ENERGIA E MASSA IN AMBITO RELATIVISTICO

L. Mino

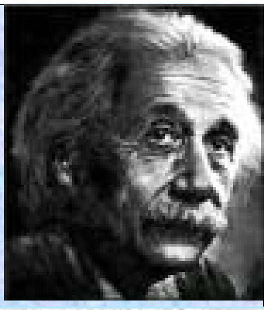
Sommario

- Introduzione sui concetti di massa ed energia in RR

- Rapporto tra massa inerziale e gravitazionale

- Illustrazione di due esempi riguardanti il cambiamento di massa di un sistema di due cariche dovuto all'energia potenziale elettrostatica

Energia e massa in RR



- Equivalenza dei concetti di energia e massa:

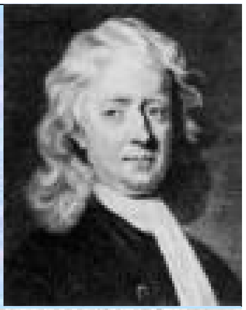
$$E = mc^2$$

la massa di un sistema è una misura del suo contenuto energetico

- Attribuzione di un'inerzia ad ogni forma di energia (pre-relativisticamente era una proprietà delle sole masse)

- La massa complessiva di un sistema è, in generale, diversa dalla somma delle masse dei suoi componenti isolati

Massa inerziale e gravitazionale I



Il termine massa si riferisce a due quantità:

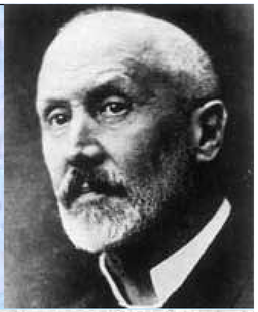
- la massa inerziale, che esprime la resistenza al cambiamento dello stato di moto di un corpo quando viene applicata una forza:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- la massa gravitazionale, che esprime l'attrazione che un corpo esercita sugli altri corpi:

$$|F| = \frac{GM_A M_B}{|r_{AB}|^2}$$

Massa inerziale e gravitazionale II



Concettualmente distinte, ma sperimentalmente provate equivalenti:

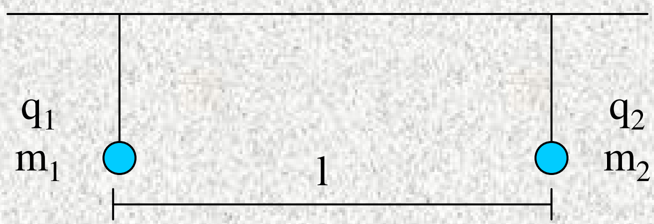
- Galileo attraverso la caduta dei gravi: $a = \frac{M}{m} g$

- Il barone Lorand von Eotvos nel 1909 con una bilancia gravitazionale con una precisione di 10^{-6} (esperimenti successivi hanno raggiunto 10^{-12})

L'equivalenza tra le due definizioni di massa è derivabile anche a partire dal principio di equivalenza enunciato da Einstein.

Coppia di cariche in un campo gravitazionale

Sistema di due cariche puntiformi sospese con due fili di uguale lunghezza in un campo gravitazionale debole:



Trascurando la reciproca interazione tra le cariche, la somma delle forze necessarie ad equilibrare il campo gravitazionale risulta essere:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\, g\hat{i}$$

Trattazione relativistica

Quando si considera l'interazione tra le particelle l'energia potenziale elettrostatica modifica la massa a riposo del sistema:

$$M = m_1 + m_2 + \frac{q_1 q_2}{lc^2}$$

E' quindi necessaria una forza esterna addizionale per bilanciare l'aumento di massa dovuto all'energia potenziale elettrostatica:

$$\Delta\vec{F}_{tot} = \left(\frac{q_1 q_2}{lc^2}\right) g\hat{i}$$

Analisi delle forze nel sistema

Considerando l'equilibrio delle forze agenti su q_1:

$$\vec{F}_1 + \Delta\vec{F}_1 + q_1\vec{E}_2 + m_1 g(-\hat{i}) = 0$$

Deduciamo che: $\Delta\vec{F}_1 = -q_1\vec{E}_2$

Procedendo analogamente per q_2 e sommando:

$$\Delta\vec{F}_{tot} = -q_1\vec{E}_2 - q_2\vec{E}_1$$

Dal confronto con il risultato relativistico abbiamo:

$$\left(\frac{q_1 q_2}{lc^2}\right) g\hat{i} = -q_1\vec{E}_2 - q_2\vec{E}_1$$

E in un campo gravitazionale I

Affinché l'uguaglianza precedente sia verificata sono necessarie componenti verticali della forza dovuta al campo elettrico ⇒ considero la distorsione del campo coulombiano causata dal campo gravitazionale.

Principio di equivalenza ⇒ il campo di una carica in un campo gravitazionale g è equivalente a quello generato da una carica istantaneamente a riposo che subisce un'accelerazione -g verso l'alto.

Coordinate della particella:

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

E in un campo gravitazionale II

Espressione generale per i campi elettromagnetici:

$$\vec{E} = e\left(\frac{(\hat{n}-\beta)(1-\beta^2)}{(1-\hat{n}\cdot\beta)^3 R^2}\right)_{ret} + \frac{e}{c}\left(\frac{\hat{n}\times\left[(\hat{n}-\beta)\times\dot{\beta}\right]}{(1-\hat{n}\cdot\beta)^3 R}\right)_{ret}$$

$$\vec{B} = \hat{n}_{ret}\times\vec{E}$$

Il tempo ritardato t_{ret} è tale che un segnale luminoso emesso dalla particella raggiunge il punto campo (x,y,0) a t = 0.

Calcolo del tempo ritardato

Ponendo $\Delta t = 0 - t_{ret}$ abbiamo:

$$c^2(\Delta t)^2 = \left[x - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2\right]^2 + y^2$$

Effettuando un'espansione in serie in g, considerandolo un numero piccolo, troviamo per il primo ordine:

$$\Delta t = \left[\frac{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{c}\right]\left(1 - \frac{xg}{2c^2}\right)$$

Valore di E in un campo gravitazionale I

Ora è possibile calcolare $\hat{n}, \beta, \dot{\beta}, R$ al tempo ritardato:

$$\hat{n} = \hat{i}\,\frac{\left[x - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2\right]}{c\Delta t} + \hat{j}\,\frac{y}{c\Delta t}$$

$$\beta = \frac{-g\Delta t}{c}\hat{i} \qquad \dot{\beta} = \frac{g}{c}\hat{i} \qquad R = c\Delta t$$

Sostituendo troviamo l'espressione di E:

$$\vec{E}(x, y, 0, t) = \frac{e}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\hat{i}\left(x - \frac{x^2 g}{c^2} - \frac{y^2 g}{2c^2}\right) + \hat{j}\left(y - \frac{xyg}{2c^2}\right)\right]$$

Valore di E in un campo gravitazionale II

Inserendo i dati relativi al nostro problema di due cariche puntiformi q_1 e q_2 a distanza l otteniamo:

$$q_1\vec{E}_2 = \left(\frac{q_1 q_2}{l^2}\right)\left[\hat{i}\left(\frac{-l^2 g}{2c^2}\right) + \hat{j}l\right]$$

$$q_2\vec{E}_1 = \left(\frac{q_2 q_1}{l^2}\right)\left[\hat{i}\left(\frac{-l^2 g}{2c^2}\right) + \hat{j}(-l)\right]$$

Rappresentazione grafica di E

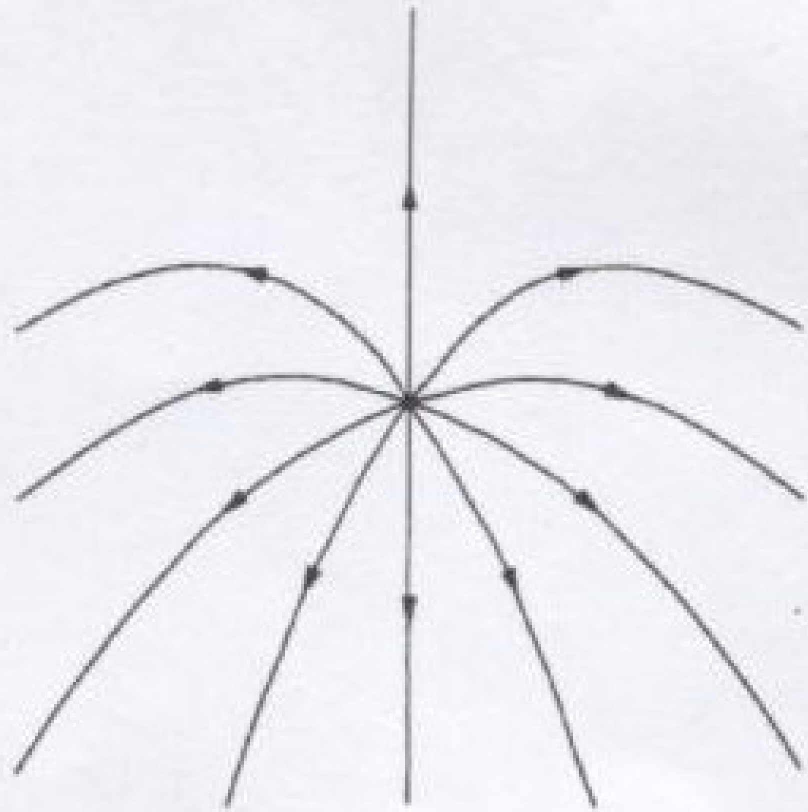


Fig. 1. Electric field of a point charge supported at rest against a weak downwards gravitational field.

Calcolo della forza addizionale

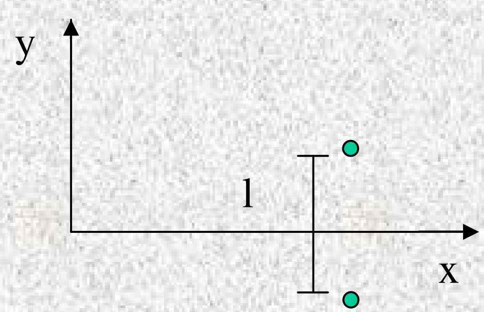
Come appare anche dalla figura il campo generato da una carica è tale da spingere l'altra carica verso il basso ⇒ per bilanciare questo effetto è necessaria una forza esterna addizionale:

$$\Delta\vec{F}_{ext} = -q_1\vec{E}_2 - q_2\vec{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{lc^2}\, g\hat{i}$$

Relativisticamente questo risultato viene interpretato come un cambiamento di massa gravitazionale dovuto all'energia potenziale elettrostatica.

Coppia di cariche accelerate

Sistema di due cariche puntiformi mantenute ferme da due forze F_1 e F_2



Accelerate con a piccola affinché la radiazione emessa sia trascurabile ⇒ forza totale necessaria trascurando l'interazione tra le particelle:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \hat{i}(m_1 + m_2)\gamma^3 a$$

Trattazione relativistica

Se si considera l'energia potenziale elettrostatica la massa a riposo del sistema cambia ⇒ bisogna considerare un contributo addizionale alla forza:

$$\Delta M = \frac{q_1 q_2}{l c^2} \qquad \Delta \vec{F}_{tot} = \hat{i}\,\frac{q_1 q_2}{l c^2}\,\gamma^3 a$$

Trattando il sistema nell'ambito dell'elettromagnetismo classico e analizzando tutte le forze agenti, otteniamo:

$$\Delta \vec{F}_{tot} = -\vec{F}_{em1} - \vec{F}_{em2}$$

Calcolo di E - I

Per verificare che il risultato classico sia consistente con quello relativistico è necessario calcolare E:

$$\vec{E} = e\left(\frac{(\hat{n}-\beta)(1-\beta^2)}{(1-\hat{n}\cdot\beta)^3 R^2}\right)_{ret} + \frac{e}{c}\left(\frac{\hat{n}\times\left[(\hat{n}-\beta)\times\dot{\beta}\right]}{(1-\hat{n}\cdot\beta)^3 R}\right)_{ret}$$

Occorre quindi un'espressione per il tempo ritardato:

$$\left[c(t-t_{ret})\right]^2 = l^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}at_{ret}{}^2\right)^2$$

Calcolo di E - II

Da cui si ricava, arrestandosi al primo ordine in a:

$$t_{ret} = t - l\left(c^2 - v^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a v l^2 \left(c^2 - v^2\right)^{-2}$$

Dopo aver calcolato $\hat{n}, \beta, \dot{\beta}, R$ al tempo ritardato, si può ottenere la componente lungo x di E_1:

$$E_{x1} = -\frac{q_2 a}{2c^2 l\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Calcolo della forza addizionale

La forza elettromagnetica agente su q_1 lungo x sarà:

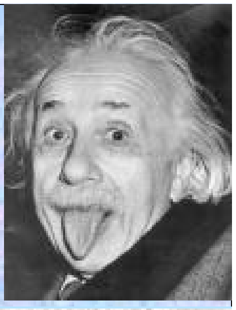
$$\vec{F}_{em1x} = q_1 \vec{E}_{x1}$$

Dato che la forza su q_2 sarà uguale per simmetria, ottengo:

$$\Delta\vec{F}_{tot} = -\vec{F}_{em1} - \vec{F}_{em2} = \hat{i}\,\frac{q_1 q_2}{lc^2}\gamma^3 a$$

Risultato che coincide con quello ricavato dall'equivalenza relativistica massa-energia.

Conclusioni



Nei due esempi illustrati in precedenza l'effetto dell'energia potenziale elettrostatica sul sistema è stato trattato sia classicamente sia relativisticamente in modo consistente

emerge chiaramente come le idee relativistiche di energia e massa siano nate, all'inizio del secolo scorso, a partire da concetti già insiti nell'elettromagnetismo classico.