Francesco Massimino

ONDE ELETTROMAGNETICHE SU SPECCHI IN MOVIMENTO

Effetto Doppler relativistico

Un'onda luminosa, polarizzata planarmente, subisce un cambiamento di frequenza quando viene riflessa da uno specchio in moto relativo rispetto alla sorgente.

Precedenti

Nel suo articolo del 1905, Einstein predisse e calcolò questo effetto: la sua dimostrazione considera in quiete il sistema di riferimento dello specchio e fa uso delle trasformazioni di Lorentz.

Il cambiamento di frequenza risulta dipendere dalla velocità relativa tra specchio e sorgente e dall'angolo di incidenza.

Obiettivo

- Nell'articolo di Aleksandar Gjurchinovski di 100 anni dopo viene proposta una dimostrazione che fa uso solo del secondo postulato della relatività e dei principi dell'ottica fisica.
- È plausibile che il risultato sia lo stesso poichè l'assunzione che c sia costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali conduce di fatto alle trasformazioni di Lorenz, sebbene esse siano antecedenti al 1905.

Osservazione

Le comuni leggi della riflessione valgono nell'ambito di mezzi riflettenti fermi rispetto alla sorgente.

Se lo specchio sarà in moto relativo rispetto alla sorgente l'angolo che il raggio incidente forma con la normale non sarà più pari al corrispettivo tra raggio riflesso e normale.

I due angoli saranno chiamati rispettivamente α e β.

Nuova legge della riflessione

Una nuova legge può essere ricavata dalle trasformazioni di Lorenz (come fece Einstein), dalla costruzione di un inviluppo alla Huygens o dal principio di Fermat

"Il percorso fra due punti preso da un raggio di luce è quello che è attraversato nel minor tempo."

In una sua precedente pubblicazione A.G. ricava la nuova legge con il principio di Huygens.

Principio di Huygens

Secondo il principio di Huygens, ogni punto appartenente al fronte d'onda diventa sorgente di un'onda sferica: il nuovo fronte d'onda sarà l'inviluppo di tali onde.

In un mezzo isotropo, come il vuoto, il raggio luminoso è la normale al fronte d'onda.

In un modello microscopico, le sorgenti d'onda sferica sono gli atomi eccitati dal fronte.

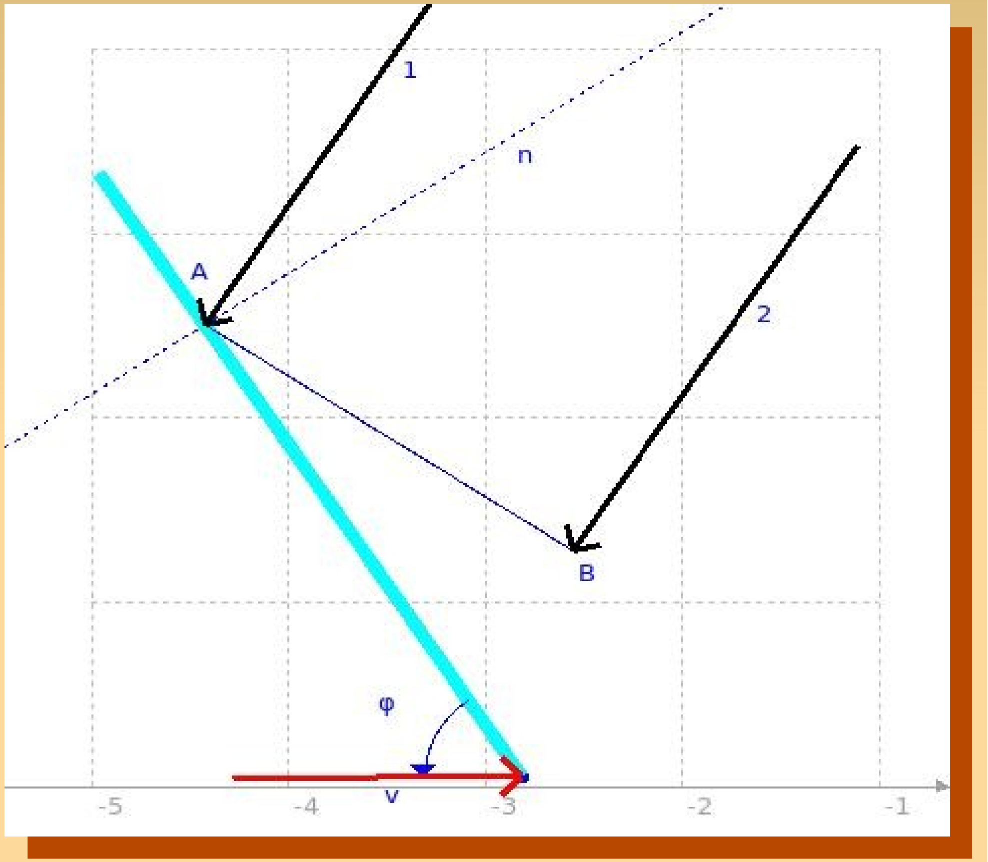
Istante iniziale t_0

φ è l'angolo che lo specchio forma con la direzione di moto dello specchio.

AB è il fronte d'onda in arrivo sullo specchio: **1** e **2** sono i due raggi estremi.

Lo specchio si muove a velocità **v**.

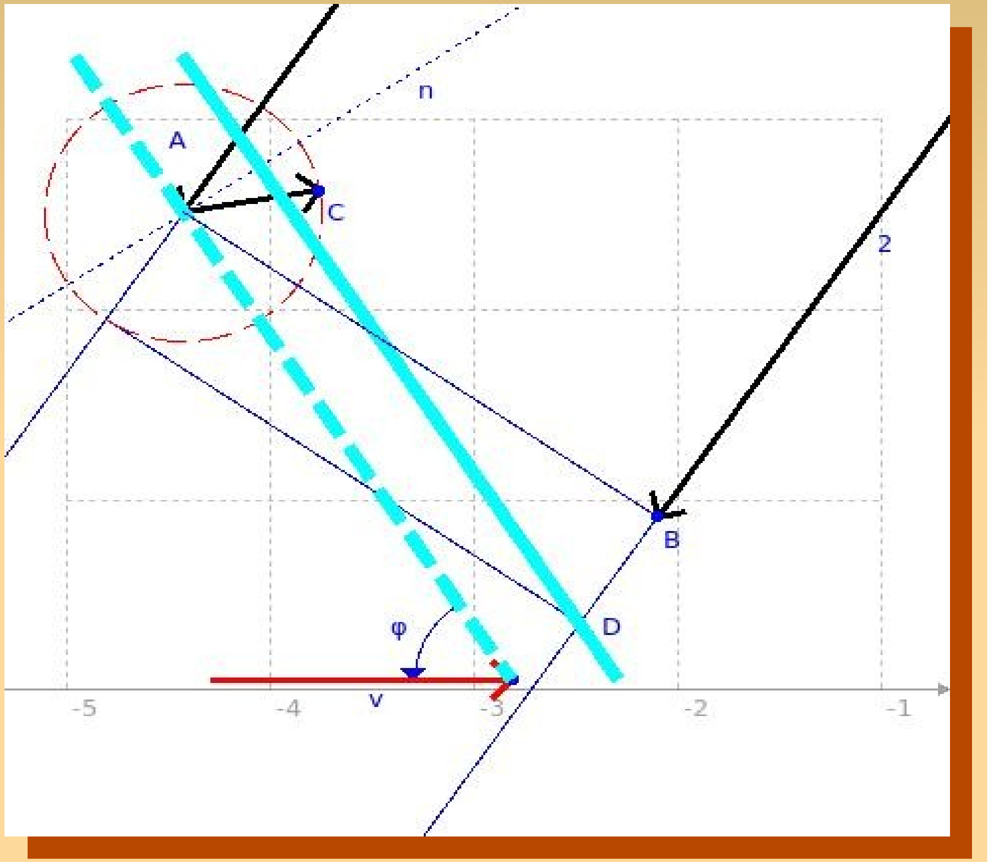
Ad un tempo t_0 il fronte d'onda raggiunge gli atomi in **A**, che diventano sorgente di onde sferiche.



Istante t

Il fronte d'onda continua a generare sorgenti sferiche fino all'istante **t**, quando incide sullo specchio in **D**.

Nell'intervallo **$(t-t_0)$** lo specchio si è mosso di **$v(t-t_0)$** e sia l'onda sferica in **A** che il raggio **2** hanno percorso **$c(t-t_0)$**, poichè la velocità di propagazione della luce nel vuoto è costante per il postulato della relatività.



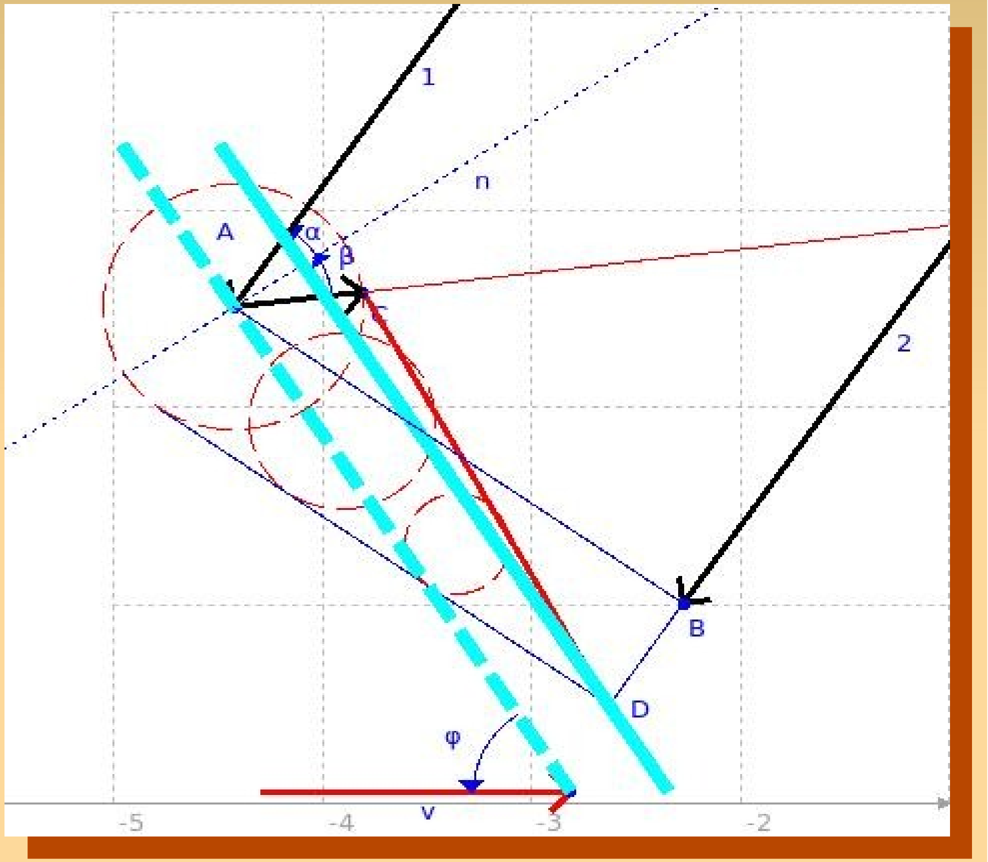
Inviluppo ed angoli di riflessione

Il raggio delle varie onde sferiche è **cτ**, dove **τ** è l'intervallo di tempo dall'inizio dell'emissione.

L'inviluppo di tutte le onde sferiche all'istante **t** è un nuovo fronte d'onda piano **CD**.

α è l'angolo tra il raggio incidente e la normale, mentre **β** è l'angolo tra raggio riflesso e normale.

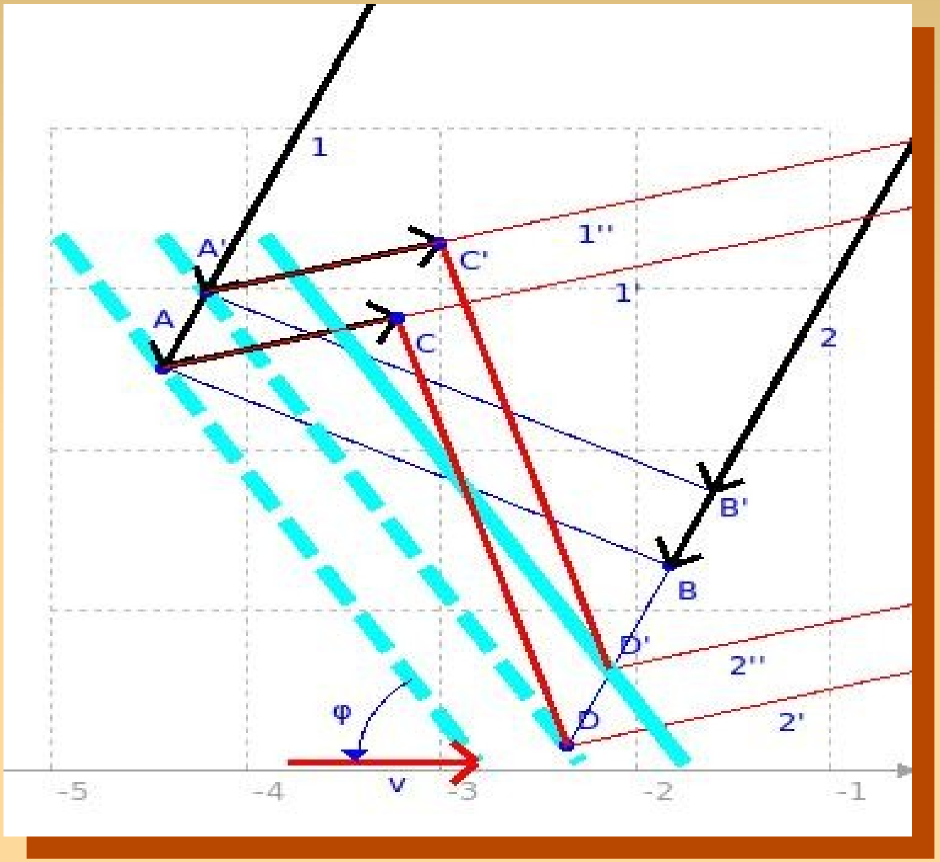
α e **β** sono diversi tranne nel caso in cui **v** sia nulla.



Spostamento del fronte d'onda

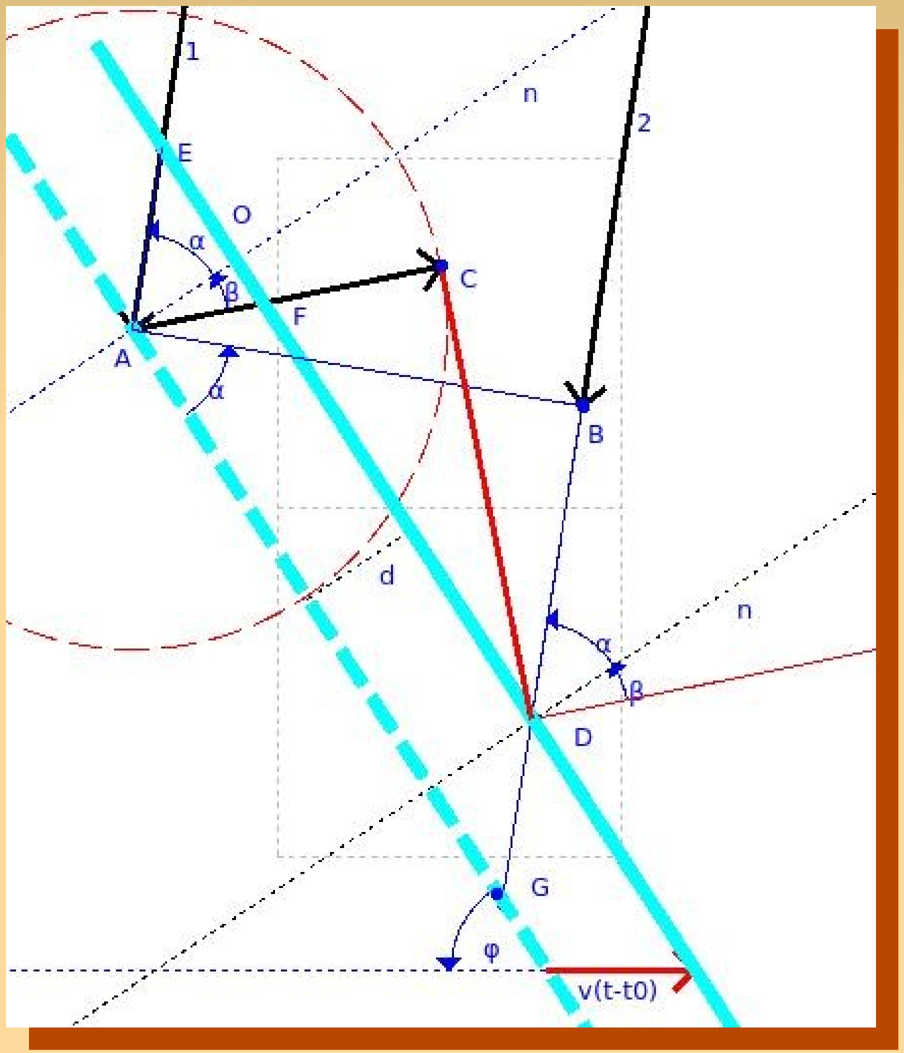
A'B' è un fronte d'onda successivo al primo: viene riflesso con lo stesso angolo **β** ma il moto dello specchio fa si che il vengano colpite posizioni differenti sulla sua superficie ed il secondo fronte riflesso **C'D'** sia spostato più in alto: questo effetto può essere facilmente osservato nella proiezione dell'onda riflessa.

I raggi **1"** e **2"** non corrispondono più rispettivamente a **1'** e **2'**, ma **C'D'** continua ad essere parallelo a **CD**.



Calcolo della relazione tra α e β

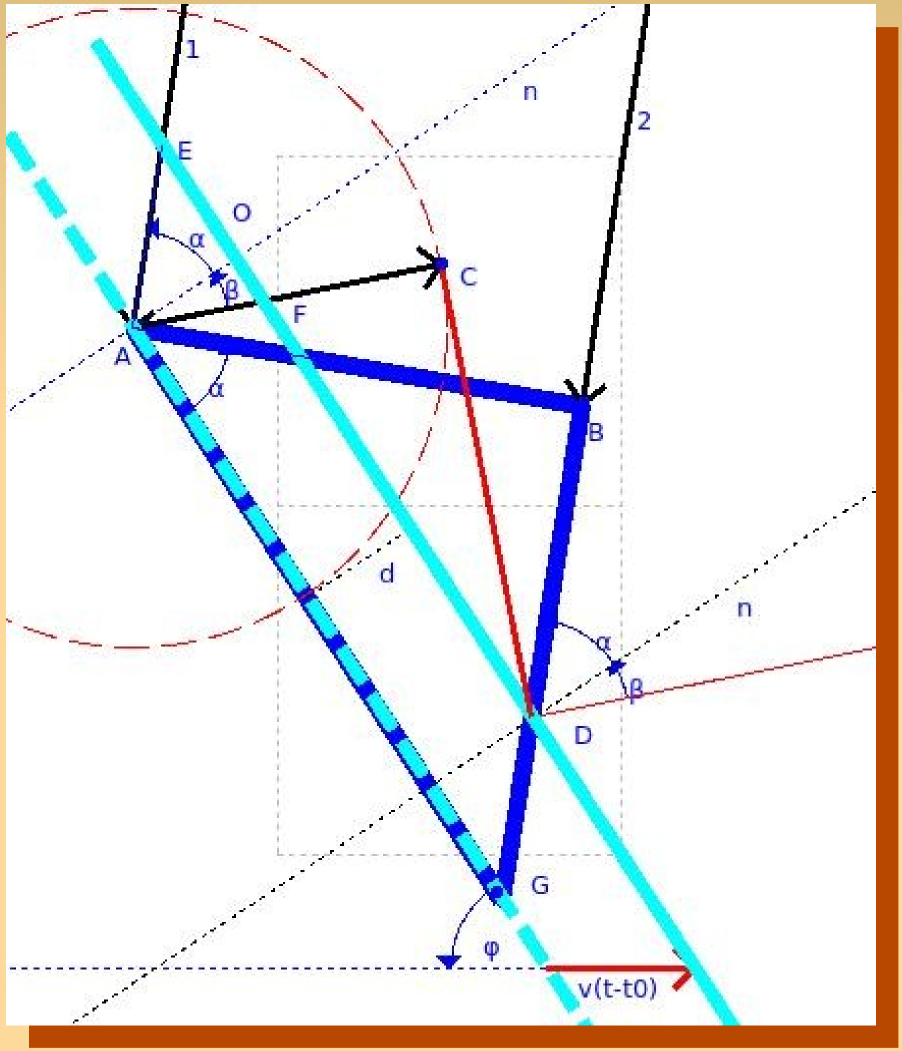
L'angolo **BQG** è pari ad **α** perchè complementare allo stesso angolo



Calcolo della relazione tra α e β

L'angolo **BAG** è pari ad **α** perchè complementare allo stesso angolo

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

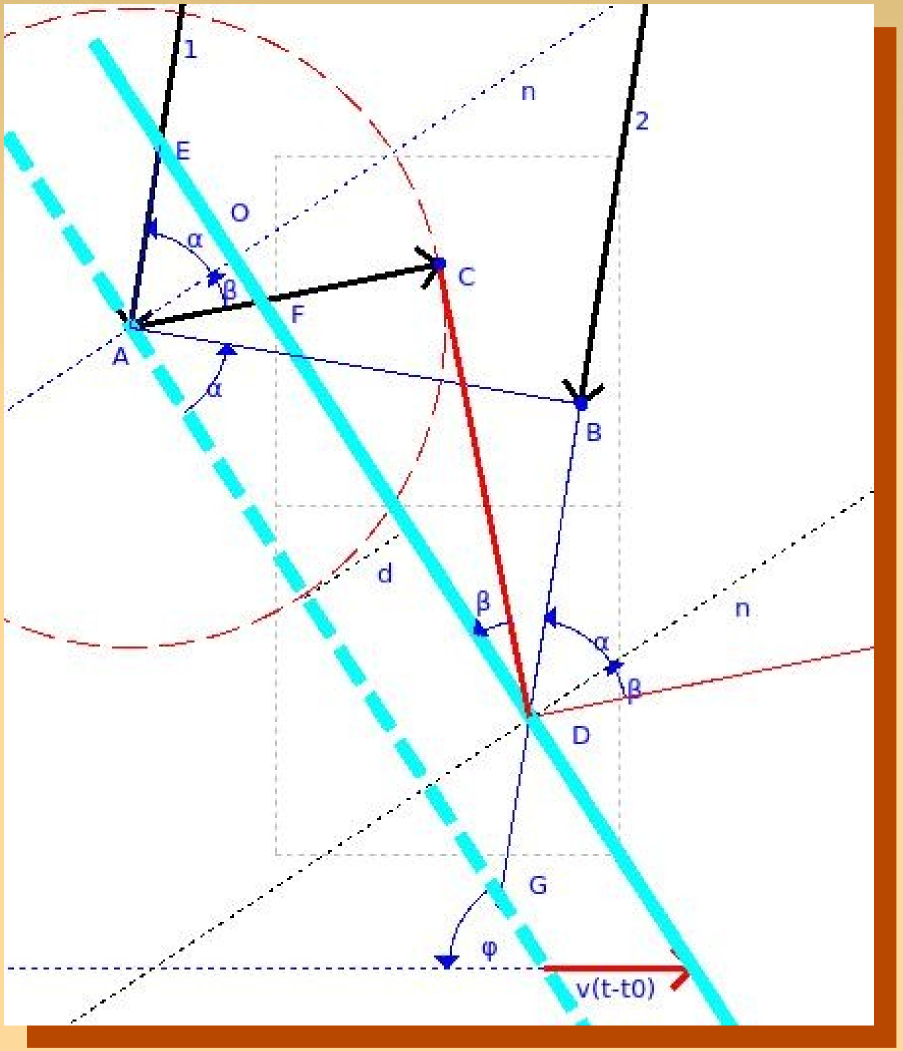


Calcolo della relazione tra α e β

L'angolo **BAG** è pari ad **α** perchè complementare allo stesso angolo

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

L'angolo **CDF** è pari ad **β** perchè complementare allo stesso angolo



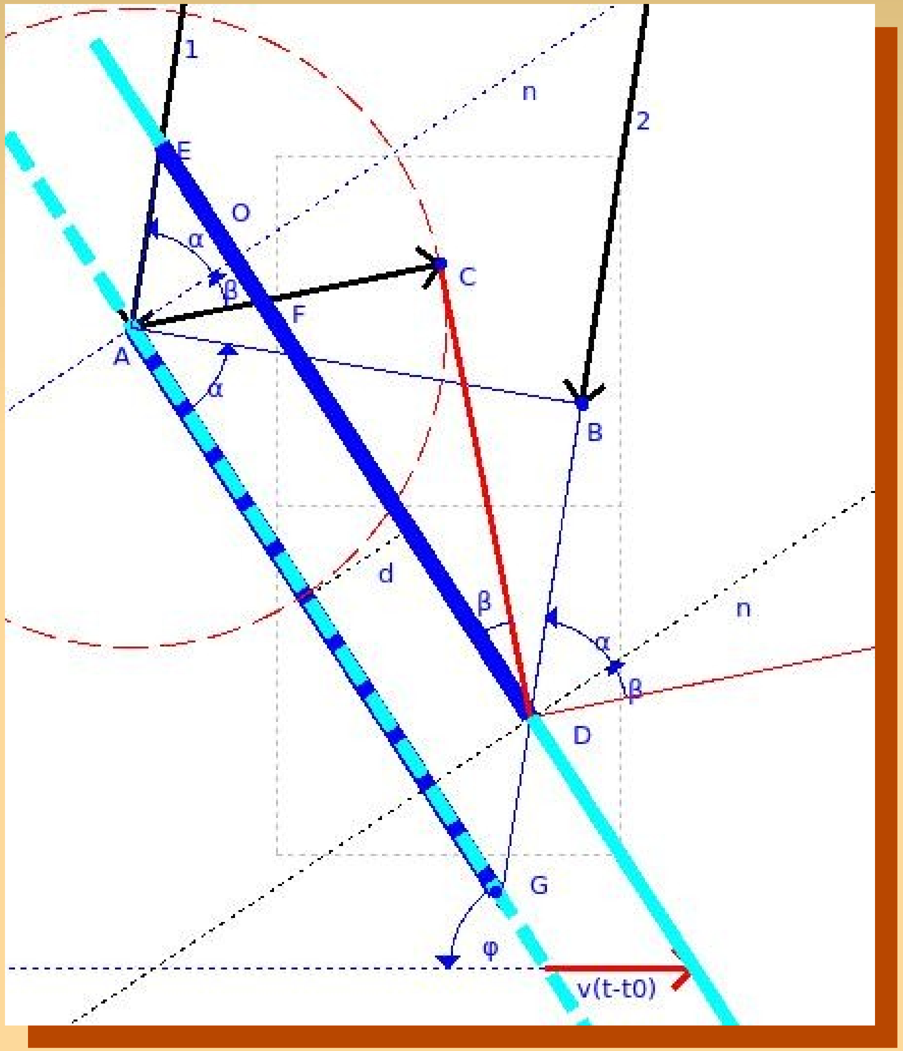
Calcolo della relazione tra α e β

L'angolo **BAG** è pari ad **α** perchè complementare allo stesso angolo

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

L'angolo **CDF** è pari ad **β** perchè complementare allo stesso angolo

AG è pari a **ED** per traslazione



Calcolo della relazione tra α e β

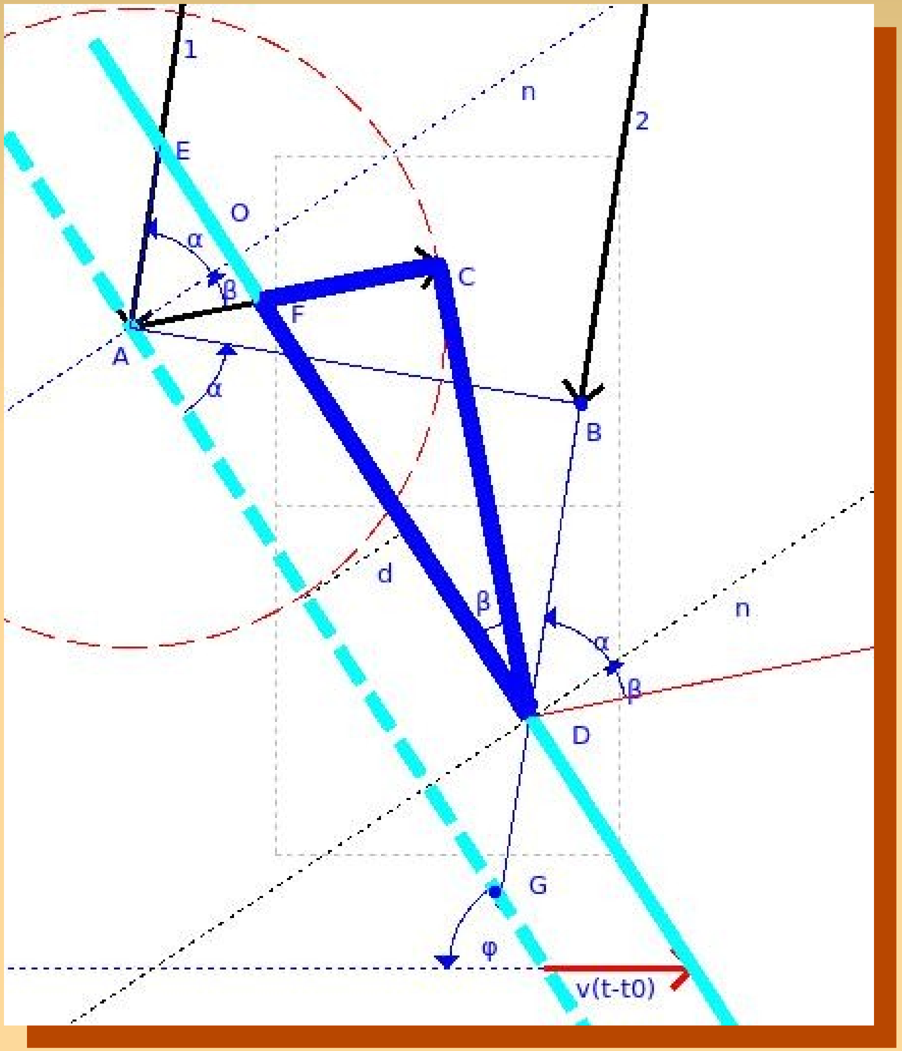
L'angolo **BAG** è pari ad **α** perchè complementare allo stesso angolo

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

L'angolo **CDF** è pari ad **β** perchè complementare allo stesso angolo

AG è pari a **ED** per traslazione

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$



Calcolo della relazione tra α e β

L'angolo **BAG** è pari ad **α** perchè complementare allo stesso angolo

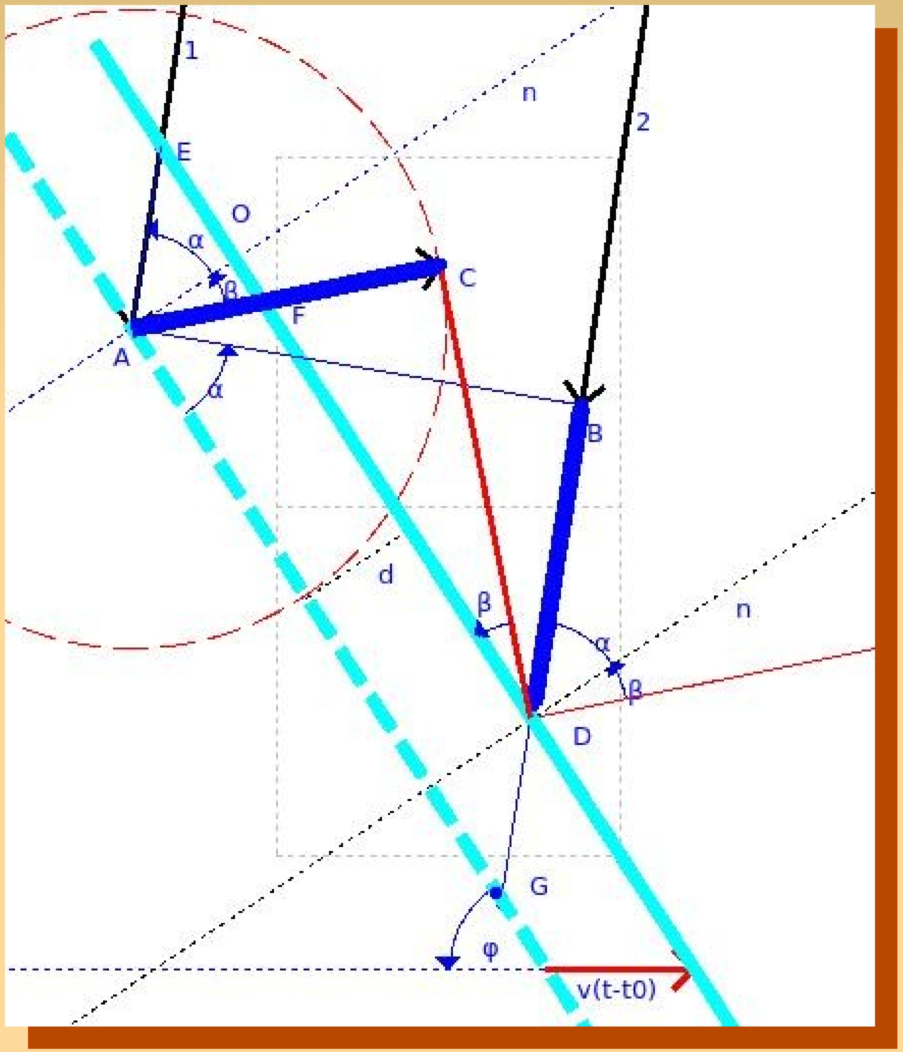
$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

L'angolo **CDF** è pari ad **β** perchè complementare allo stesso angolo

AG è pari a **ED** per traslazione

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$



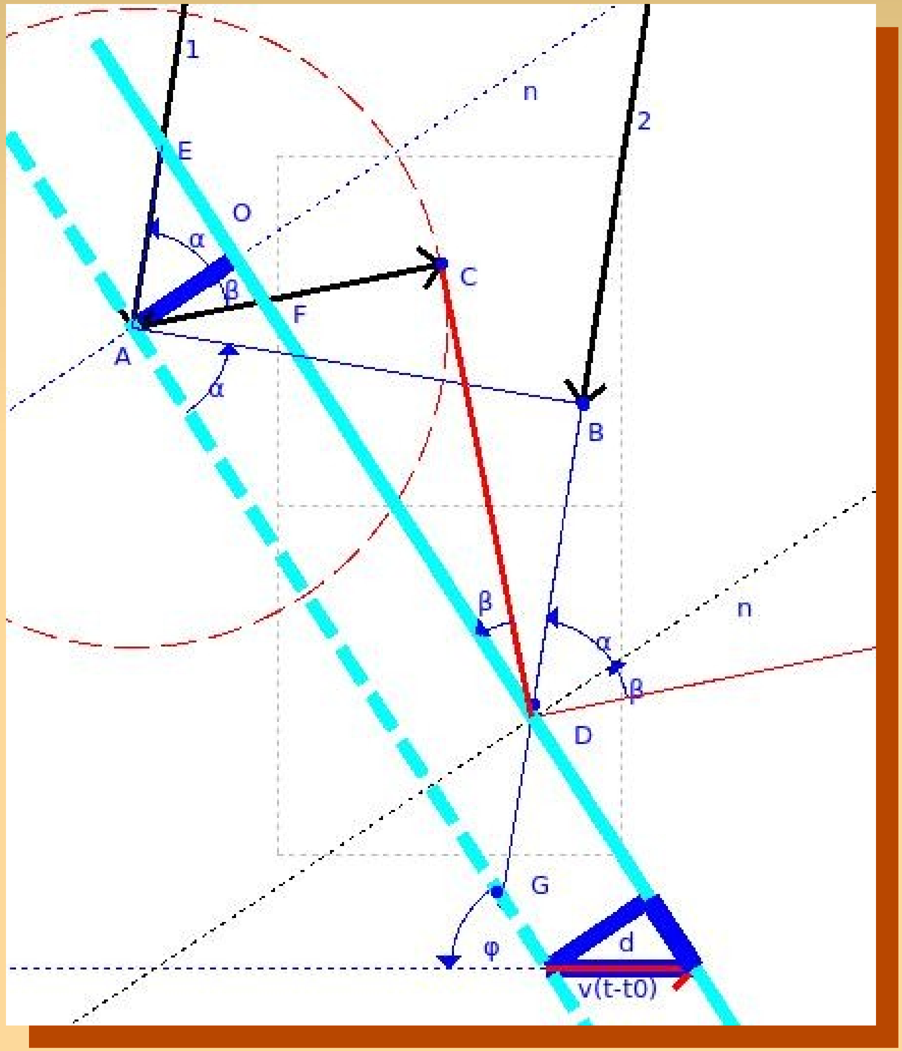
Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$



Calcolo della relazione tra α e β

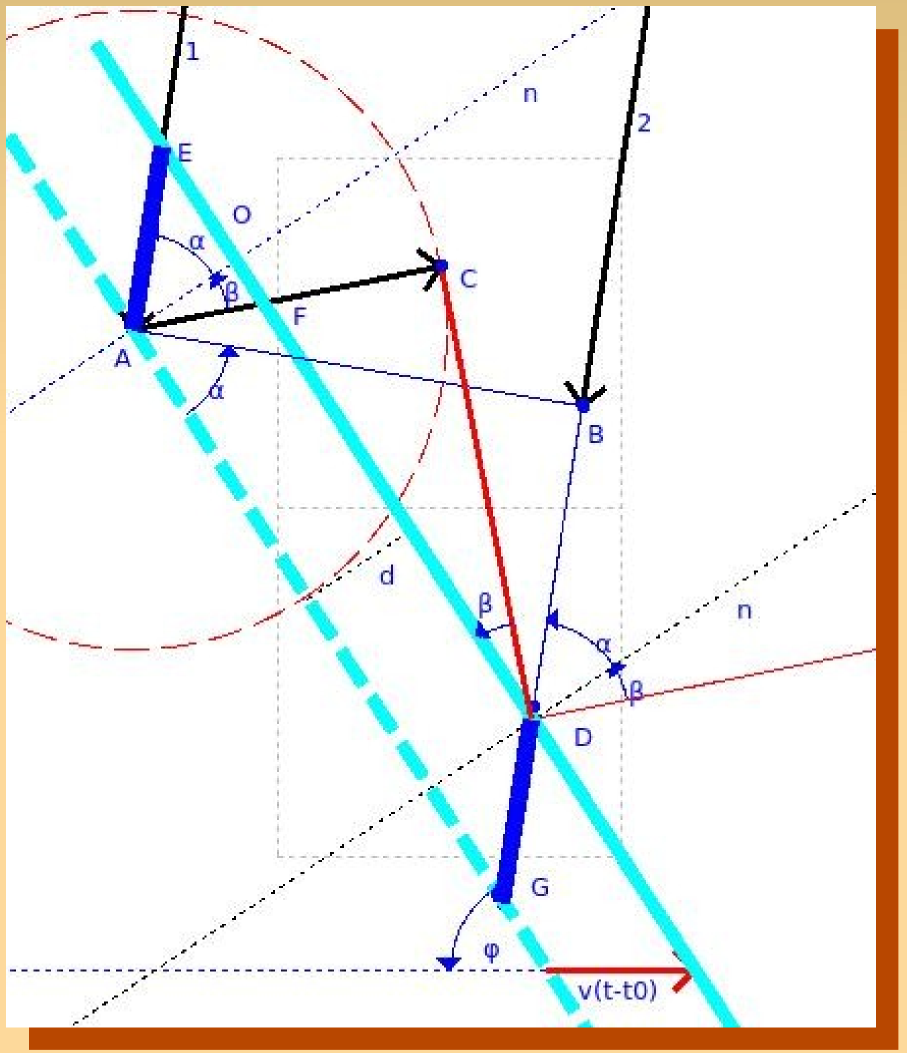
$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE}$$



Calcolo della relazione tra α e β

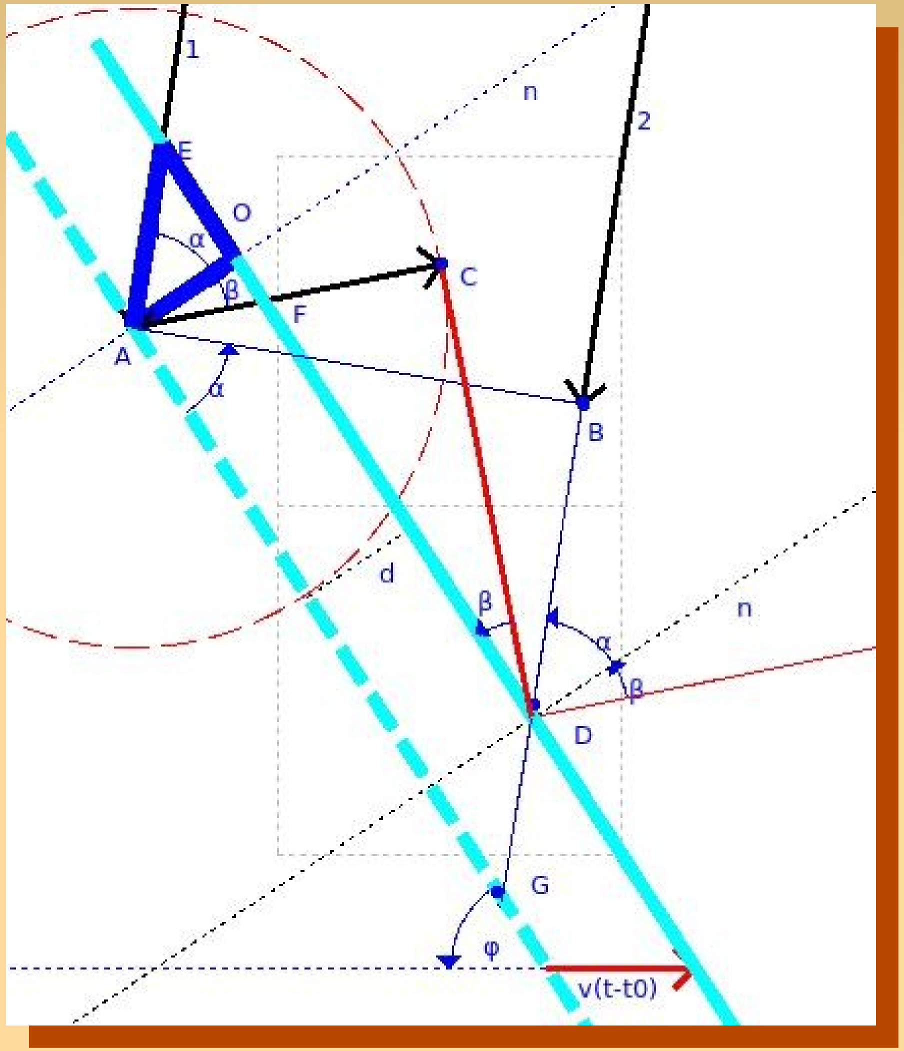
$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)}$$



Calcolo della relazione tra α e β

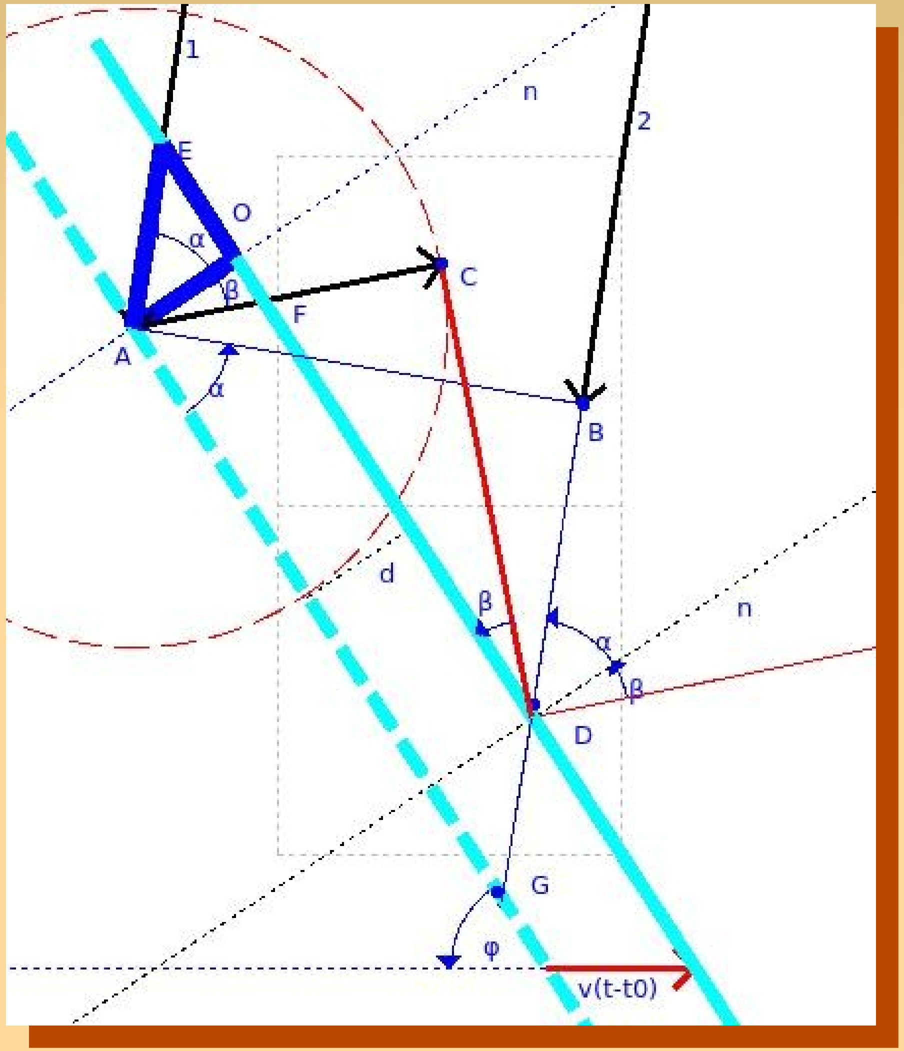
$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)}$$



Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

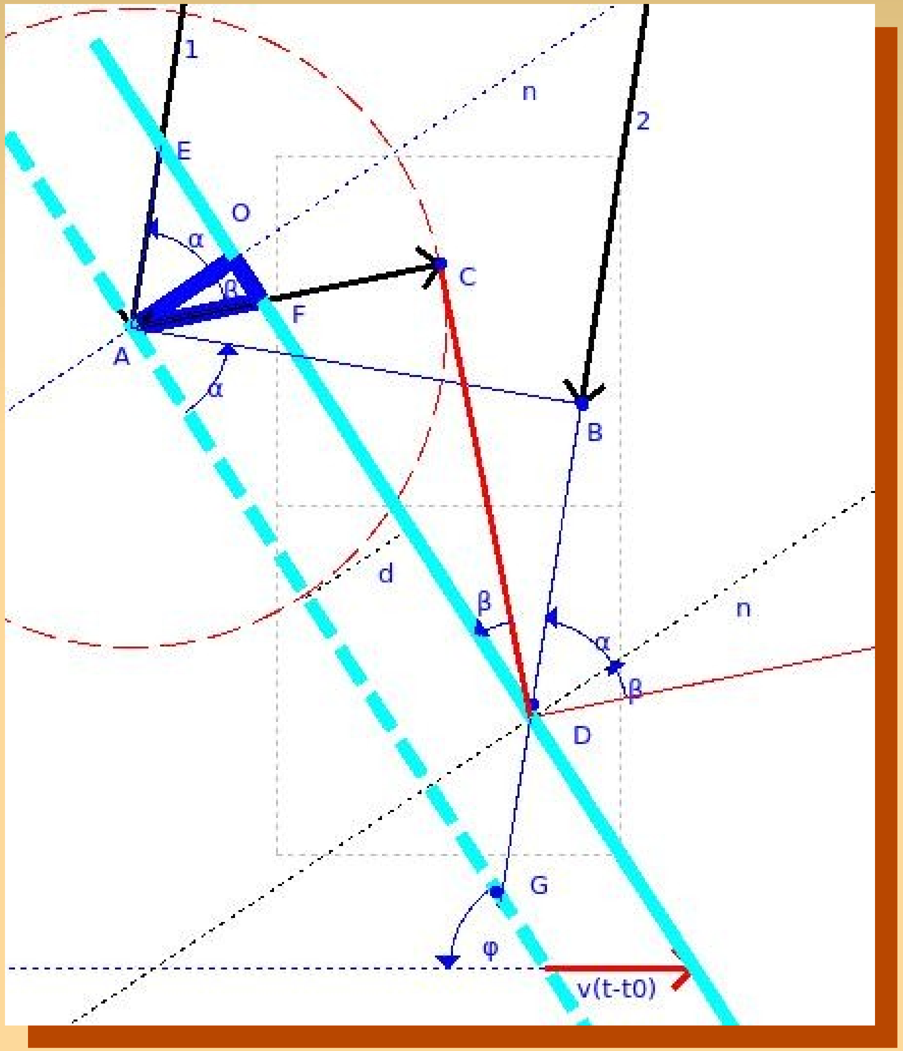
$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)}$$

$$AF = \frac{\overline{AO}}{cos(\beta)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta)}$$



Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

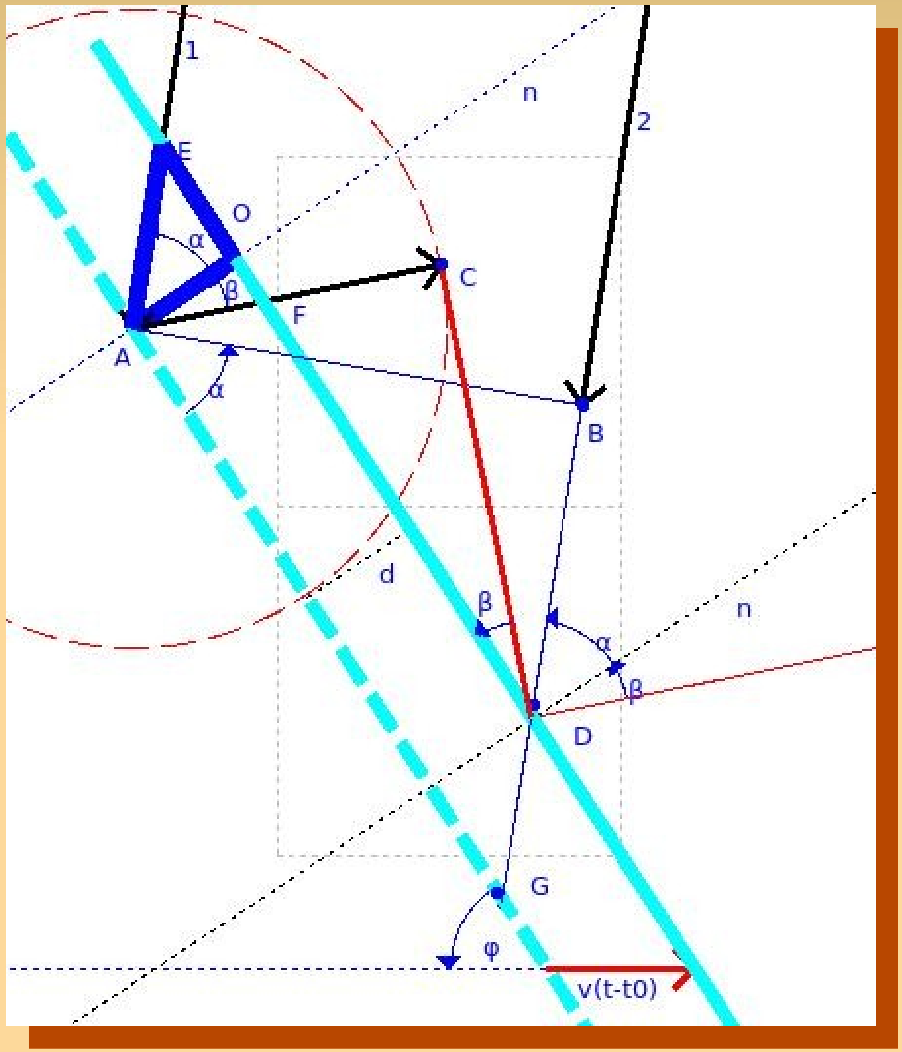
$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)}$$

$$AF = \frac{\overline{AO}}{cos(\beta)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta)}$$

$$EO = \overline{AO}tan(\alpha)$$



Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}}$$

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD}$$

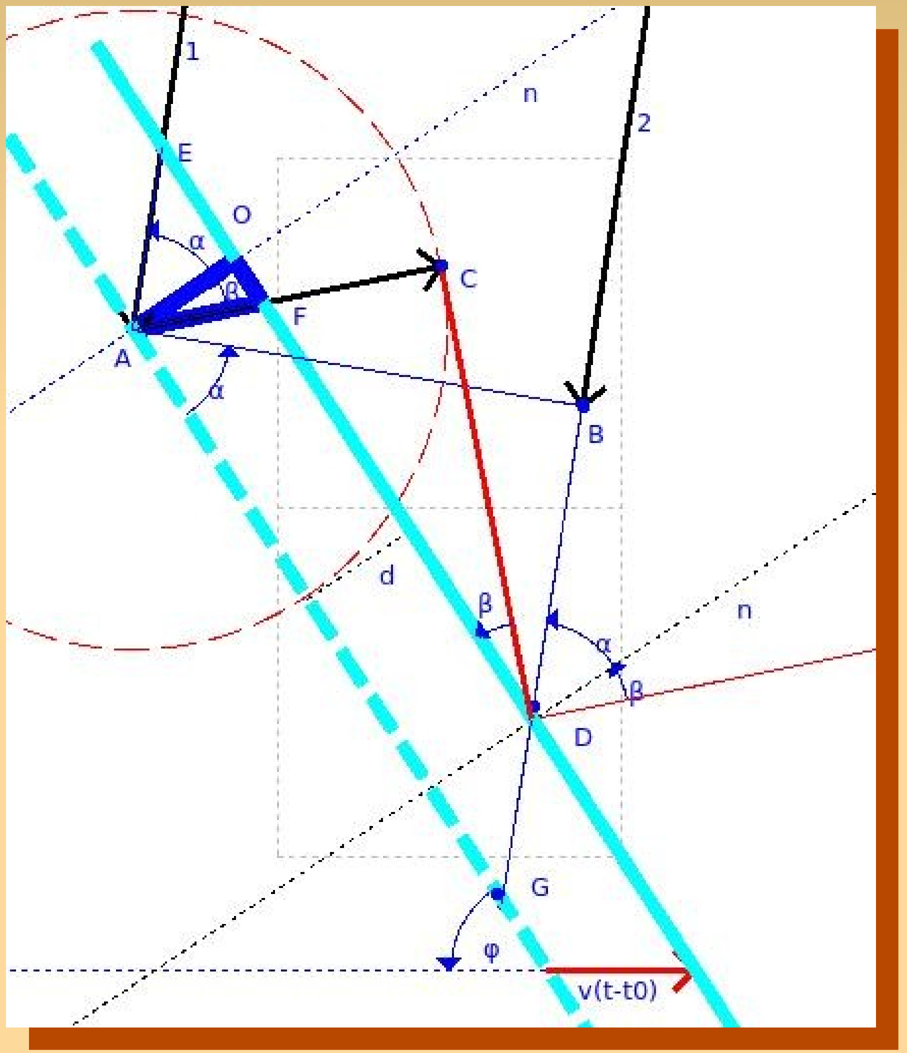
$$d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)}$$

$$AF = \frac{\overline{AO}}{cos(\beta)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta)}$$

$$EO = \overline{AO}tan(\alpha) \qquad OF = \overline{AO}tan(\beta)$$

$$EF = \overline{EO} + \overline{OF}$$



Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}} \qquad sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{\overline{AG} - \overline{EF}}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD} \qquad d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)} \qquad AF = \frac{\overline{AO}}{cos(\beta)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta)}$$

$$EF = \overline{EO} + \overline{OF}$$

$$EO = \overline{AO}tan(\alpha) \qquad OF = \overline{AO}tan(\beta)$$

$$EF = \overline{AO}(tan(\alpha) + tan(\beta)) = v(t - t_0)sin(\varphi)(tan(\alpha) + tan(\beta))$$

Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\alpha) = \frac{\overline{BD} + \overline{DG}}{\overline{AG}} \qquad sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{AG} - \overline{EF}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD} \qquad d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)} \qquad AF = \frac{\overline{AO}}{cos(\beta)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta)}$$

$$EF = \overline{AO}(tan(\alpha) + tan(\beta)) = v(t - t_0)sin(\varphi)(tan(\alpha) + tan(\beta))$$

$$sin(\alpha) = \frac{c(t-t_0) + \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)}}{\overline{AG}} = \frac{c + v\frac{sin(\varphi)}{cos(\alpha)}}{\frac{\overline{AG}}{(t-t_0)}}$$

Sostituendo quanto ricavato nell'espressione di sin(α) e sin(β)

Calcolo della relazione tra α e β

$$sin(\beta) = \frac{\overline{AC} - \overline{AF}}{\overline{\overline{AG} - \overline{EF}}}$$

$$c(t - t_0) = \overline{AC} = \overline{BD} \qquad d = \overline{AO} = v(t - t_0)sin(\varphi)$$

$$DG = \overline{AE} = \frac{\overline{AO}}{cos(\alpha)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\alpha)} \qquad AF = \frac{\overline{AO}}{cos(\beta)} = \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta)}$$

$$EF = \overline{AO}(tan(\alpha) + tan(\beta)) = v(t - t_0)sin(\varphi)(tan(\alpha) + tan(\beta))$$

$$sin\alpha = \frac{c + v\frac{sin\varphi}{cos\alpha}}{\frac{\overline{AG}}{(t-t_0)}}$$

$$sin(\beta) = \frac{c(t-t_0) - \frac{v(t-t_0)sin(\varphi)}{cos(\beta}}{\overline{AG} - v(t-t_0)sin(\varphi)(tan(\alpha)+tan(\beta))} = \frac{c - v\frac{sin(\varphi)}{cos(\beta}}{\frac{\overline{AG}}{(t-t_0)} - v\cdot sin(\varphi)(tan(\alpha)+tan(\beta))}$$

Calcolo della relazione tra α e β

$$\begin{cases} sin\alpha = \dfrac{c+v\frac{sin\varphi}{cos\alpha}}{\frac{\overline{AG}}{(t-t_0)}} \\ \\ sin\beta = \dfrac{c-v\frac{sin\varphi}{cos\beta}}{\frac{\overline{AG}}{(t-t_0)}-v\cdot sin\varphi(tan\alpha+tan\beta)} \end{cases}$$

Eliminando il termine $\dfrac{AG}{(t-t_0)}$ è possibile ottenere la relazione tra sin(α) e sin(β).

Con un po' di algebra la relazione è semplificabile in

$$\frac{sin\alpha-sin\beta}{sin(\alpha+\beta)} = \frac{v}{c}sin\varphi$$

Osservazioni

$$\frac{sin\alpha - sin\beta}{sin(\alpha+\beta)} = \frac{v}{c} sin\varphi$$

Se lo specchio è fermo o è parallelo alla direzione di moto ci si riconduce alla legge classica (α=β).

Se α=0, anche β sarà nullo per qualsiasi velocità ed inclinazione dello specchio.

L'asimmetricità di α rispetto a β nella formula fa si che il cammino ottico non sia più invertibile: un raggio incidente con angolo β non si rifletterà con angolo α.

Osservazioni

$$\frac{sin\alpha - sin\beta}{sin(\alpha+\beta)} = -\frac{v}{c}sin\varphi$$

Invertendo il verso della velocità o cambiando il segno all'angolo di inclinazione dello specchio gli angoli di incidenza e riflessione α e β si scambiano.

Quest'equazione è a tutti gli effetti conseguenza del secondo postulato della relatività.

Formula esplicita

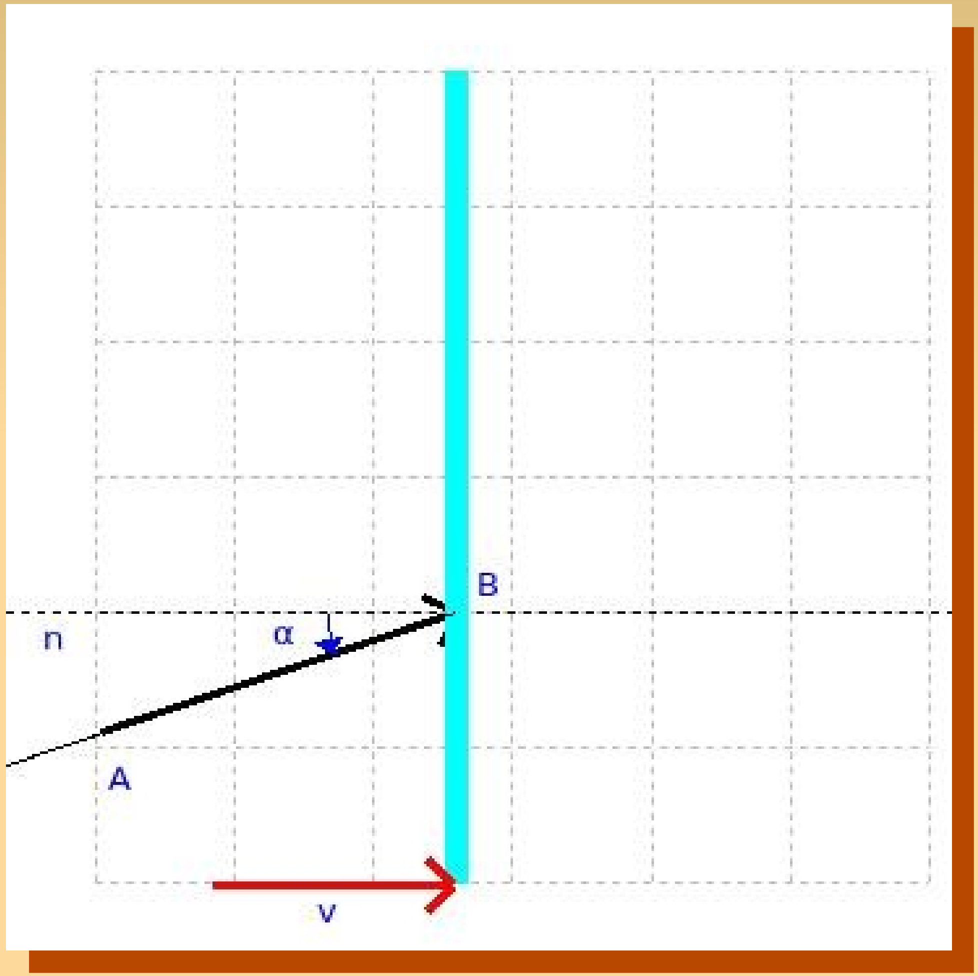
È possibile esplicitare il valore dell'angolo di riflessione in funzione di tutti gli altri parametri.

$$\cos\beta = \frac{-2\frac{v}{c}\sin\varphi + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi\right)\cos\alpha}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi}$$

La formula si semplifica se lo specchio è ortogonale alla direzione di moto: per quanto riguarda la trattazione dell'effetto Doppler verrà introdotta questa semplificazione.

$$\cos\beta = \frac{-2\frac{v}{c} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\cos\alpha}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}$$

Istante iniziale t_0



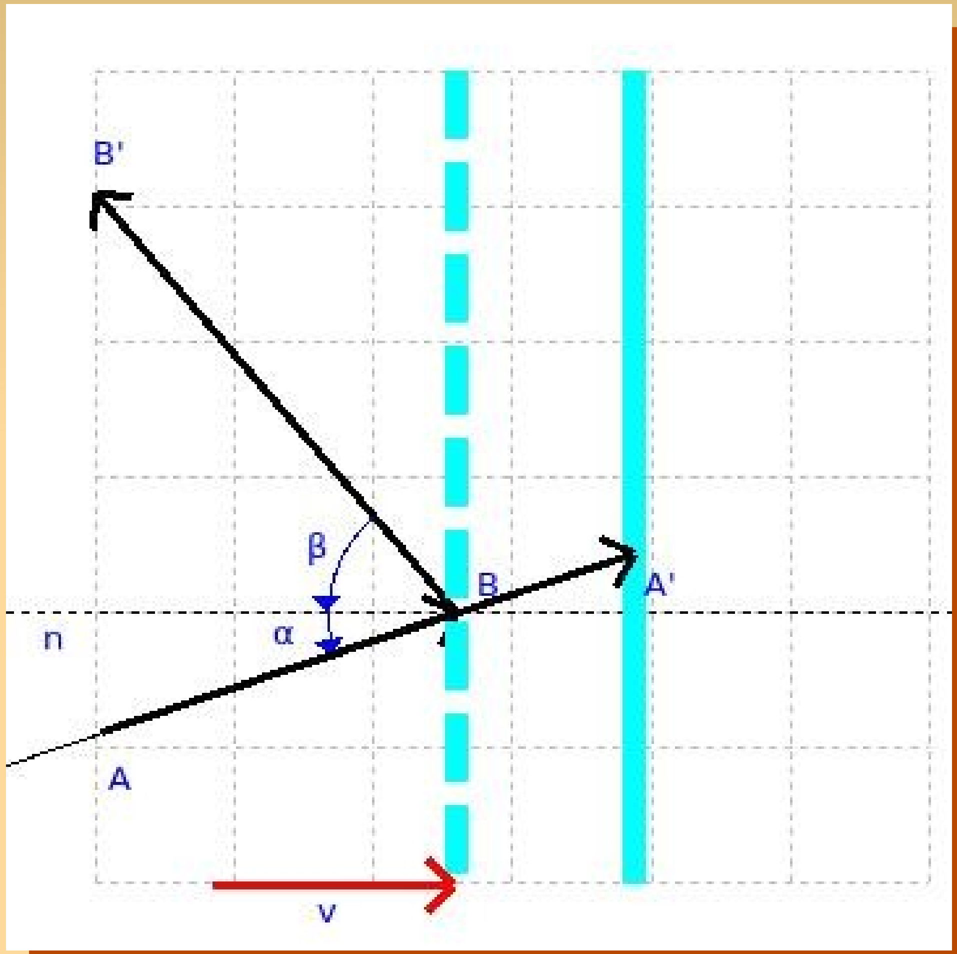
Lo specchio si muove a velocità **v** in direzione ortogonale alla sua superficie.

A e **B** sono due fronti d'onda successivi.

All'istante $\mathbf{t_0}$ il fronte d'onda **B** colpisce la superficie dello specchio.

α è l'angolo tra raggio incidente e normale alla superficie.

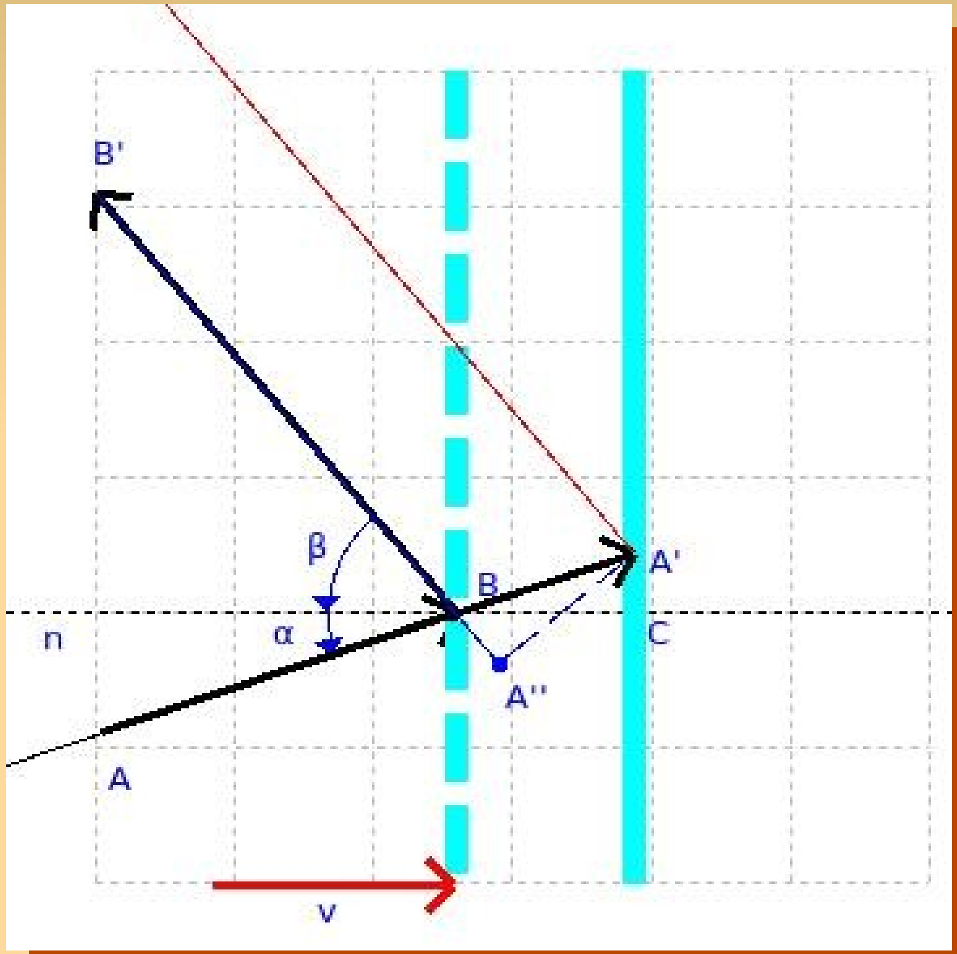
Istante t



Al tempo **t** anche il fronte d'onda **A** raggiunge la superficie dello specchio, che nol frattempo si è spostato di $\mathbf{v(t-t_0)}$.

Dall'istante $\mathbf{t_0}$ entrambi i fronti d'onda hanno percorso una distanza pari a $\mathbf{c(t-t_0)}$, poichè la velocità della luce è costante, e sono riflessi con un angolo **β** il cui rapporto con **α** è dettato dalla relazione precedentemente ricavata.

Lunghezze d'onda

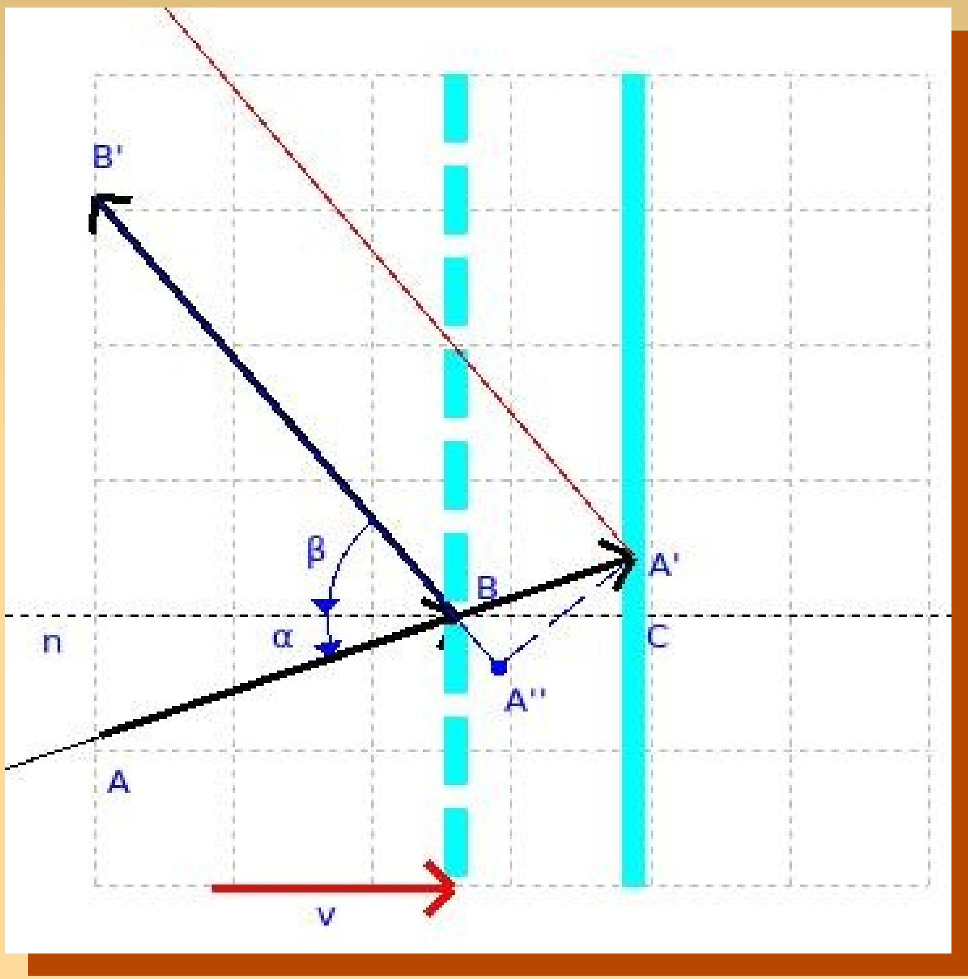


λ_0 è la lunghezza d'onda iniziale ed è pari alla distanza tra due fronti d'onda successivi, **AB**.

Dopo la riflessione del secondo fronte in **A'** la distanza tra i due piani dei fronti d'onda riflessi (ovvero la lunghezza di un segmento perpendicolare ai piani) è **A"B'**; questa è λ, lunghezza d'onda della radiazione riflessa.

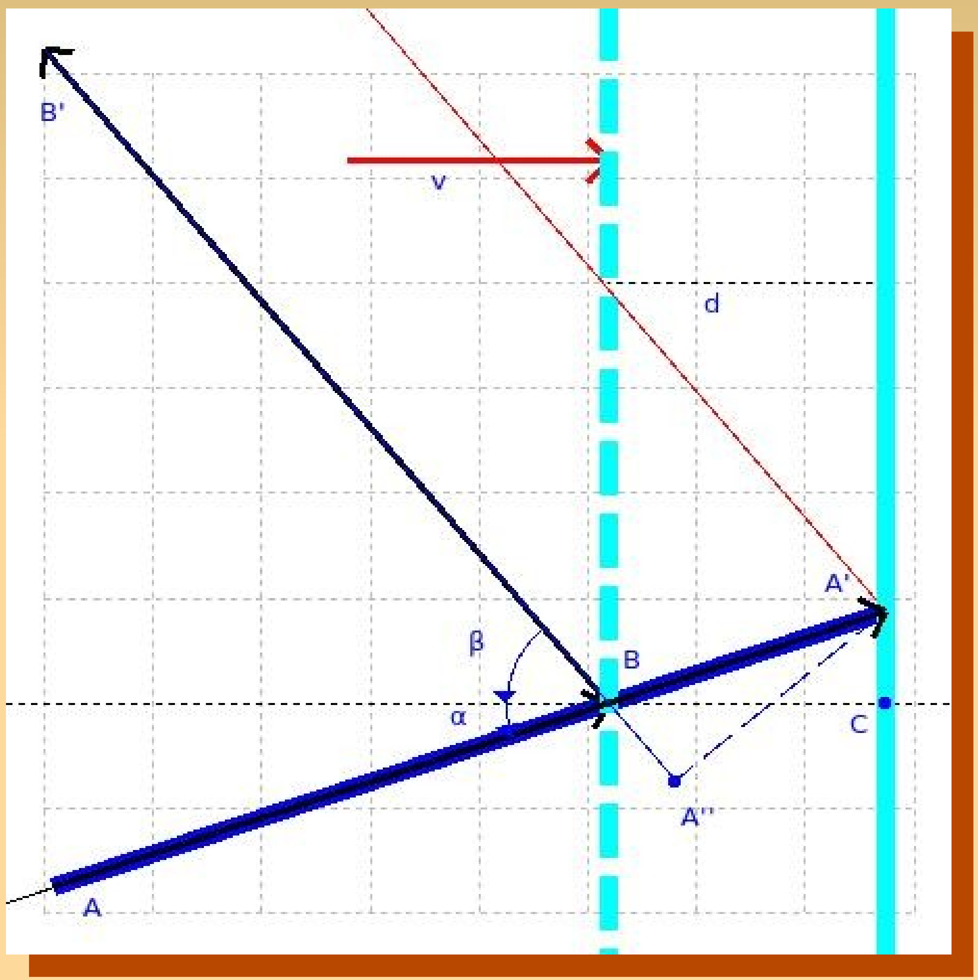
Se lo specchio si allontana dalla sorgente luminosa λ sarà superiore a λ_0.

Spostamento dei fronti d'onda



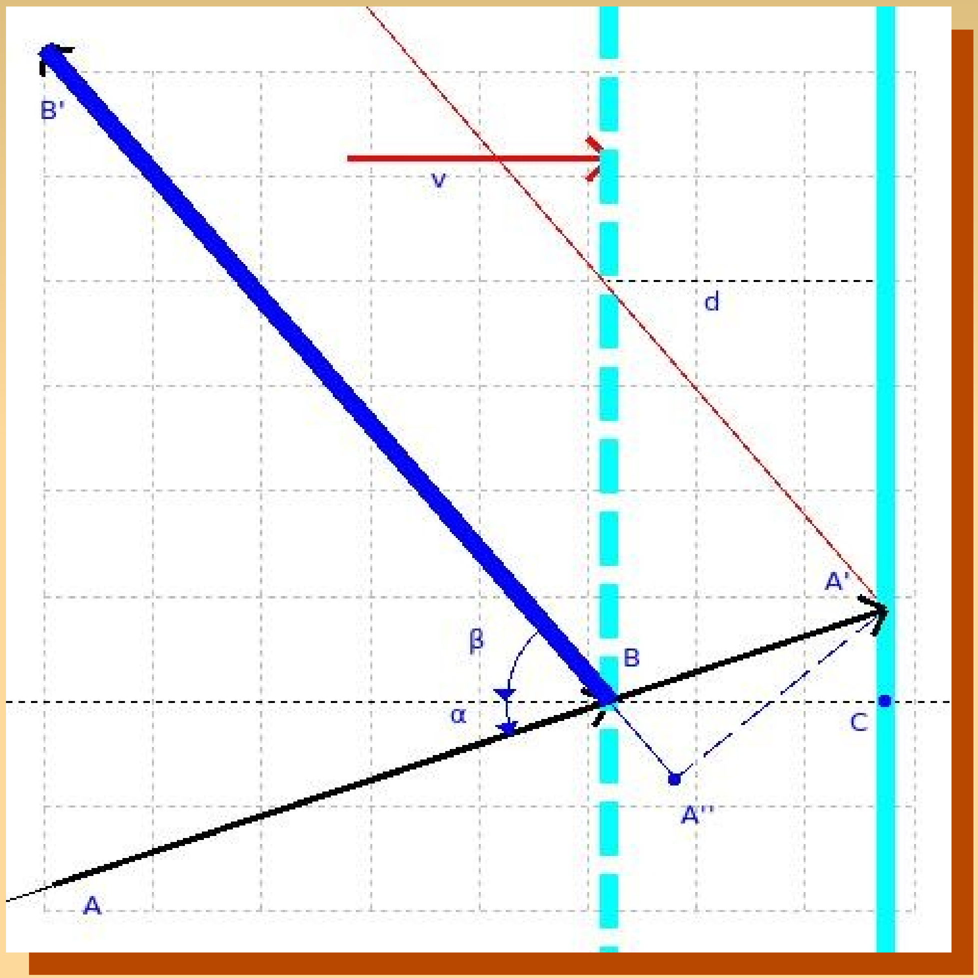
Come già osservato in precedenza, il moto dello specchio fa sì che i due fronti d'onda si muovano lungo due raggi lievemente differenti.

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ



$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ

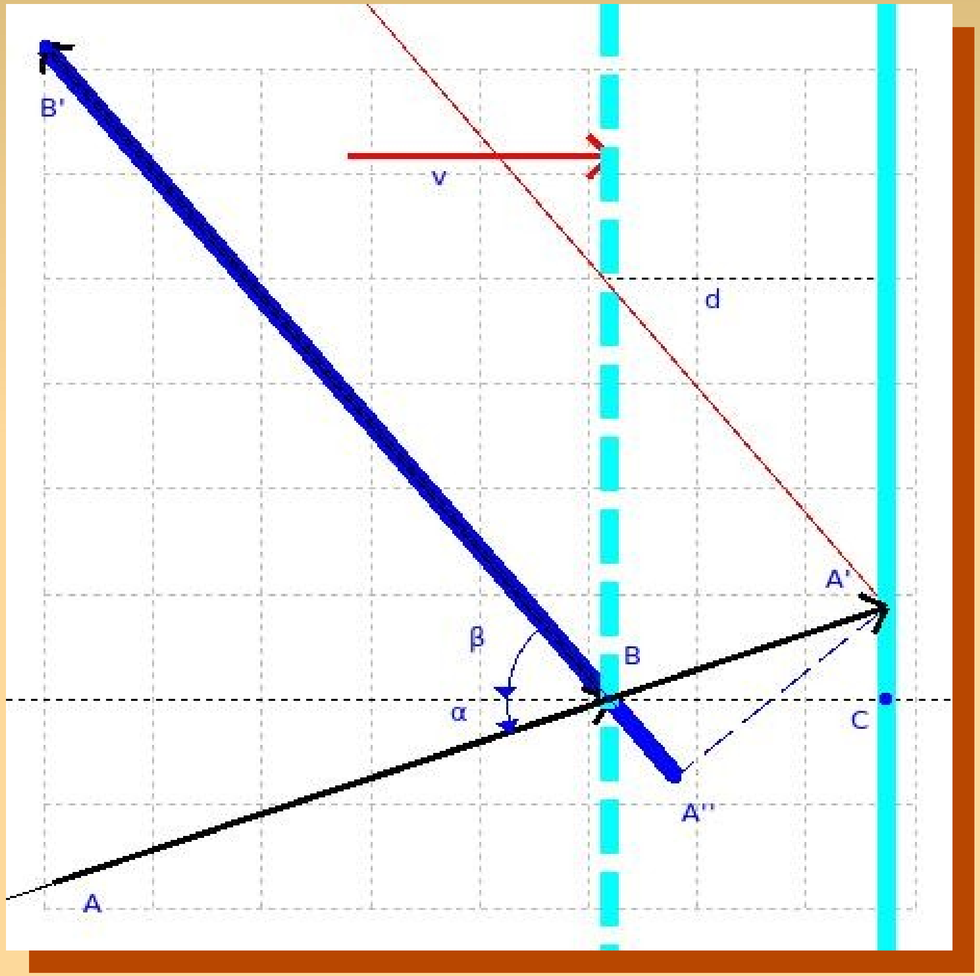


$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

c è costante

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ

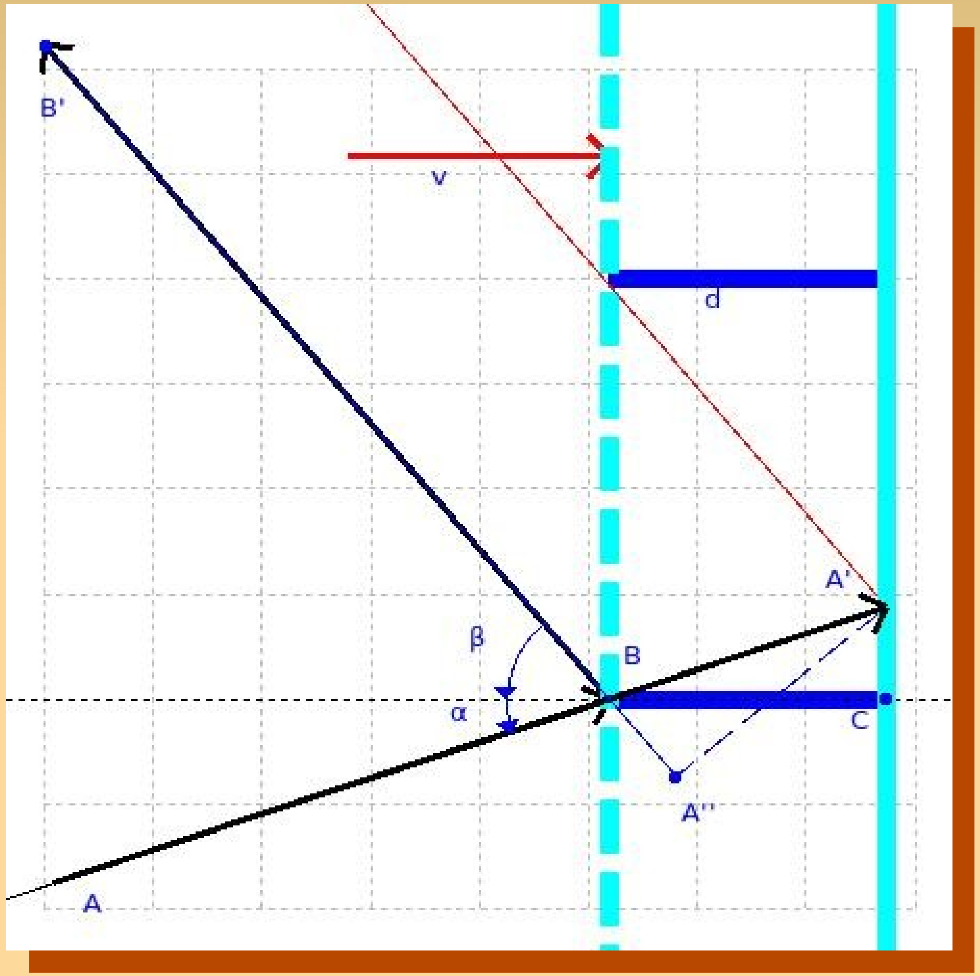


$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ



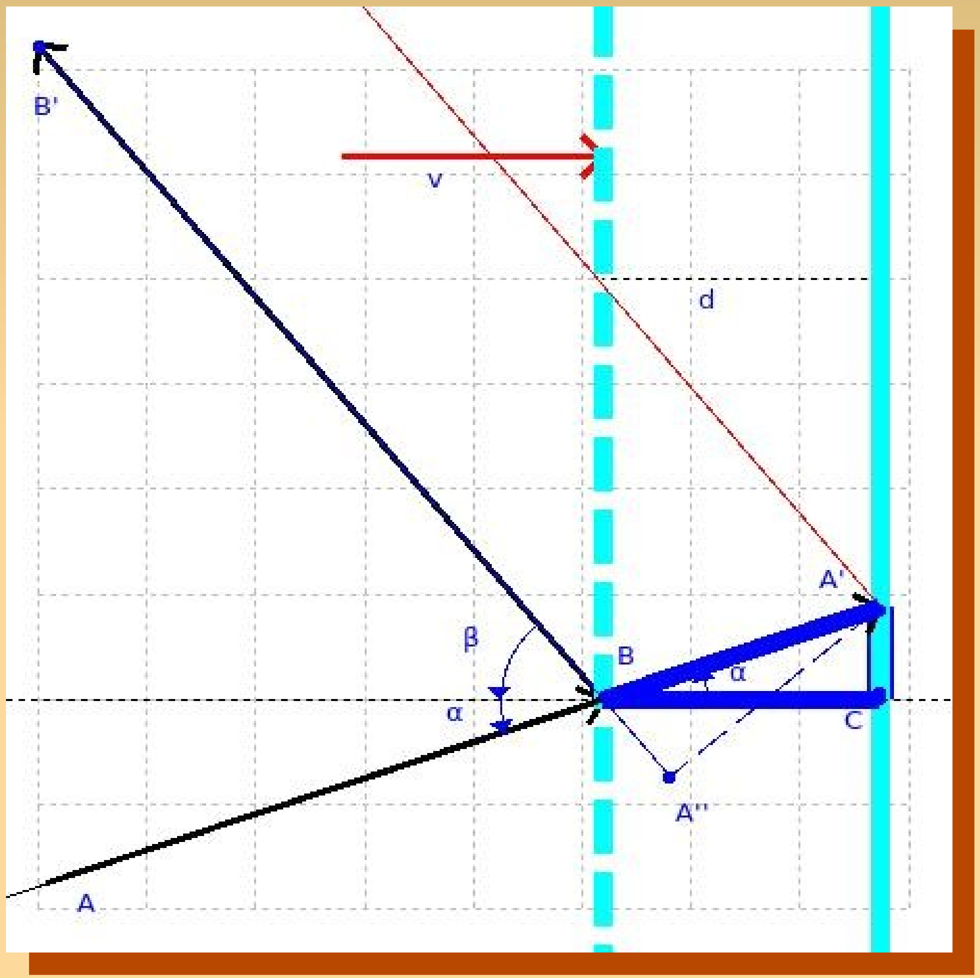
$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

$$BC = v(t - t_0)$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ



$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

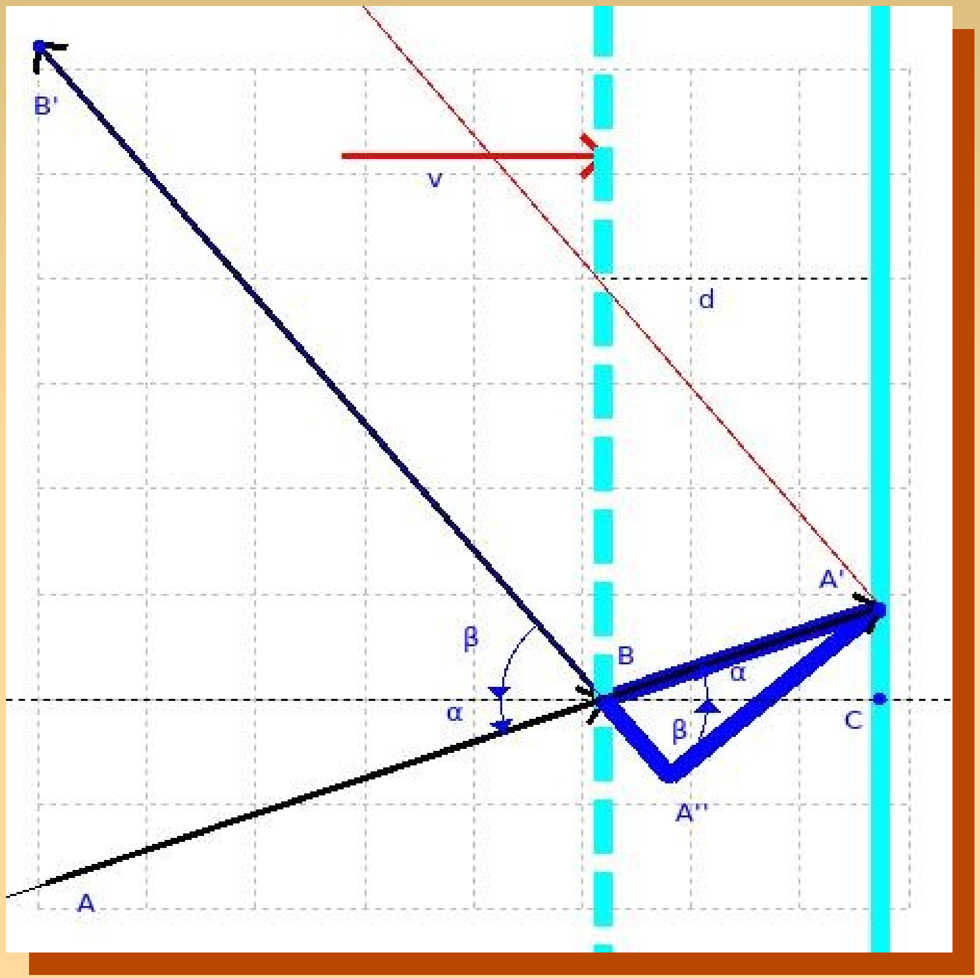
$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

$$BC = v(t - t_0)$$

$$BA' = \frac{\overline{BC}}{cos\alpha} = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha}$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ



$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

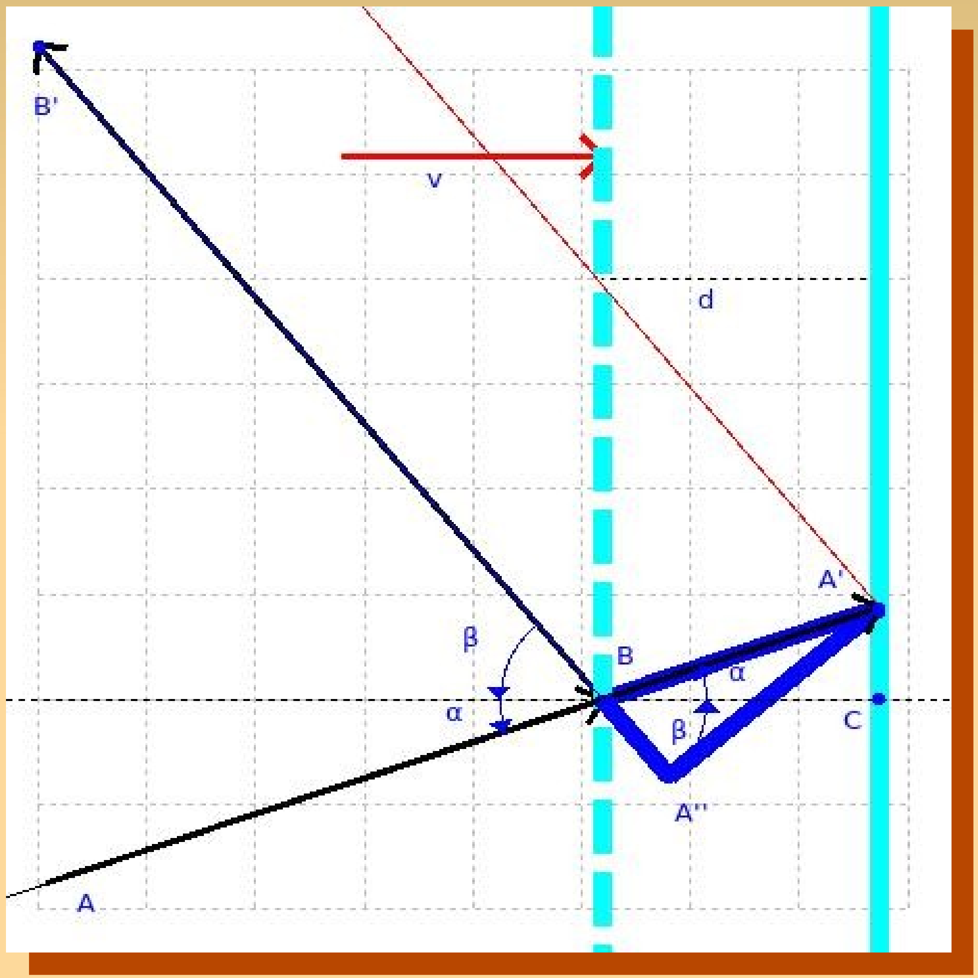
$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

$$BC = v(t - t_0)$$

$$BA' = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha}$$

$$A''B = \overline{BA'}cos(\alpha + \beta)$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ



$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

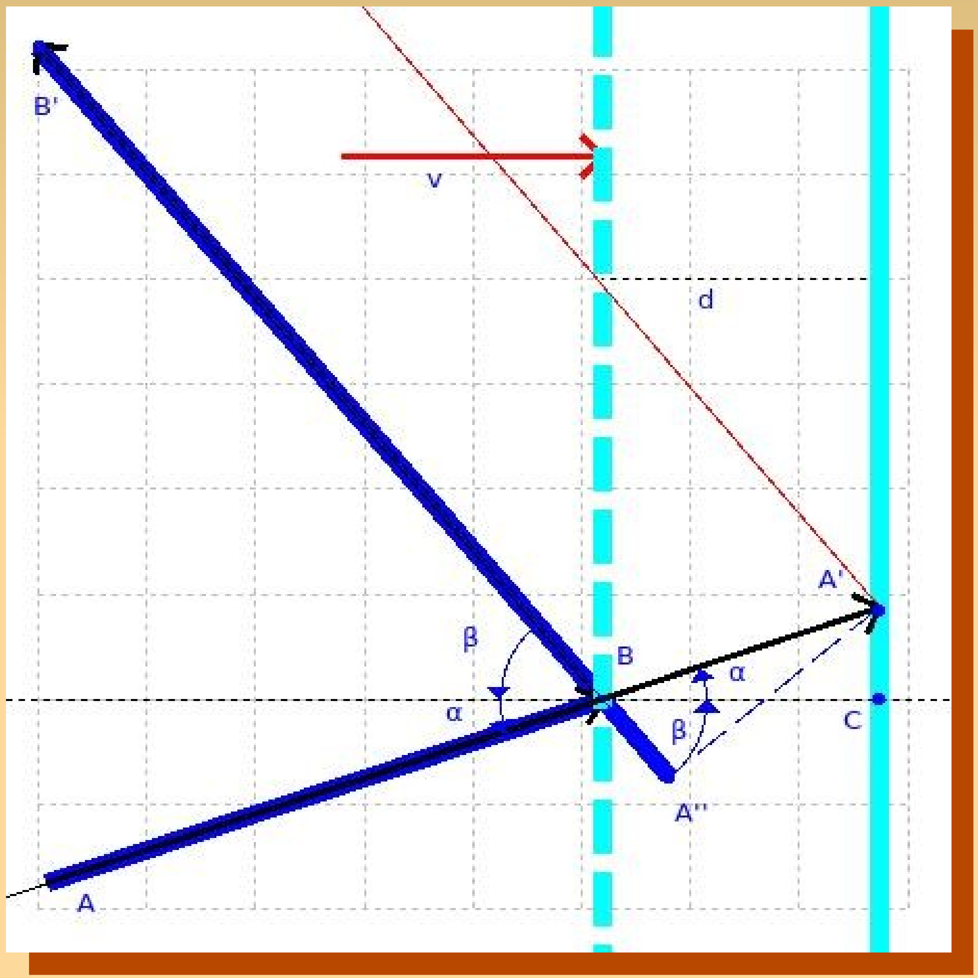
$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

$$BC = v(t - t_0)$$

$$BA' = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha}$$

$$A''B = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha} cos(\alpha + \beta)$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ



$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

$$BC = v(t - t_0)$$

$$BA' = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha}$$

$$A''B = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha} cos(\alpha + \beta)$$

$$\lambda_0 = \overline{AB} \qquad \lambda = \overline{A''B'}$$

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ

$$AA' = c(t - t_0) = \overline{AB} + \overline{BA'}$$

$$\lambda_0 = \overline{AB} \qquad BA' = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha}$$

$$A''B' = \overline{A''B} + \overline{BB'}$$

$$A''B = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha} cos(\alpha + \beta) \qquad \lambda = \overline{A''B'}$$

$$BB' = c(t - t_0) = \overline{AA'}$$

Sostituendo si ottiene

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ

$$AA' = c(t - t_0) = \lambda_0 + \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha}$$

$$(t - t_0) = \frac{\lambda_0}{c - \frac{v}{cos\alpha}}$$

$$A''B' = \lambda = \frac{v(t - t_0)}{cos\alpha} cos(\alpha + \beta) + c(t - t_0)$$

Sostituendo $(t - t_0)$ nella seconda equazione si ottiene

Calcolo della relazione tra λ_0 e λ

$$AA' = c(t-t_0) = \lambda_0 + \frac{v(t-t_0)}{cos\alpha}$$

$$(t-t_0) = \frac{\lambda_0}{c - \frac{v}{cos\alpha}}$$

$$A''B' = \lambda = \frac{v(t-t_0)}{cos\alpha}cos(\alpha+\beta) + c(t-t_0)$$

Sostituendo $(t-t_0)$ nella seconda equazione si ottiene

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{c - \frac{v}{cos\alpha}}(\frac{v}{cos\alpha}cos(\alpha+\beta) + c)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{c + v\frac{cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha}}{c - \frac{v}{cos\alpha}}$$

Riarrangiamento dell'equazione

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

$$= cos\alpha cos\beta + sin\alpha\sqrt{1 - cos^2\beta}$$

Riarrangiamento dell'equazione

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

$$= cos\alpha cos\beta + sin\alpha\sqrt{1-cos^2\beta}$$

$$cos\beta = \frac{-2\frac{v}{c}+(1+\frac{v^2}{c^2})cos\alpha}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1-cos^2\beta} = \sqrt{\frac{sin^2\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})^2}{(1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2})^2}} = \frac{sin\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

Riarrangiamento dell'equazione

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

$$= cos\alpha cos\beta + sin\alpha\sqrt{1-cos^2\beta}$$

$$cos\beta = \frac{-2\frac{v}{c}+(1+\frac{v^2}{c^2})cos\alpha}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1-cos^2\beta} = \sqrt{\frac{sin^2\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})^2}{(1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2})^2}} = \frac{sin\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\frac{-2\frac{v}{c}+(1+\frac{v^2}{c^2})cos\alpha}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}} + \frac{sin^2\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

Riarrangiamento dell'equazione

$$cos(\alpha+\beta)=\frac{-2\frac{v}{c}+(1+\frac{v^2}{c^2})cos^2\alpha+sin^2\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{c+v\frac{cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha}}{c-\frac{v}{cos\alpha}}$$

Riarrangiamento dell'equazione

$$cos(\alpha+\beta)=\frac{-2\frac{v}{c}+(1+\frac{v^2}{c^2})cos^2\alpha+sin^2\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{c+v\frac{cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha}}{c-\frac{v}{cos\alpha}}=\frac{c\cdot cos\alpha+v\cdot cos(\alpha+\beta)}{c\cdot cos\alpha-v}$$

$$=\frac{c\cdot cos\alpha+v(-2\frac{v}{c}+(1+\frac{v^2}{c^2})cos^2\alpha+sin^2\alpha(1-\frac{v^2}{c^2}))}{(c\cdot cos\alpha-v)(1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2})}$$

$$=\frac{(c\cdot cos\alpha-v)-\frac{v^2}{c^2}(c\cdot cos\alpha-v)}{(c\cdot cos\alpha-v)(1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2})}$$

Legge dell'effetto Doppler

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - 2\frac{v}{c}cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}$$

Poichè $\nu = \frac{c}{\lambda}$, espressa in termini di frequenze diventa

$$\nu = \nu_0 \frac{1 - 2\frac{v}{c}cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Questa è esattamente la stessa legge ricavata da Einstein nel suo articolo del 1905.

Ringraziamenti e Bibliografia

Grazie a

IUI per il beta-testing

Lu per un ottimo consiglio

Pò per un supporto algebrico

Benni per un orientamento informatico

Questa presentazione è scritta sulla base di due articoli di Aleksandar Gjurchinovski, *"Reflection of liht from a uniformly moving mirror"* del giugno 2004 e *"The Doppler effect from a uniformly moving mirror"* dell'aprile 2005.

Questa presentazione è un prodotto equo-solidale, fatta con il 100% di programmi open-source. Sono stati usati: Open-Office Impress, Open-Office Latex e KIG in ambiente Ubuntu.

Grazie per l'attenzione!