ESPLICITA DERIVAZIONE DELLA RELAZIONE RELATIVISTICA MASSA-ENERGIA PER UN SISTEMA COMPOSTO CON POTENZIALI INTERNI

- Di Riccardo Messina

15/06/09

L’espressione dell’equivalenza massa-energia che è qui riportata non richiede conoscenza né dell’impulso né dell’ energia di onde elettromagnetiche e nessuna considerazione di collisioni elastiche o anelastiche

Questa equivalenza é direttamente basata sulle leggi di Newton e sulle trasformazioni di Lorentz

Trasformazioni di Lorentz per un sistema in cui O e O’ hanno assi paralleli,hanno origini coincidenti per t=t’=0 e la v è parallela all’asse x

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Requisito fondamentale: esistenza di sistemi di riferimento inerziali

Sistema di riferimento inerziale: <u>sistema di riferimento nel quale un corpo non soggetto a forze si muove di moto uniforme</u>

Però c’è la difficoltà in principio di stabilire quale sia un sistema di riferimento inerziale, per farlo bisognerebbe conoscere TUTTE le forze

L’equivalenza massa-energia probabilmente è la formula più famosa del ventesimo secolo. La semplicità di E=mc2 è riconosciuta anche dai non fisici ed è di fatto un marchio della fisica moderna

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - mc^2$$

Molti testi falliscono nell'esplicitare una sua derivazione o utilizzano la scorciatoia di :

Però bisogna tenere in conto che c’è differenza tra l’energia totale relativistica e l’energia totale a riposo, nell’espressione precedente mc2 rappresenta l’energia a riposo

Questa distinzione tra masse è piuttosto confusa e non prova nulla perché il modo in cui l’espressione dell’energia cinetica viene suddivisa in velocità-dipendente e velocità-indipendente è arbitrario

Un approccio alla Einstein coinvolgerà alcune preliminari conoscenze sull' impulso e sull' energia dei campi elettromagnetici.

Un approccio di questo tipo dimostra che c’è una variazione di massa dovuta all’emissione o all’ assorbimento di un impulso elettromagnetico da parte di un corpo massivo

Però dall’ affermazione di Einstein: “*The fact that the energy withdrawn from the body becomes energy of radiation evidently makes no differences*”

Non viene messa in luce la variazione di massa

“il fatto che l’energia racchiusa in un corpo diventi energia di radiazione non fa differenza”

Lui intende che tutte le forme di energia sono equivalenti o comunque possono, reversibilmente e con un 100 % di efficienza, essere trasformate in un impulso elettromagnetico libero

Perché non assume che solo i portatori di impulso elettromagnetico hanno massa invariante???

Ironicamente la fissione nucleare non rilascia esclusivamente radiazioni elettromagnetiche

Questo problema è molto discusso in relazione all'energia potenziale, forse è il motivo per cui molti testi utilizzano collisioni elastiche o anelastiche tra due particelle in diversi SRI o invocano proprietà di di simmetria per spiegare la relazione E-m

Quest'articolo tratta anche una semplice derivazione dell'impulso relativistico partendo dall'equazione (1):

$$P = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

(2)

Anche la derivazione dell’ impulso è basata sulle leggi di Newton e sulle trasformazioni di Lorentz

Dalle leggi di Newton sappiamo che l’impulso di una particella è dato da

$$dP / dt = F$$

Se la F è costante e ci poniamo in un sistema di riferimento XYZ con origine in O e con la particella a riposo al tempo t=0 troviamo

$$P = Ft$$

L'impulso è proporzionale alla massa inerziale della particella ed è funzione della sua velocità

$$P = m\, f(u)$$

Da qui segue che

$$f(u) = P/m = F\,t/m$$

Ora consideriamo un’accelerazione non relativistica a’= F’/m e in ogni istante poniamoci in un sistema di riferimentoX’Y’Z’ che si muove relativamente a XYZ con velocità pari a quella istantanea della particella

Dato che la forza è costante segue che $u//F//F'$ e si assume che

$$F = g(u)F'$$

dove $g(u)$ è funzione della velocità della particella

Per esempio prendiamo la forza di Lorentz tra una particella carica che si muove verso una superficie uniforme di carica

Data la simmetria del problema c’è una componente non nulla del campo che è normale al piano di carica e parallela alla velocità della carica di prova

Quindi la forza è puramente elettrostatica ed è indipendente dalla distanza della particella e dalla velocità di essa

Questo perché non c’è contrazione di Lorentz in direzione perpendicolare alla velocità della particella e quindi non c’è variazione di carica nella superficie carica

Da qui si ottiene che

$$F' = F$$

e conseguentemente

$$P = m\,f(u) = ma't$$

Poniamo la particella a riposo all’istante t’ nel sistema X’Y’Z’. A istanti successivi possiamo prendere infiniti sistemi di riferimento per pareggiare la velocità della particella accelerata

Però per infiniti istanti di tempo dt’
la legge di Newton ci dice che la velocità in X’Y’Z’ va da zero a a’dt’

In XYZ la variazione di velocità può essere ottenuta con le trasformazioni delle velocità di Lorentz

Trasformazioni delle velocità di Lorentz

$$u'_x = \frac{u_x + u}{1 + u_x u/c^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 + u_x u/c^2)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 + u_x u/c^2)}$$

Dato che F è parallela a v li possiamo trattare come scalari e la variazione di velocità è data da:

$$du = \frac{u + a'dt'}{1 + \frac{ua'dt'}{c^2}} - u \approx a'dt'\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

Usando la formula di dilatazione del tempo $dt = \gamma dt'$ calcoliamo questa variazione di velocità come:

$$du = a'\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} dt$$

Integrando quest’equazione otteniamo:

$$a't = u\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Quindi

$$f(u) = \boldsymbol{u}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

seguendo dalla (2)

L'energia cinetica può essere ottenuta usando la definizione di energia come lavoro compiuto da una forza esterna per spostare una particella dalla posizione 1 alla posizione 2:

$$\varepsilon_{cin} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP}{dt} = \int_0^{P_2} u dP$$

Consideriamo una scatola piena di particelle non interagenti tutte con uguale massa (gas ideale). In riferimento a O’ dove la scatola è a riposo le velocità sono date dai vettori:

$$v'_i = \left(v'_{i,x}; v'_{i,y}; v'_{i,z}\right) \; i = 1 \dots . N$$

Possiamo anche scegliere un riferimento in O relativo al moto della scatola lungo l’asse x con velocità u

v_i

Ora le velocità delle particelle sono descritte da (i=1…N) e possiamo scrivere il loro impulso totale come:

$$P = \sum_{i=1}^{N} \frac{m v_i}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}}$$

Utilizzando le trasformazioni relativistiche delle velocità otteniamo la componente x dell'impulso totale:

$$\boldsymbol{P}_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\dfrac{v'_{i,x} + u}{1 + v'_{i,x}\,u/c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\left(v'_{i,x} + u\right)^2 + \left(v'^2_{i,y} + v'^2_{i,z}\right)\left(1 - u^2/c^2\right)}{c^2\left(1 + v'_{i,x}\,u/c^2\right)^2}}}$$

Con semplice algebra possiamo riscrivere

$$P_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\left(v'_{i,x} + u\right)}{\sqrt{\left(1 - u^2/c^2\right)\left(1 - v'^2_i/c^2\right)}}$$

$$v_i^2 = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2$$

(7)

Dato che le particelle si muovono caoticamente la sommatoria dell'espressione di prima include termini uguali e opposti quindi:

$$P_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{mu}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v_i'^2/c^2)}}$$

Possiamo fare simili considerazioni per P lungo gli assi Y e Z ottenendo

$$P_y = P_z = 0$$

che seguono la simmetria del problema

Sotto un altro aspetto, considerando la scatola con le particelle come un unico oggetto ci aspettiamo la solita espressione 2 con la misteriosa massa relativistica

Uguagliando l’equazione (2) con la (8) e sostituendo m con M otteniamo:

$$M = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{\sqrt{1 - v'^2_i / c^2}} = \sum_{i=1}^{N} \left(m + \frac{\varepsilon_{cin,i}}{c^2} \right)$$

dove $\varepsilon_{cin,i}$ è l’energia cinetica della i-esima particella

Si arriva a dire che la massa a riposo della scatola con dentro le particelle che si muovono è uguale alla massa a riposo delle particelle più la totale energia cinetica delle particelle divisa per c2

Noto ciò, anche se metà parte della 9 può essere vista come una sommatoria di masse relativistiche di un gas, il concetto di massa relativistica può essere fuorviante e non sarà usato nella derivazione

Per trattare l’energia potenziale iniziamo considerando due particelle legate da una molla compressa e prendiamo la massa della molla = 0

Quando la molla viene rilasciata, nel sistema di riferimento O' le particelle inizieranno a muoversi con velocità opposte in direzione ma uguali in modulo(questo è un meccanismo che descrive un sistema instabile)

Quando la molla si scarica completamente le due particelle non interagiscono più e possiamo trattarle come un gas ideale (come abbiamo fatto prima)

Perciò l’impulso totale delle due particelle libere è dato dalla 8 con N=2 dove v1 e v2 sono le velocità con la molla scarica

Allora per un sistema legato va bene la 9 se si intende che ε_1 ε_2 e sono le energie cinetiche delle particelle dopo che l'energia potenziale della molla si è trasformata in energia cinetica delle particelle

Quindi l’en.cin. Tot della 9 può essere sostituita da un potenziale immagazzinato dal sistema legato prendendo potenziale=0 quando le particelle sono a grande distanza

Guardandoci indietro si vede chiaramente che la meccanica relativistica deriva dalla meccanica newtoniana, dalle trasformazioni di Lorentz e dall’assunzione che esistano forze invarianti