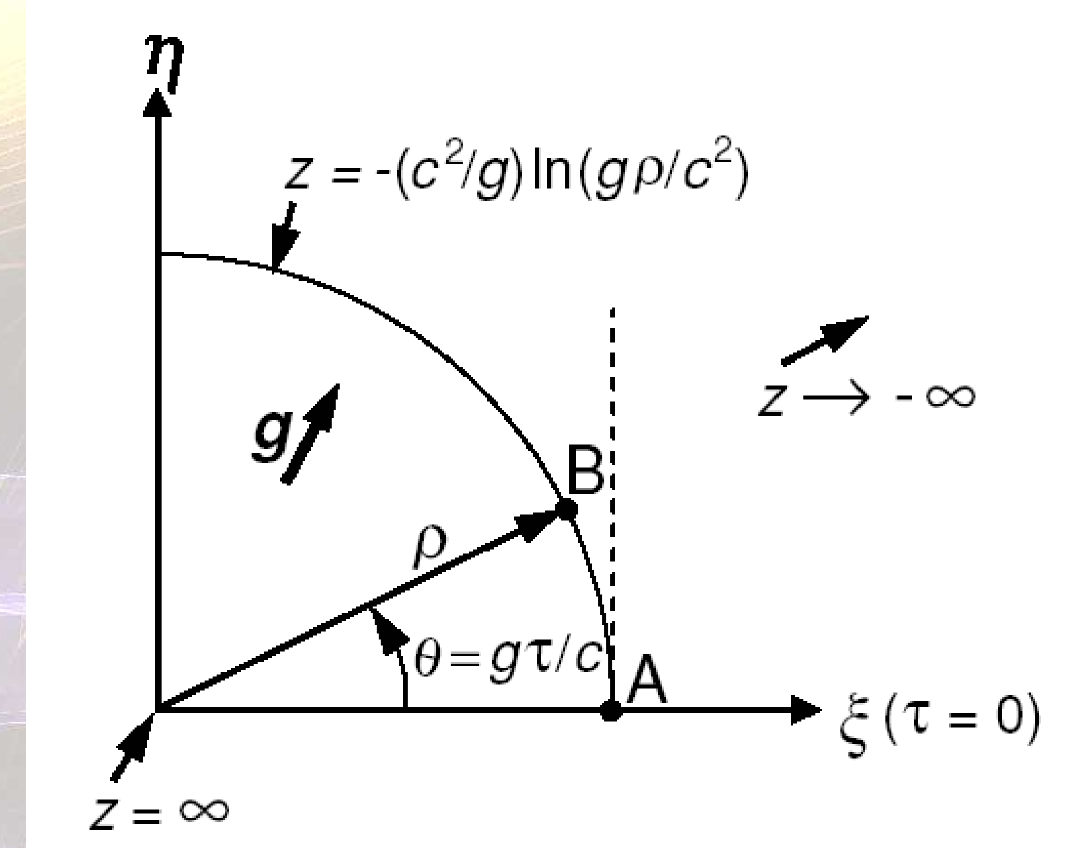
proveniente dalla relatività speciale, che in relatività generale e nel caso di un campo *g* uniforme diventa appunto:

$$\frac{\Delta t(z)}{\Delta\tau(z)} = \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right) \quad (1)$$

Il diagramma di Epstein

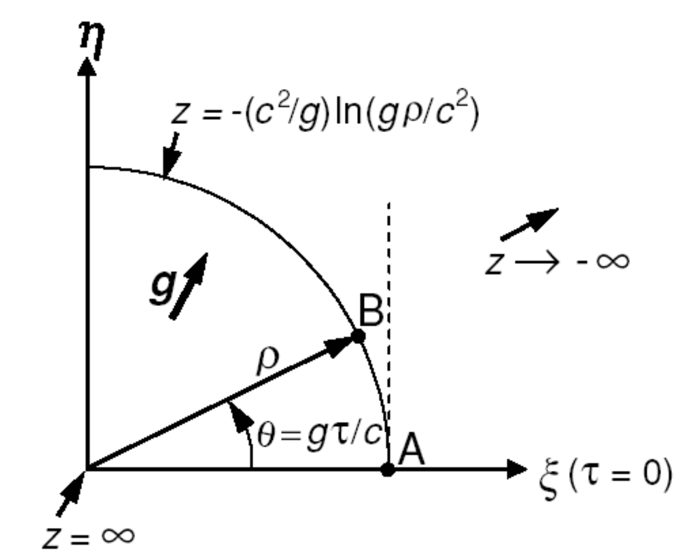
- Una ragione per cui il grafico di Epstein semplifica i calcoli è il fatto che cambiando le variabili dipendenti ed indipendenti si cambiano le geodetiche nello spazio tempo in percorsi che devono risultare delle lunghezze euclidee minime fra tutte quelle possibili, come sarà ora illustrato.

Il diagramma di Epstein



Questo è il diagramma di Epstein nel caso di un campo gravitazionale perfettamente uniforme. La linea tratteggiata che inizia nel punto A rappresenta la traiettoria di una particella libera lasciata cadere da un altezza *z* ad un tempo τ =0.

Il diagramma di Epstein



Le coordinate polari (ρ,θ) sono legate alle coordinate rettangolari da:

$$\xi = \rho\cos\theta \quad \eta = \rho\sin\theta \quad (2a)$$

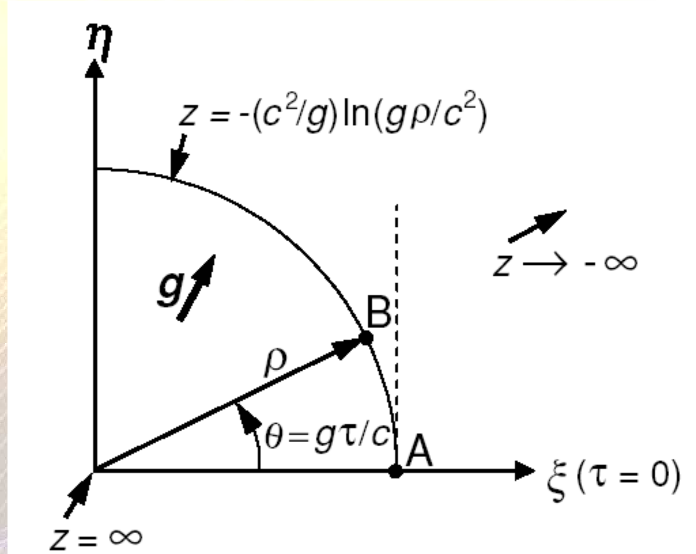
$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

La scelta di questa definizione del sistema di coordinate può essere in parte spiegata notando che siccome $\theta = \frac{AB}{\rho}$, se la lunghezza dell'arco AB è *c* volte l'intervallo di tempo di riferimento Δt, dalla (2b) segue che Δt/Δτ per un orologio ad una altezza stabilita *z*, soddisfa l'equazione (1):

$$\frac{\Delta t(z)}{\Delta\tau(z)} = \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right) \quad (1)$$

Il diagramma di Epstein



$$\frac{\Delta t(z)}{\Delta \tau(z)} = \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right) \quad (1)$$

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

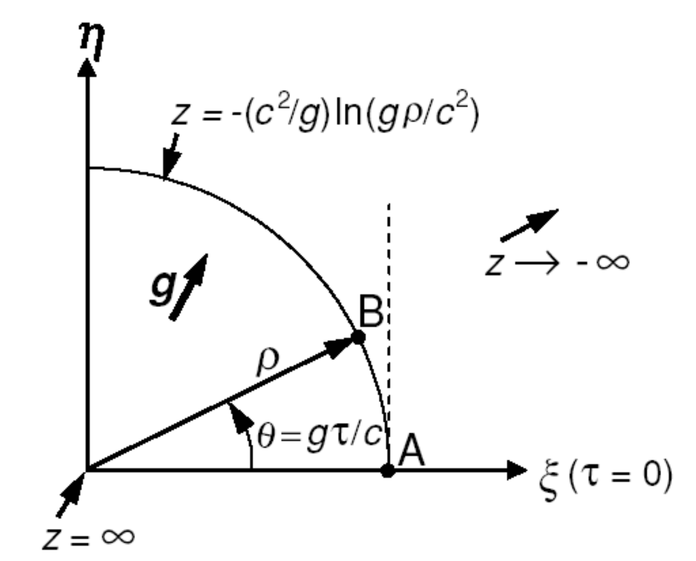
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Il diagramma di Epstein è costruito quindi in modo che ogni traiettoria soddisfi l'equazione (1). Inoltre, per l'equazione (2b), quando $|gz/c^2|<<1$ la relazione fra *z* e ρ diventa lineare:

$$\rho \approx \frac{c^2}{g} - z$$

I diagrammi di Epstein di questa presentazione utilizzano tutti questa approssimazione.

Il diagramma di Epstein



Consideriamo ora il percorso di una particella libera in un diagramma di Epstein e vediamo come questo debba essere una linea retta.

Nei grafici spazio-tempo convenzionali, la linea di universo che collega 2 eventi (t_1,z_1) e (t_2,z_2), con $t_2>t_1$, è una geodetica, e quindi l'unica linea che massimizza il tempo proprio misurato dall'"orologio da polso" della particella.

Il diagramma di Epstein

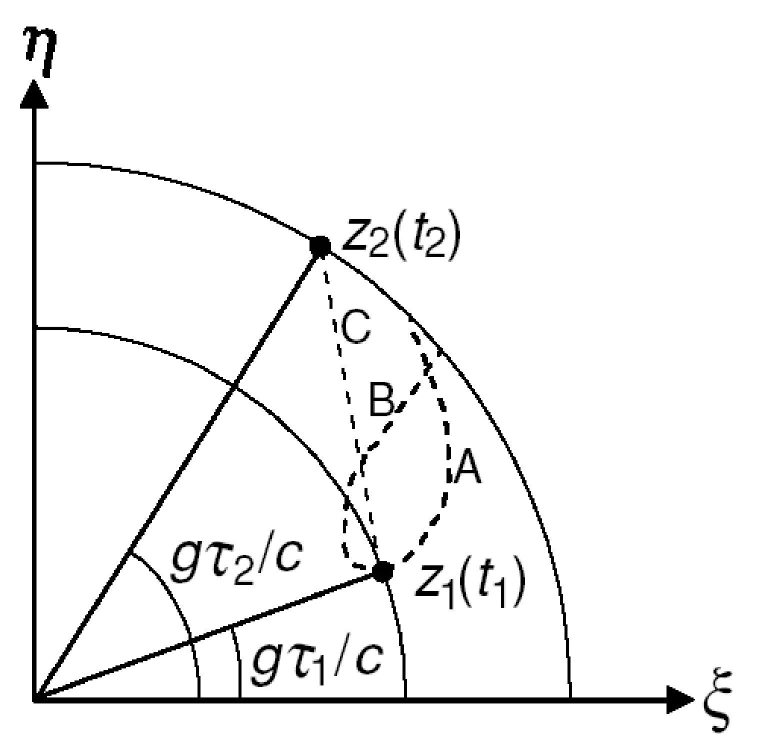
La traiettoria della particella lasciata cadere da z_1 deve stare, dalla (2b), sull'arco di raggio

$$\rho_1 = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_1}{c^2}\right)$$

Il punto dell'arco con $z=z_1$ da cui la traiettoria parte è arbitrario e dipende da come viene scelto il tempo di riferimento rispetto al tempo proprio.

Allo stesso modo, il punto finale della traiettoria, ad altezza z_2, deve stare su un arco di raggio

$$\rho_2 = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_2}{c^2}\right)$$

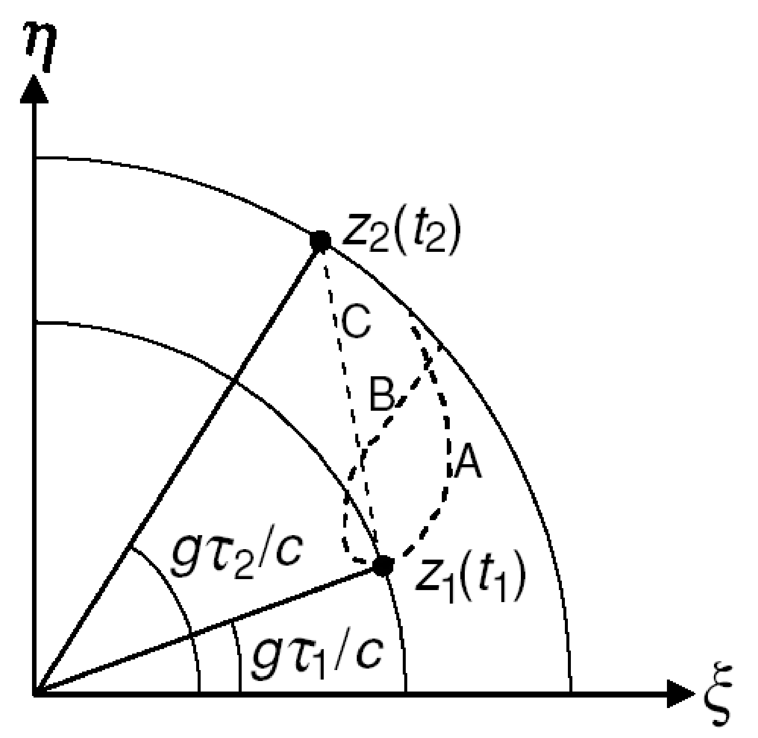


$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Il diagramma di Epstein

Ricordiamo che in un diagramma di Epstein le lunghezze euclidee di una traiettoria fra 2 punti deve essere $c(t_2-t_1)$ e che, per la (2b), il tempo proprio τ è proporzionale all'angolo θ (questo significa che il punto finale di una traiettoria si trova muovendosi in senso antiorario rispetto al punto iniziale, perché il tempo sarà aumentato).

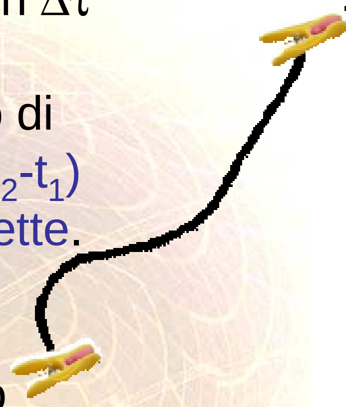


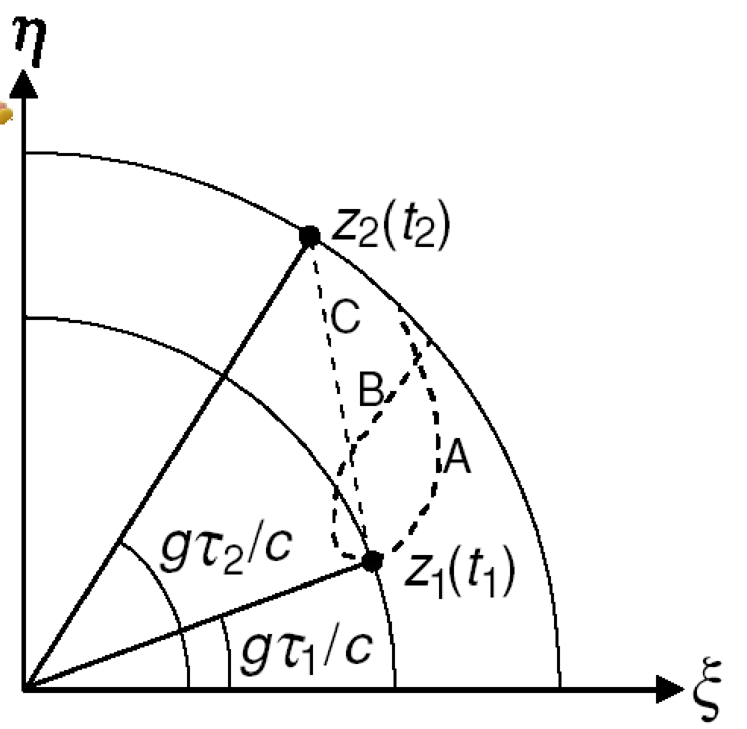
$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g} \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Il diagramma di Epstein

Per vedere che la traiettoria che corrisponde ad una geodetica con $\Delta\tau$ massimo è una linea retta nel diagramma di Epstein, pensiamo di avere una corda di lunghezza $c(t_2-t_1)$ con attaccate agli estremi 2 mollette.





Fissiamo una molletta in un punto dell'arco con $z=z_1$ e costringiamo l'altra molletta a muoversi lungo l'arco di raggio ρ_2 in senso antiorario, fino al raggiungimento dell'angolo θ massimo fra le 2 mollette.

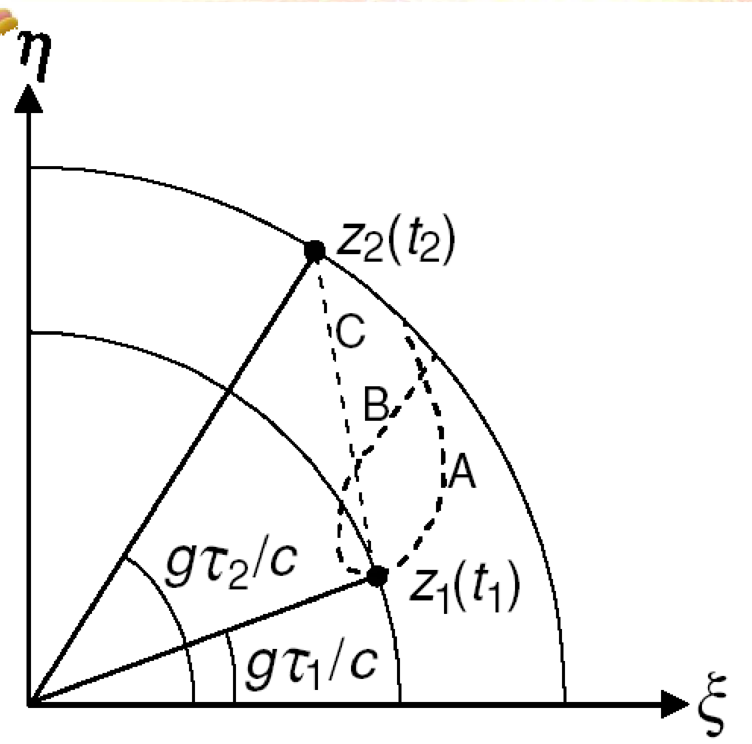
Siccome θ è proporzionale a τ, abbiamo in questo modo applicato il principio della geodetica e trovato la lunghezza euclidea nel diagramma di Epstein che massimizza $\Delta\tau$.

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g} \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Il diagramma di Epstein

C'è però una limitazione sulla lunghezza della corda usata per semplificare la spiegazione.
Se si immagina di prolungare la corda man mano che si gira in senso antiorario sull'arco di raggio ρ_2, prima o poi la corda intersecherà l'origine.
Questo punto rappresenta però un caso limite in quanto si ha $z \rightarrow \infty$.



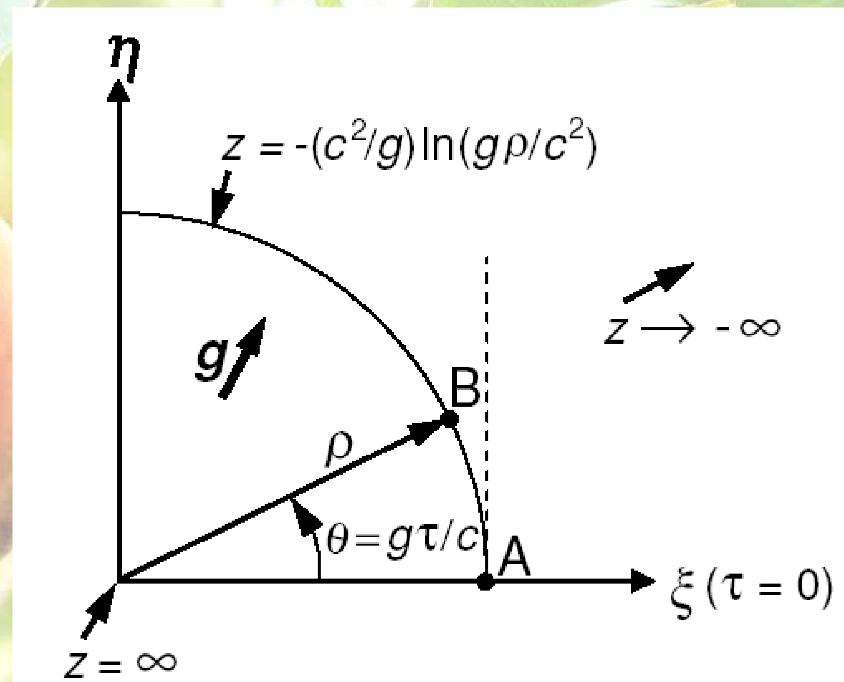
$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g} \exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Esempi di applicazioni:
Un oggetto lasciato cadere da fermo

- Consideriamo una particella lasciata cadere da ferma da un’altezza $z=z_0$ al tempo $t_0=\tau_0=0$.
- Dalla (2b) si ha che τ_0 implica $\theta_0=0$ e quindi la traiettoria della particella sul diagramma di Epstein inizierà da $(\xi,\eta)=(\xi_0,0)$, dove

$$\xi_0 = \rho_0 = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)$$

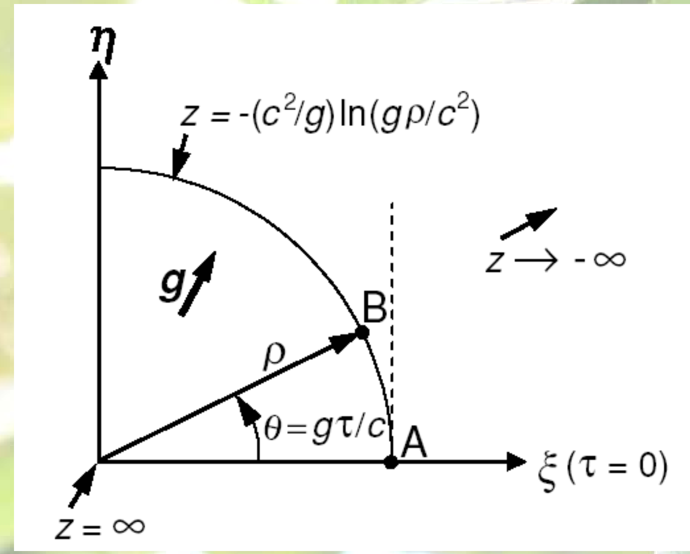


$$\rho = (\xi^2+\eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Esempi di applicazioni:
Un oggetto lasciato cadere da fermo

Come mostrato dalla linea tratteggiata in figura, siccome il percorso deve essere una linea retta, e la particella viene rilasciata da ferma, la traiettoria è una linea dritta verticale: $\xi=\xi_0$ in quanto deve essere tangente all'arco di raggio ρ_0 nel punto A.



Avendo, dalla (2a), $\xi=\rho\cos\theta$, sostituendo ρ e θ dalla (2b) e considerando $\xi=\xi_0$, segue che:

$$\xi = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right)\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \xi_0 = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)\cdot 1$$

$$\xi = \rho\cos\theta \qquad \eta = \rho\sin\theta \qquad (2a)$$

$$\rho = (\xi^2+\eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

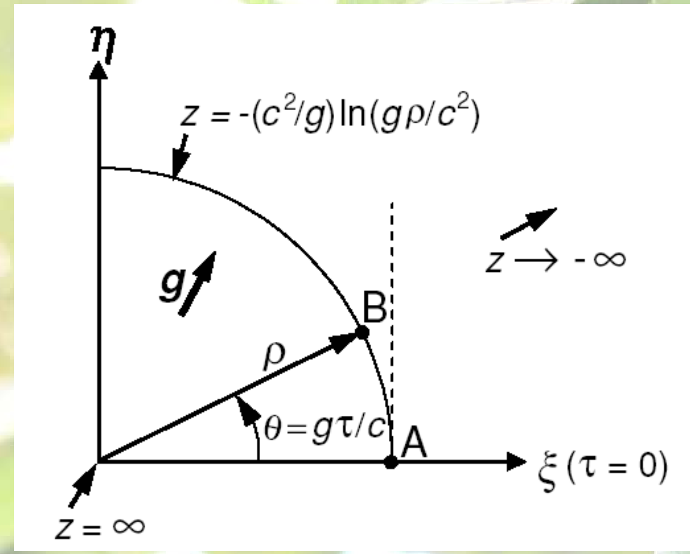
Esempi di applicazioni: Un oggetto lasciato cadere da fermo

Risolvendo l'equazione in z:

$$\frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right)\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)$$

si trova:

$$z = z_0 + \frac{c^2}{g}\ln\left[\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right]$$



Ma, come detto in precedenza, trovandoci sulla superficie terrestre, si ha *c/g~1 anno luce* e quindi, essendo gτ/c<<1 si può modificare l'espressione di z trovata usando le approssimazioni

$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad e \quad \ln(1+x) \cong x$$

Esempi di applicazioni:
Un oggetto lasciato cadere da fermo

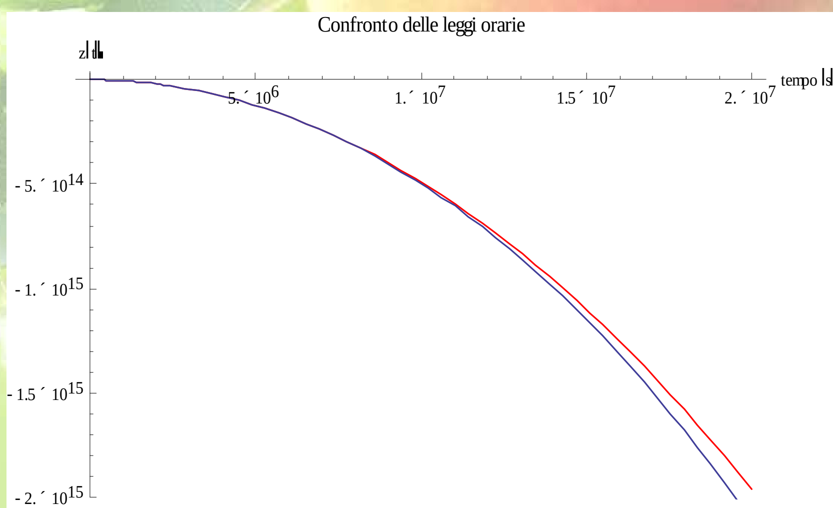
$$\ln\left[\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right] \cong \ln\left(1 - \frac{g^2\tau^2}{2c^2}\right) \cong \frac{g^2\tau^2}{2c^2}$$

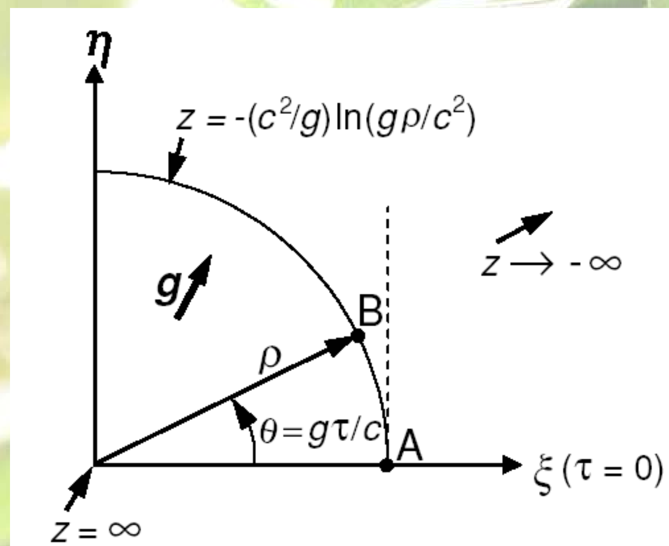
Quindi la legge orario diventa

$$z \cong z_0 + \frac{c^2}{g}\cdot\frac{g^2\tau^2}{2c^2} = z_0 + \frac{1}{2}g\tau^2$$

che è esattamente il risultato newtoniano

(mostrato in rosso nel grafico sottostante)!





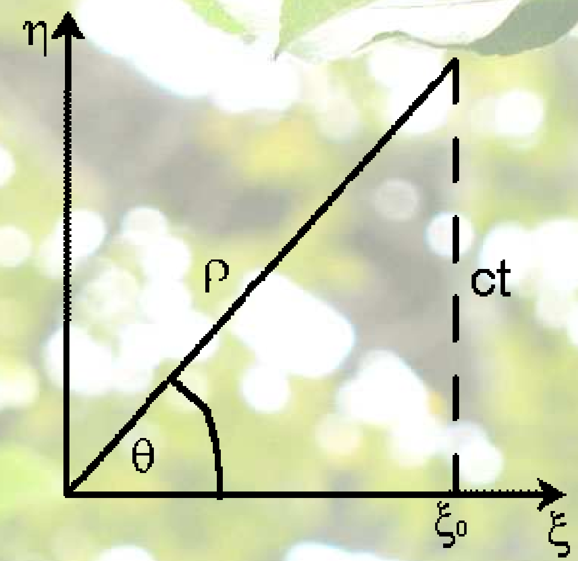
$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad e \quad \ln(1+x) \cong x$$

Emanuele Marano

Esempi di applicazioni: Un oggetto lasciato cadere da fermo

- Un altro modo per trovare il risultato “graficamente” è quello di utilizzare il teorema di Pitagora.
- Sapendo che la lunghezza della traiettoria è ct (perché t_0=0), si ricava

$$\rho = (\xi_0{}^2 + c^2t^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{c^4}{g^2}\exp\left(-\frac{2gz_0}{c^2}\right) + c^2t^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

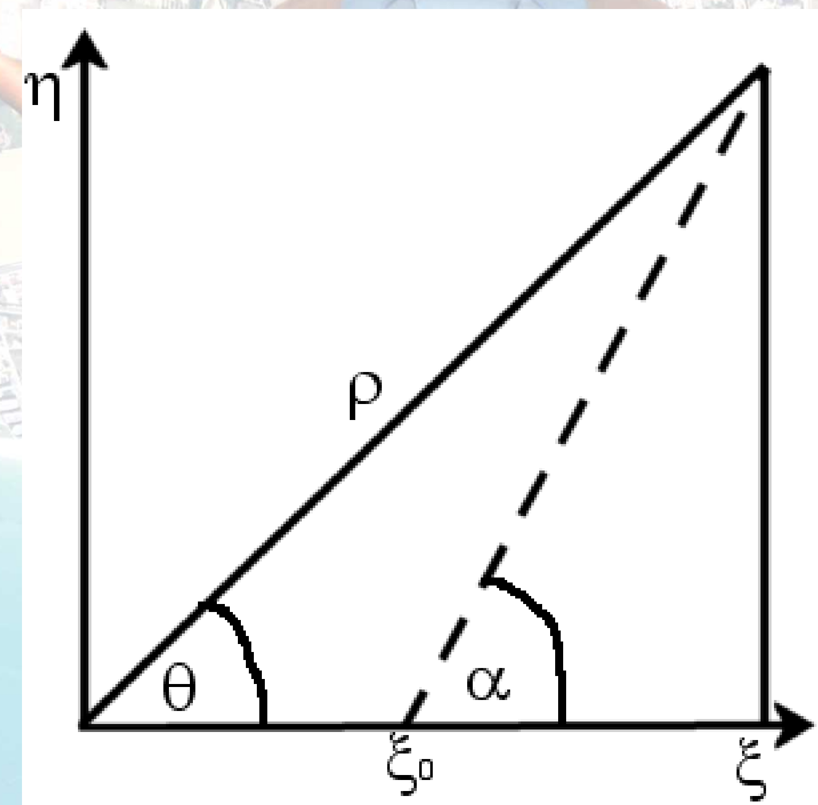
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Sostituendo ora ρ dalla (2b) si trova

$$z = -\frac{c^2}{2g}\ln\left[\left(\frac{gt}{c}\right)^2 + \exp\left(-\frac{2gz_0}{c^2}\right)\right]$$

che di nuovo si riduce al risultato newtoniano quando $\frac{gt}{c} \ll 1 \quad e \quad \left|\frac{gz_0}{c^2}\right| \ll 1$

Oggetto lasciato cadere con una velocità iniziale diversa da 0

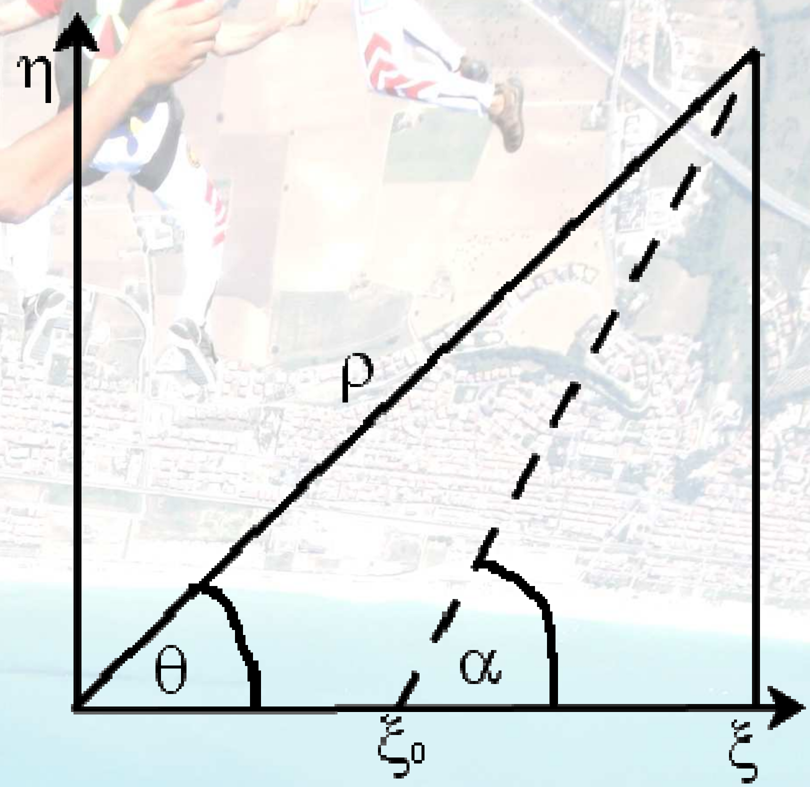


- Consideriamo ora un oggetto lasciato cadere da un'altezza $z=z_0$ al tempo $t_0=\tau_0=0$ *con una velocità iniziale*, che specificheremo più avanti.
- La traiettoria sul diagramma di Epstein (mostrata con una *linea tratteggiata*) non partirà più tangente all'arco di raggio $\rho_0=\xi_0$.

Oggetto lasciato cadere con una velocità iniziale diversa da 0

- Definiamo α come l'angolo misurato in senso antiorario tra l'asse ξ positivo e la traiettoria diritta che segue la particella sul diagramma.
- L'ordinata sarà quindi data da:

$$\eta = \tan(\alpha)(\xi - \xi_0)$$



Oggetto lasciato cadere con una velocità iniziale diversa da 0

$$\eta = \tan(\alpha)(\xi - \xi_0)$$

Sostituendo $\xi_0 = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)$

e, utilizzando le espressioni della (2), si trova l'equazione

$$\frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right)sen\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \tan(\alpha)\left[\frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right)\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)\right]$$

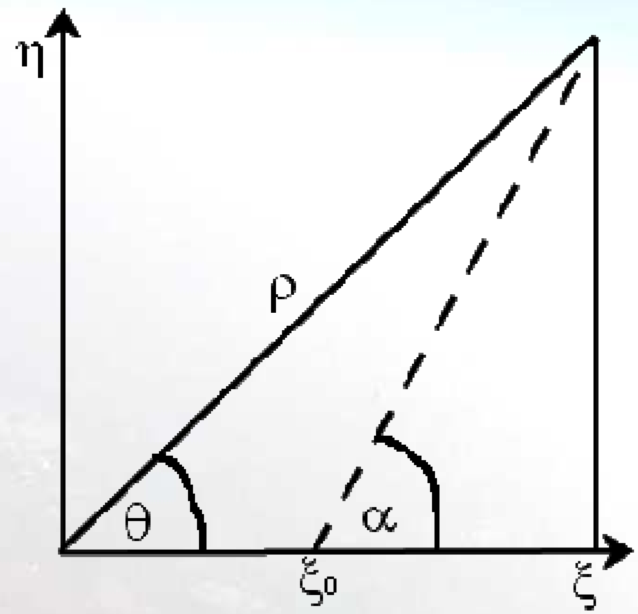
Risolviamola rispetto a z:

$$\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right)\left[sen\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \tan(\alpha)\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right] = -\tan(\alpha)\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right) = \frac{-\tan(\alpha)\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)}{sen\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \tan(\alpha)\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{gz_0}{c^2}\right)}{\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right) - sen\left(\frac{g\tau}{c}\right)\cot an(\alpha)}$$

da cui si trova

$$z = z_0 + \frac{c^2}{g}\ln\left[\cos\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \cot an(\alpha) sen\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right]$$



$$\xi = \rho\cos\theta \qquad \eta = \rho\sin\theta \qquad (2a)$$

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \frac{c^2}{g}\exp\left(-\frac{gz}{c^2}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{g\tau}{c}, \qquad (2b)$$

Emanuele Marano

Oggetto lasciato cadere con una velocità iniziale diversa da 0

Utilizzando come in precedenza le approssimazioni $\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad e \quad \ln(1+x) \cong x$

insieme a $sen(x) \approx x \quad per \quad |x| \ll 1$ e con $\left(\frac{g\tau}{c}\right) \cot an(\alpha) \ll 1$

si ricava il risultato approssimato

$$z \cong z_0 - c \cot an(\alpha) \tau - \frac{1}{2} g \tau^2$$

Questo è il risultato newtoniano per un moto con accelerazione costante e si ha quindi

$$-c \cot an(\alpha) = v_0 = \frac{dz}{d\tau}(0)$$

con v_0 pari alla velocità iniziale propria della particella.

- Così, per particelle non relativistiche per le quali la velocità propria è approssimativamente uguale a alla velocità di riferimento, è stato ottenuto il risultato newtoniano.

$$z \cong z_0 - c\cot an(\alpha)\tau - \frac{1}{2} g\tau^2$$

- Siamo quindi riusciti ad ottenere gli stessi risultati newtoniani per casi molto semplici, usando però l'equazione del redshift gravitazionale predetto dalla teoria della relatività generale di Einstein, e ciò è stato possibile grazie alla grande semplificazione data dall'utilizzo dei diagrammi di Epstein.


Fine
Emanuele Marano