

# Il teorema di estinzione di Ewald-Oseen e la lunghezza di estinzione

Università degli Studi di Torino  
C.d.L. in Scienza dei Materiali  
Corso di Onde, Radiazione e Relatività  
A.A. 2009/2010

Elena Morra

## Dall'articolo:

“The Ewald–Oseen extinction theorem and extinction lengths”

- ◉ Vincent C. Ballenegger

*Institut de Physique Théorique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland*

- ◉ T. A. Weber

*Department of Physics and Astronomy, Iowa State University, Ames, Iowa*

American Journal of Physics, 67 (7), July 1999

# Argomenti trattati

- ◉ Dimostrazione elementare del teorema di estinzione per le onde elettromagnetiche in un mezzo materiale
- ◉ Soluzione dell'equazione delle onde come equazione integrale
- ◉ Propagazione della radiazione in un mezzo rarefatto a distribuzione casuale
- ◉ Significato e interpretazioni delle lunghezze di estinzione

# Introduzione

Il campo elettromagnetico macroscopico in un mezzo è dato dalla sovrapposizione dell'onda incidente e della radiazione degli atomi oscillanti



La velocità della luce nel mezzo è  $v = c/n$  dove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo

Il teorema di Ewald-Oseen dimostra questa interferenza delle due componenti:

All'interno di un dielettrico la radiazione degli atomi cancella esattamente il campo elettromagnetico dell'onda incidente e la rimpiazza con un campo che corrisponde ad un'onda a velocità  $c/n$

# Introduzione

I calcoli di Ewald-Oseen richiedono una matematica avanzata (funzioni di Green tridimensionali)

Tuttavia il teorema di estinzione riguarda campi macroscopici (che comprendono già tutti i contributi dei dipoli oscillanti)

Possiamo utilizzare semplicemente :

- L'equazione delle onde
- Il principio di sovrapposizione

Operiamo quindi in questo modo:

1. Separiamo le sorgenti che producono campo e.m.
2. Risolviamo le equazioni di Maxwell separatamente per ciascuna sorgente
3. Sovrapponiamo i campi risultanti

# Introduzione

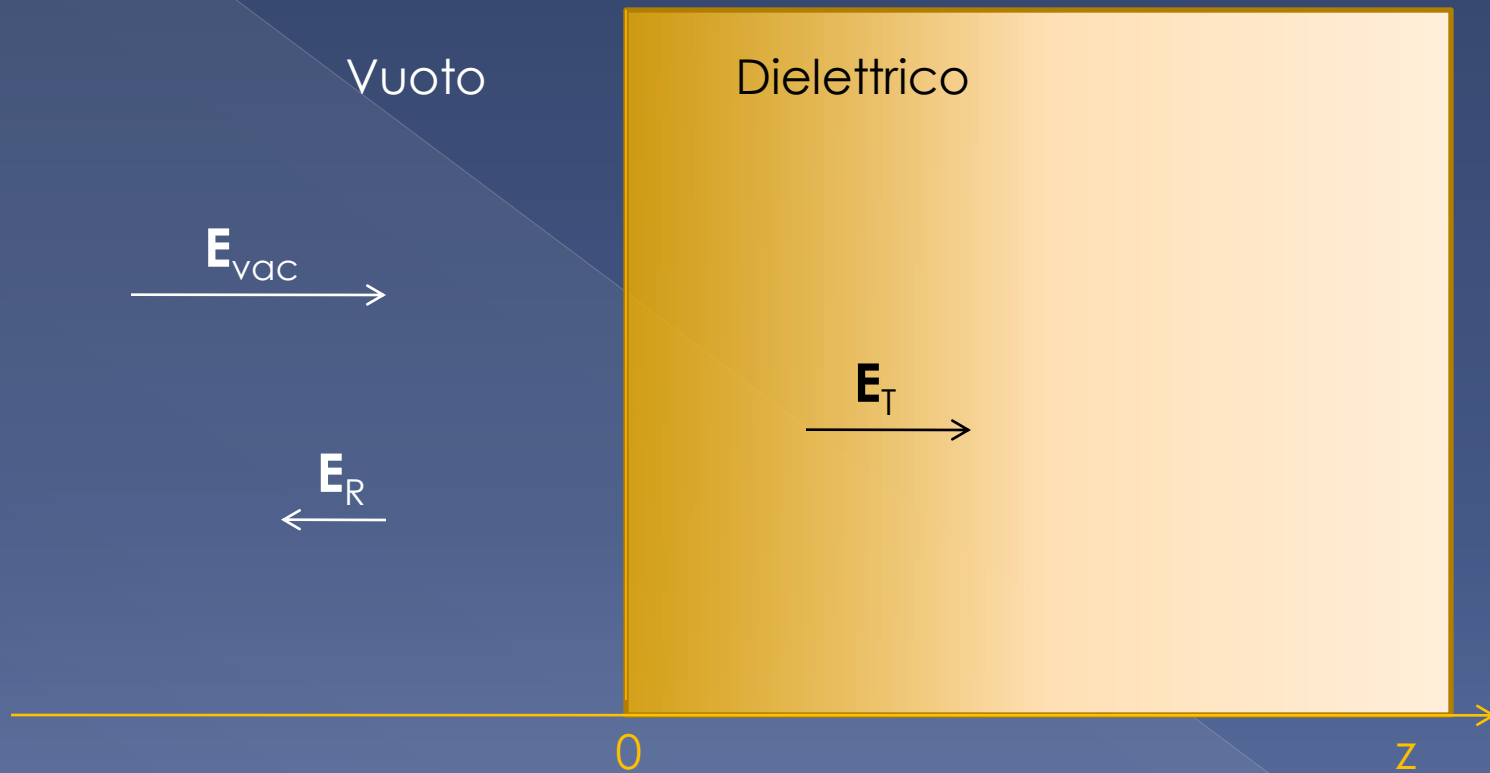
Abbiamo quindi due tipi sorgenti:

- Sorgenti esterne al mezzo, che producono l'onda incidente  
→  $\mathbf{E}_{\text{vac}}(z,t)$
- Gli atomi che costituiscono il mezzo (dipoli oscillanti)  
→  $\mathbf{E}_{\text{rad}}(z,t)$

Facciamo inoltre le seguenti assunzioni:

- Onda e.m. monocromatica
- Incidenza normale alla superficie del mezzo
- Il mezzo occupa la regione di spazio  $z \geq 0$

# Introduzione



# Introduzione

Il campo risultante nel generico punto  $z$  è

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_{\text{vac}}(z,t) + \mathbf{E}_{\text{rad}}(z,t)$$

In base al teorema di estinzione, il campo di radiazione generato all'interno del mezzo è

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(z,t) = -\mathbf{E}_{\text{vac}}(z,t) + \mathbf{E}_{\text{T}}(z,t)$$

Il campo di radiazione  $\mathbf{E}_{\text{rad}}$  annulla esattamente l'onda incidente e crea una nuova onda trasmessa  $\mathbf{E}_{\text{T}}$  che viaggia all'interno del mezzo a velocità  $c/n$

Fuori dal mezzo ( $z < 0$ ) il campo di radiazione assume la forma di un'onda che si propaga a velocità  $c$  in direzione opposta all'onda incidente, che corrisponde all'onda riflessa



# Analogia: campo all'interno di un conduttore

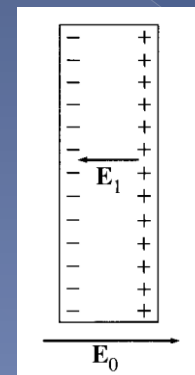
Caso di un conduttore in un campo elettrostatico uniforme

Utilizziamo lo stesso approccio, sovrapponendo i campi dovuti alle diverse sorgenti

Assumiamo che le cariche indotte sulla superficie del conduttore non disturbino la sorgente del campo esterno

Il campo elettrico in un dato punto dello spazio è la somma di:

- Campo elettrico uniforme esterno  $E_0$
- Campo prodotto dalla densità di carica superficiale indotta sul conduttore  $E_1$
- All'interno del conduttore i due campi si annullano



## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

- Onda e.m. piana monocromatica, che si propaga lungo  $z$
- Incidenza normale alla superficie del mezzo
- Mezzo in  $z \geq 0$ , uniforme, isotropo e continuo  
(lunghezza d'onda  $\gg$  separazione tra gli atomi)

Equazioni di Maxwell:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}$$

La densità di corrente  $\mathbf{J}$  comprende sia le correnti reali che le correnti di polarizzazione, e sarà sorgente dei campi di radiazione.

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Assumiamo che valga la legge di Ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

La densità di corrente  $\mathbf{J}$  può essere fuori fase rispetto ad  $\mathbf{E}$ , quindi ammettiamo che  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\sigma$  possano essere complessi (solo la parte reale ha significato fisico)

Le equazioni di Maxwell sono lineari nei campi, quindi possiamo scrivere la loro soluzione come sovrapposizione:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{vac}} + \mathbf{E}_{\text{rad}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{vac}} + \mathbf{B}_{\text{rad}}$$

dove, per i campi nel vuoto e per i campi di radiazione, abbiamo usato i due set di equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{vac}} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{vac}} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{\text{vac}} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}_{\text{vac}} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{\text{rad}} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}_{\text{rad}} &= \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

La scomposizione di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in una somma di contributi è arbitraria, ma scegliamo i campi di vuoto in modo tale che soddisfino l'equazione delle onde nel vuoto e che possano quindi essere identificati coi campi dell'onda incidente per  $z < 0$

L'onda incidente, nel vuoto, ha la forma di:

$$\mathbf{E}_{vac}(z, t) = \mathbf{E}_{vac} e^{i(kx - \omega t)}$$

con  $k = \omega/c$

Il contributo  $\mathbf{E}_{rad}$  ha origine nel mezzo, a causa della densità di corrente  $\mathbf{J}$  data dalle cariche oscillanti degli atomi (o dagli elettroni di conduzione in un conduttore)

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Dalle equazioni di Maxwell relative al rotore dei campi di radiazione otteniamo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{rad} = -\frac{\partial(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E}_{rad} / \partial t)}{\partial t}$$

Applicando la formula di Lagrange  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$

nel nostro caso abbiamo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{rad} = -\nabla^2 \mathbf{E}_{rad} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_{rad})$$

e otteniamo che il campo di radiazione soddisfa la seguente equazione delle onde disomogenea

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{rad} + \mu_0 \omega^2 (\epsilon_0 + i\sigma / \omega) \mathbf{E}_{rad} = -i\mu_0 \omega \sigma \mathbf{E}_{vac}(z)$$

in cui la parte a destra è nota

## Come si ricava l'equazione delle onde

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{rad} = -\nabla^2 \mathbf{E}_{rad} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_{rad})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0$$

Dalla prima eqz. di Maxwell

$$-\frac{\partial(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}_{rad} / \partial t)}{\partial t} = -\nabla^2 \mathbf{E}_{rad}$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{rad}}{\partial t^2} = \frac{d^2 \mathbf{E}_{rad}}{dz^2}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}_{vac} + \mathbf{E}_{rad})$$

Dal contributo del campo esterno + campo di radiazione

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$$

Dipendenza temporale

$$-i\mu_0 \omega \sigma \mathbf{E}_{vac} - i\mu_0 \omega \sigma \mathbf{E}_{rad} - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_{rad} = \frac{d^2 \mathbf{E}_{rad}}{dz^2}$$

$$-i\mu_0 \omega \sigma \mathbf{E}_{vac} - \mu_0 \omega^2 \left( \frac{i\sigma}{\omega} + \varepsilon_0 \right) \mathbf{E}_{rad} = \frac{d^2 \mathbf{E}_{rad}}{dz^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{rad} + \mu_0 \omega^2 \left( \varepsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}_{rad} = -i\mu_0 \omega \sigma \mathbf{E}_{vac}$$

Eqz. delle onde

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Una **soluzione particolare** dell'equazione è

$$\mathbf{E}^P_{rad} = -\mathbf{E}_{vac}(z)$$

Per trovare la soluzione completa occorre aggiungere la **soluzione generale** dell'equazione omogenea associata, che in questo caso è una sovrapposizione di onde piane che si propagano in tutte le direzioni

$$\left(\mathbf{E}^C_{rad}\right)_i = \int g_i(\theta, \phi) \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) d\Omega$$

dove  $\theta$  e  $\Phi$  sono gli angoli polare e azimutale di  $\mathbf{k}'$  e  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido

L'indice  $i$  indica le componenti cartesiane

Il modulo di  $\mathbf{k}'$  è dato da

$$k'^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left( 1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$$

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Abbiamo trovato la soluzione come sovrapposizione coerente di onde piane: questo è vero quando il mezzo può essere considerato continuo poiché i campi di radiazione dei vari elementi del mezzo arrivano ad un dato punto con una determinata fase che non cambia nel tempo. Questo non succede nei mezzi gassosi, a causa delle fluttuazioni.

Per simmetria, il campo è lo stesso in tutti i punti del piano  $\perp z$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{a} = 0$$

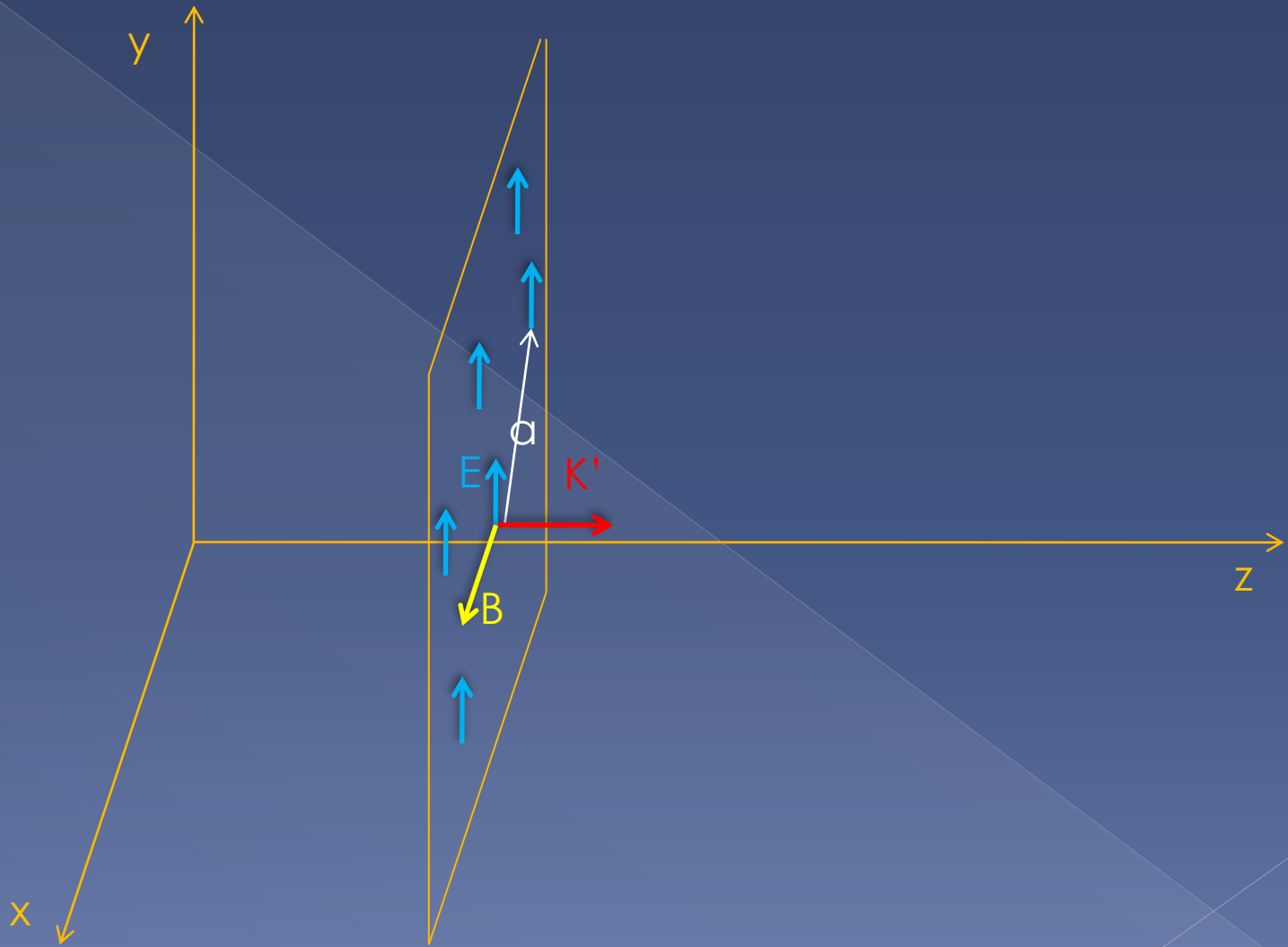
dove  $\mathbf{a}$  è lo spostamento nel piano  $xy$  perpendicolare a  $z$

Inoltre, poiché non ci sono barriere a destra, ci aspettiamo solo onde che si propagano verso destra.

La soluzione dell'equazione omogenea sarà l'onda trasmessa

$$\mathbf{E}^C_{rad} = \mathbf{E}_T \exp(ik'z)$$





## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Sommando la soluzione particolare e quella generale otteniamo la **soluzione dei campi di radiazione**

$$\mathbf{E}_{rad} = -\mathbf{E}_{vac}(z) + \mathbf{E}_T \exp(ik'z)$$

Sommando questa al campo del vuoto otteniamo il risultato finale per il **campo all'interno del mezzo**

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_T \exp(ik'z)$$

Questa dimostrazione ci mostra che il contributo del campo di radiazione cancella l'onda incidente e crea una nuova onda che viaggia alla velocità  $c/n$ , con

$$n = ck' / \omega = \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}$$

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Possiamo trovare la solita formula per l'indice di rifrazione di un dielettrico considerando la sua conducibilità come funzione della suscettibilità  $\chi_e$  elettrica

In un dielettrico omogeneo e isotropo, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  induce un momento di dipolo  $\mathbf{P}$  per unità di volume:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Quando il campo elettrico cambia, si produce una densità di corrente di polarizzazione

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Poiché la dipendenza dal tempo del campo elettrico è  $\exp[-i\omega t]$

Si ha  $\mathbf{J} = -i\varepsilon_0\omega\chi_e\mathbf{E}$

La conduttività in un dielettrico vale quindi  $\sigma = -i\varepsilon_0\omega\chi_e$

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Ricordando che:

$$n = \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}$$

L'indice di rifrazione, in termini di suscettibilità, è quindi:

$$n = \sqrt{1 + \chi_e}$$

In un conduttore,  $\sigma$  è reale e positivo quindi l'indice di rifrazione ha una parte immaginaria: l'onda trasmessa decade esponenzialmente con la distanza

## Dimostrazione elementare del teorema di estinzione

Per  $z < 0$ , quindi  $\sigma = 0$ , la soluzione dell'equazione delle onde è

$$\mathbf{E}_{rad}(z) = \mathbf{E}_R \exp(-ik'z)$$

perché abbiamo imposto che la propagazione è verso sinistra.

Le ampiezze dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa possono essere messe in relazione con l'ampiezza incidente applicando le condizioni al contorno all'interfaccia per ottenere le equazioni di Fresnel per l'incidenza normale

Da notare: se il dielettrico ha uno spessore finito, le onde all'interno del materiale si propagano non solo nel verso positivo dell'asse  $z$ , ma anche nel verso negativo.

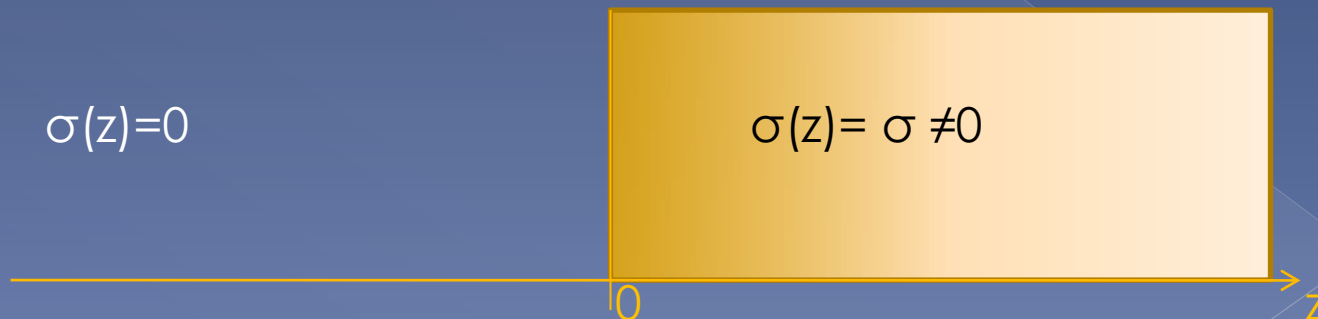
# La soluzione integrale

Possiamo confrontare il metodo elementare che abbiamo utilizzato con l'approccio tradizionale, utilizzando l'equazione integrale

Riprendiamo l'equazione delle onde generale:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \mathbf{E}(z) = -i \omega \mu_0 \sigma(z) \mathbf{E}(z)$$

- $z < 0$        $\longrightarrow$        $\sigma(z) = 0$       equazione omogenea
- $z \geq 0$        $\longrightarrow$        $\sigma(z) = \sigma$       onda trasmessa nel mezzo



# Funzione di Green

- La funzione di Green associata all'equazione d'onda è definita da:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) G(z, z') = \delta(z - z')$$

Dove:

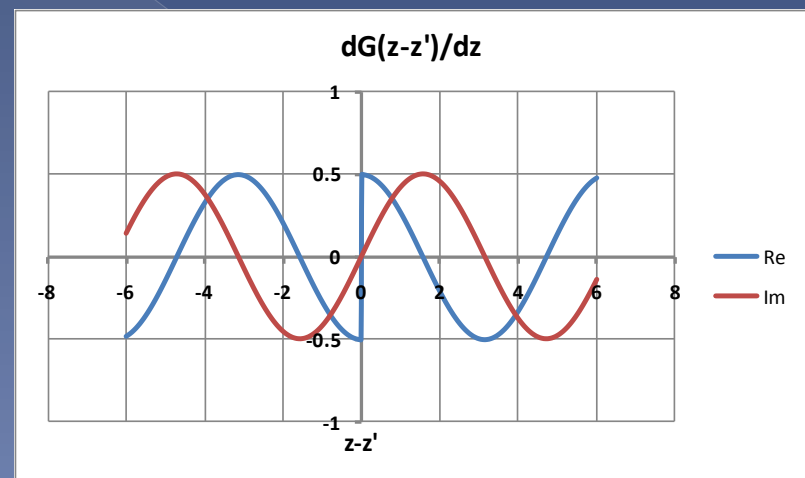
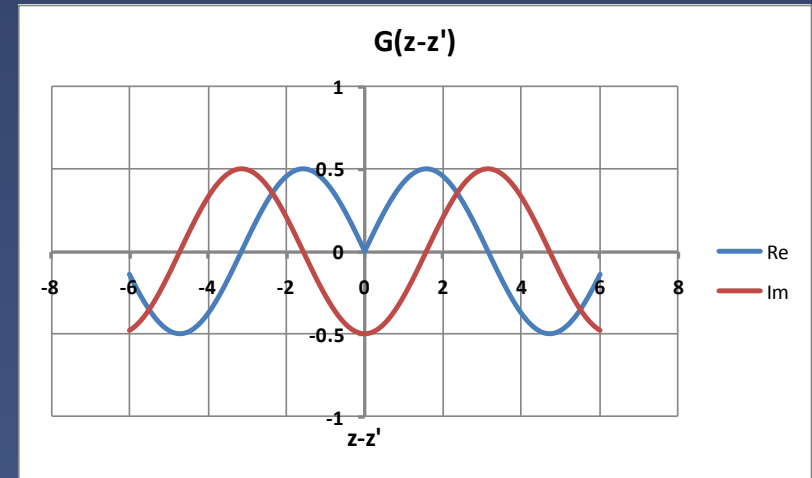
$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$$

- Una funzione che soddisfa la definizione e la condizione che la discontinuità della sua derivata prima in  $z=z'$  vale 1 è:

$$G(z, z') = \frac{1}{2ik} e^{ik|z-z'|}$$

Infatti:

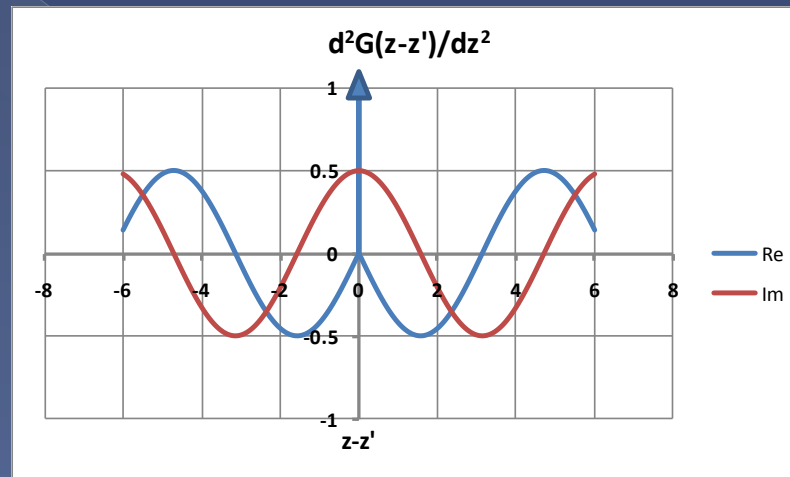
$$\frac{dG(z, z')}{dz} = \frac{\text{sign}(z - z')}{2} e^{ik|z-z'|}$$



# Funzione di Green

- Per la derivata seconda:

$$\frac{d^2 G(z, z')}{dz^2} = \frac{2 \cdot \delta(z - z')}{2} e^{ik|z-z'|} + \frac{\text{sign}(z - z') \text{sign}(z - z') ik}{2} e^{ik|z-z'|} = \delta(z - z') + \frac{ik}{2} e^{ik|z-z'|}$$



- Sostituendo nella definizione della funzione di Green si verifica che la funzione scelta è corretta:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) G(z, z') = \delta(z - z') + \frac{ik}{2} e^{ik|z-z'|} + \frac{k^2}{2ik} e^{ik|z-z'|} = \delta(z - z')$$



## La soluzione integrale

La soluzione dell'equazione d'onda può essere ricavata sfruttando la funzione di Green definita prima

- Il termine disomogeneo dell'equazione può essere espresso:

$$\begin{aligned} -i\omega\mu_0\sigma(z)\mathbf{E}(z) &= \int -i\omega\mu_0\sigma(z')\mathbf{E}(z')\delta(z-z')dz' \\ &= \int -i\omega\mu_0\sigma(z')\mathbf{E}(z')\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right)G(z,z')dz' \end{aligned}$$

- Allora l'equazione d'onda può essere scritta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2}\mathbf{E}(z) + k^2\mathbf{E}(z) &= \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right) \int -i\omega\mu_0\sigma(z')\mathbf{E}(z')G(z,z')dz' \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right)\mathbf{E}(z) &= \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right) \int -i\omega\mu_0\sigma(z')\mathbf{E}(z')G(z,z')dz' \end{aligned}$$

- Quindi una soluzione particolare dell'equazione sarà:

$$\mathbf{E}^p(z) = -i\omega\mu_0\sigma \int \mathbf{E}(z')G(z,z')dz' = -\omega\mu_0 \frac{\sigma}{2k} \int e^{(ik|z-z'|)} \mathbf{E}(z')dz'$$

## La soluzione integrale

- Aggiungendo la soluzione dell'equazione omogenea, si ottiene la soluzione finale per il **campo elettrico totale**  $\mathbf{E}(z)$ :

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{vac} e^{ikz} - \omega\mu_0 \frac{\sigma}{2k} \int_0^{\infty} e^{(ik|z-z'|)} \mathbf{E}(z') dz'$$

- Il termine integrale rappresenta il contributo al campo dei dipoli oscillanti che costituiscono il dielettrico

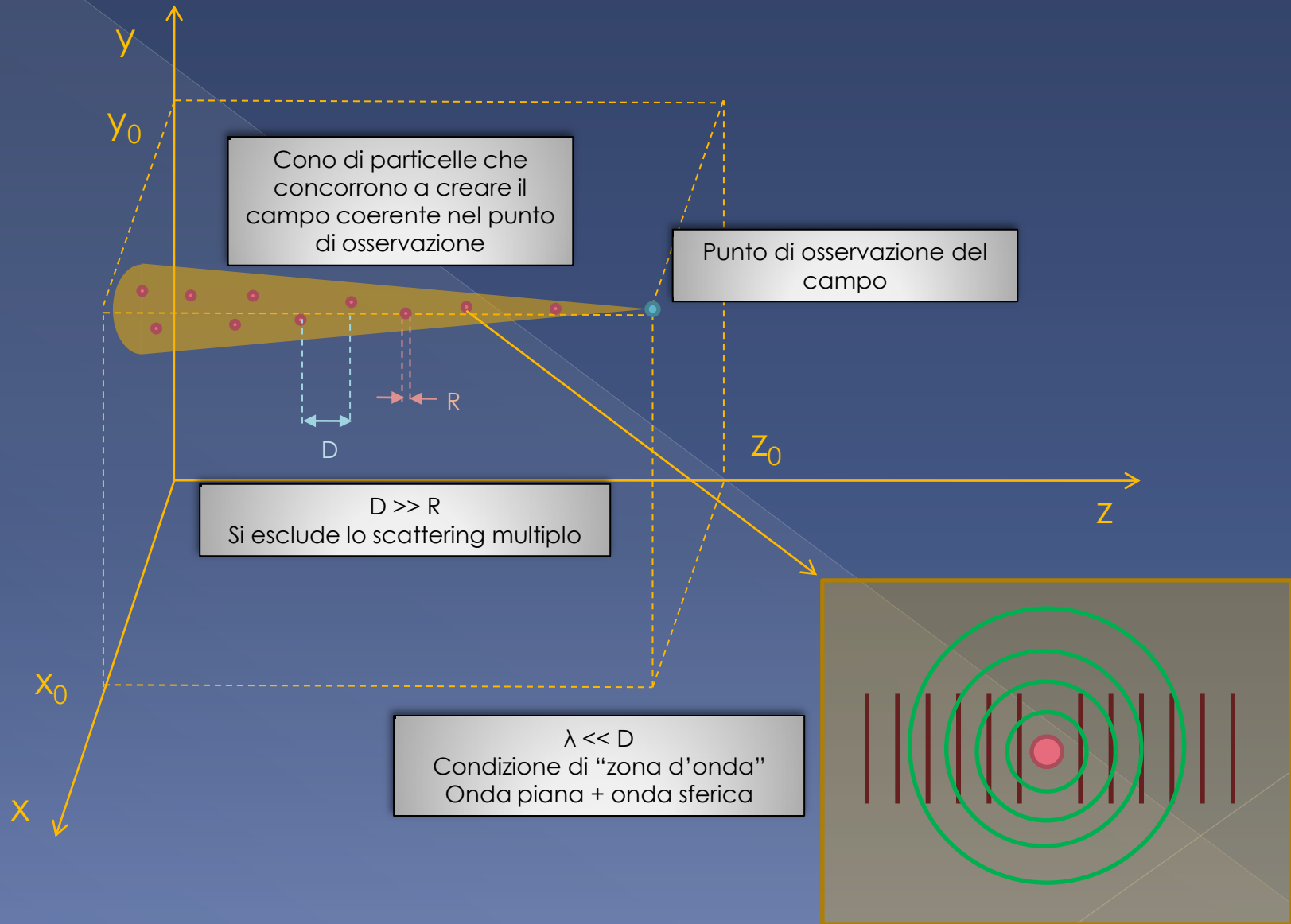
# Tipologie di scattering

- Mezzo continuo
  - > Scattering coerente in avanti , nullo nelle altre direzioni (interferenza distruttiva)
- Mezzo cristallino
  - > Scattering coerente in avanti e nelle altre direzioni (difrazione)
- Mezzo rarefatto a distribuzione casuale
  - > Scattering coerente in avanti, scattering non coerente nelle altre direzioni (dispersione di energia)

## Mezzo rarefatto a distribuzione casuale

- Un fenomeno analogo all'estinzione in un dielettrico avviene in un mezzo rarefatto costituito da particelle distribuite casualmente dove la lunghezza d'onda è molto più piccola della distanza media tra le particelle ( $\lambda \ll D$ ).
- Viene usato un approccio microscopico in cui si considera lo scattering di ogni particella per poi integrare su un volume finito e ottenere il campo macroscopico.
- Le onde scatterate in direzioni diverse da quella in avanti non sono coerenti perché sono generate da una distribuzione casuale di particelle che cambia col tempo.
- Infatti, considerando un generico punto  $x_0, y_0, z_0$  di osservazione del campo, solo le onde provenienti da particelle con approssimativamente le stesse coordinate  $x_0, y_0$  e con coordinata  $z < z_0$  saranno in fase.

# Condizioni di validità del modello



## Mezzo rarefatto a distribuzione casuale

- Campo asintotico di scattering costituito da un'onda piana sovrapposta ad un'onda sferica:

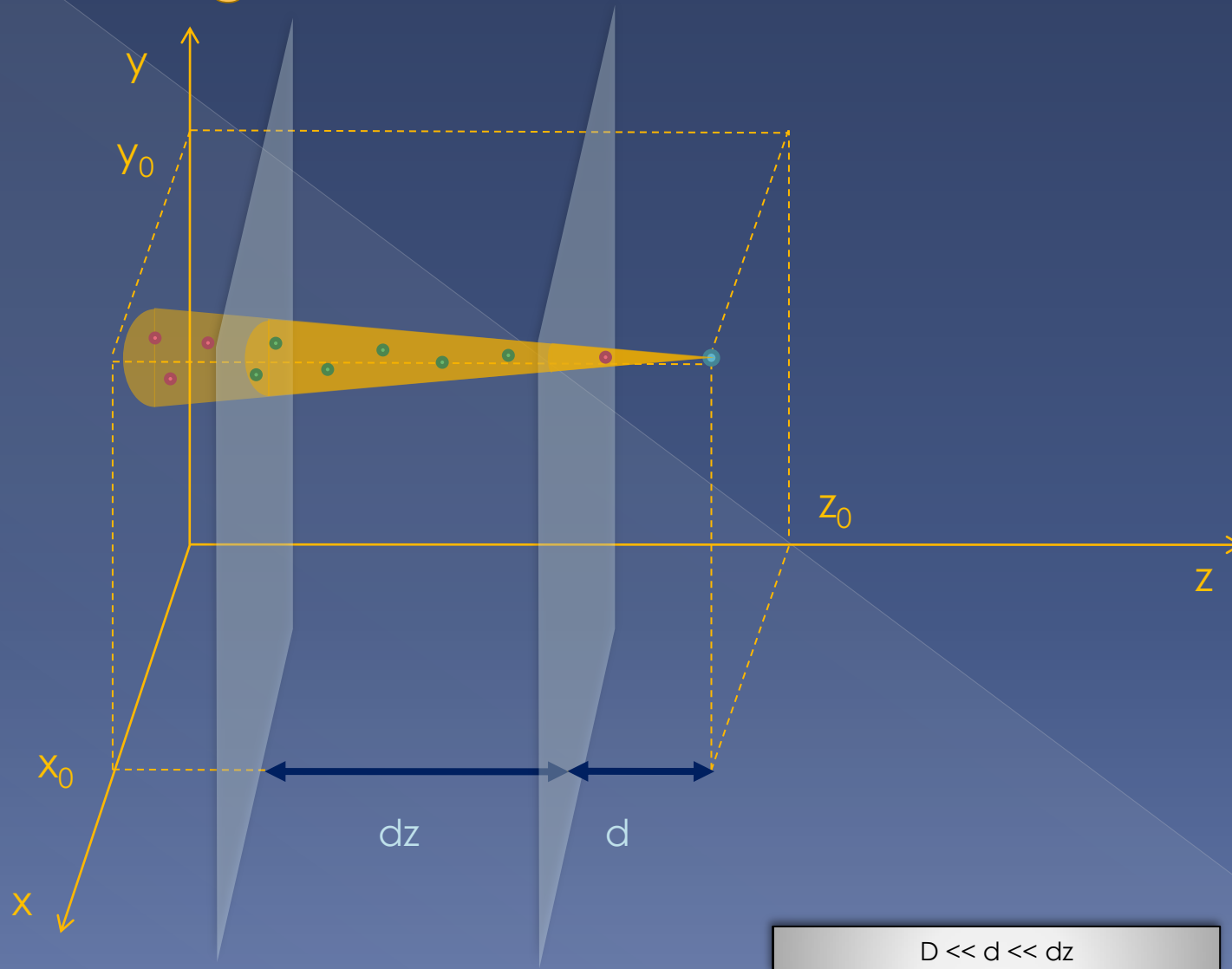
$$\mathbf{E}(z) \approx \mathbf{E}_0 e^{ikz} + \mathbf{E}_{scat} \frac{e^{ikr}}{r}$$

- Assumendo che per lo scattering in avanti la polarizzazione non cambi, si ha:

$$\mathbf{E}_{scat} = f(0)\mathbf{E}_0$$

dove  $f(0)$  è l'ampiezza dello scattering in avanti

# Integrazione dei contributi



## Integrazione dei contributi

- Il campo nel punto  $z$  si ottiene integrando i contributi generati dalle particelle della lastra  $dz$  all'interno del cono di coerenza:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{ikz} + 2\pi i N k^{-1} dz f(0) \mathbf{E}_0 e^{ikz}$$

- Ma l'ampiezza dell'onda che incide sulla lastra  $dz$  dipende da  $z$ . Se la indichiamo con  $A(z)$  avremo che  $A(0) = E_0$  cioè l'ampiezza dell'onda incidente in  $z=0$
- La variazione di ampiezza nell'intervallo  $dz$ , vale:

$$d\mathbf{A}(z) = 2\pi i N k^{-1} dz f(0) \mathbf{A}(z)$$

dove  $N$  è la densità di particelle

- Che integrata fornisce:

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{E}_0 e^{2\pi i N k^{-1} f(0) z}$$



## Indice di rifrazione

- Il campo in  $z$  può essere quindi indicato con:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{A}(z)e^{ikz} = \mathbf{E}_0e^{inkz}$$

- Dove  $n$  è l'indice di rifrazione:

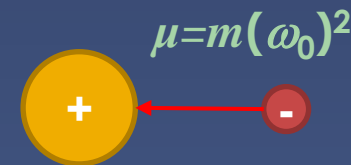
$$n = 1 + \frac{2\pi i N f(0)}{k^2}$$

L'onda rifratta è prodotta dall'interferenza dell'onda incidente con l'onda scatterata (campo di radiazione)

# Modello per il calcolo dell'indice di rifrazione

- Si considera un oscillatore armonico, costituito da uno ione e un elettrone (gas di elettroni legati), con costante elastica  $\mu$  e smorzamento  $\gamma$  forzato dal campo esterno  $\mathbf{E}_0$  di frequenza  $\omega$

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} + m\omega_0^2 \mathbf{u} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$



- Dove la frequenza propria di risonanza del sistema è:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

- Il momento di dipolo risultante è:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^{-1} \mathbf{E}_0$$

## Modello per il calcolo dell'indice di rifrazione

- Il campo di radiazione di un dipolo oscillante è dato da:

$$\mathbf{E}_{scat} = [(\mathbf{k} \times \mathbf{p}_0) \times \mathbf{k}] \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Considerando lo scattering in avanti, che come già visto è proporzionale all'onda incidente:

$$f(0)\mathbf{E}_0 = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}_0 = \frac{k^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^{-1} \mathbf{E}_0$$

- Sostituendo  $f(0)$  nell'espressione dell'indice di rifrazione si ha:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$$

# La lunghezza di estinzione

Lunghezza di estinzione = distanza all'interno del mezzo oltre cui l'onda incidente è stata rimpiazzata dalla nuova onda con indice di rifrazione  $n$

Teorema  
di estinzione



Elettrodinamica  
macroscopica



Media dei campi

Lunghezza di estinzione



Lunghezza media

$L_1$  = distanza necessaria per  
ottenere le proprietà medie  
del mezzo e poter considerare  
i campi macroscopici

## ... le varie interpretazioni

- Jackson:

Distanza nel mezzo oltre cui l'onda del vuoto e l'onda del mezzo diventano significativamente fuori fase

$$L_2 = \frac{k}{2\pi N |f(0)|} = \frac{\lambda}{2\pi |n-1|}$$

Estinzione causata da un **layer superficiale** di dipoli al confine del mezzo



- Artificio matematico:  
Si trasforma un integrale di volume in un integrale di superficie

- $L_2 \gg L_1$

$L_2$  interpretabile come:

distanza in cui la porzione del fascio che non ha interagito col mezzo si è ridotta ad un fattore  $(1/e)$

## ... le varie interpretazioni

- Interpretazione più comune:

L'estinzione è dovuta a tutti i dipoli oscillanti nell'intero **volume** del dielettrico.

Nasce una questione:

*Quando osserviamo un oggetto a distanza astronomica, la luce che riceviamo è davvero l'oggetto o è l'intervento del mezzo interstellare?!*

Il postulato di Einstein:  
La velocità della luce è indipendente  
dal moto della sorgente



Sembra impossibile verificarlo, a causa dell'estinzione dovuta all'intervento di un qualsiasi materiale

## ... le varie interpretazioni

- Interpretazione per testare il II postulato di Einstein:  
L'onda incidente propagandosi nel mezzo interagisce con esso, fino a che il mezzo stesso deve essere considerato l'unica sorgente di radiazione.

Questo ha senso solo se possiamo distinguere dall'onda incidente la porzione che ha interagito col mezzo.

Supponiamo che la velocità della radiazione in un apparato sperimentale dipenda dalla velocità della sorgente e che non sia  $c$ .

La radiazione, passando attraverso un mezzo stazionario, si estingue nel processo di scattering coerente in avanti.

La misura della velocità produrrà quindi  $c$ , poiché la sorgente della radiazione è il mezzo stazionario.



## ... le varie interpretazioni

Il fascio che viaggia nel mezzo consiste di 2 componenti:

- Componente scatterata in avanti, che viaggia a velocità  $c$
- Componente non scatterata (onda incidente), a velocità  $\neq c$

Se le 2 componenti, entrambe nella direzione in avanti, possono essere discriminate in base alla velocità, possiamo esaminare il decremento del fascio incidente con la distanza nel mezzo.

L'ampiezza della componente non scatterata decresce esponenzialmente

Il cambiamento frazionario dell'ampiezza dell'onda incidente, in una distanza  $dz$  attraverso il mezzo, è:  $-|n-1|k dz$

Dallo scattering risulta quindi un decremento esponenziale dell'onda incidente:  $\exp[-|n-1|k dz]$

Possiamo stimare una distanza in cui l'ampiezza dell'onda incidente si riduce a  $1/e$  del suo valore iniziale: questa distanza è  $L_2$

## ... le varie interpretazioni

Filippas e Fox:

raggi  $\gamma$  0.5 MeV



in aria  $L_2 = 19$  cm

in lucite  $L_2 = 0.3$  mm

## ... le varie interpretazioni

- Interpretazione per mezzi casuali rarefatti:

Basata sul coefficiente di scattering Rayleigh

Per un mezzo casuale l'intensità del fascio diminuisce esponenzialmente con la distanza via via che l'energia è scatterata in altre direzioni rispetto alla direzione in avanti.

Reciproco del coefficiente di scattering Rayleigh:

$$L_3 = 6\pi N (c/\omega)^4 \frac{n}{(n^2 - 1)^2}$$



Lunghezza di estinzione per cui l'intensità del fascio diminuisce di un fattore 1/e

dove  $n$  è la parte reale dell'indice di rifrazione

## Confronto tra $L_2$ e $L_3$

Es: Gas di elettroni liberi o debolmente legati, con indice di rifrazione:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$$

Abbiamo che:

$$L_2 = \frac{1}{\lambda N r_0}$$

$r_0$  = raggio  $e^-$

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

$$L_3 = \frac{1}{N\sigma_T}$$

$\sigma_T$  = sezione d'urto di Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi r_0^3}{3}$$



Lunghezza colonna particelle per cui  $\sum(\text{sezioni d'urto})_{\text{particelle}} = (\text{sezione d'urto})_{\text{colonna}}$

A  $L_3$  tutta la radiazione ha interagito col mezzo

## Confronto tra $L_2$ e $L_3$

Luce visibile  $\lambda=5000\text{\AA}$



$$L_2 = \frac{7.1 \cdot 10^{12}}{N} [\text{metri}]$$

$$L_3 = \frac{1.5 \cdot 10^{20}}{N} [\text{metri}]$$

$N = \text{elettroni/m}^3$

distanza tale che  $I = (1/e) I_0$

$\gg$

distanza per cui tutta la radiazione  
tranne  $1/e$  abbia interagito col mezzo

$\leftarrow L_3$

$\leftarrow L_2$

Nella distanza  $L_2$  non c'è variazione apprezzabile di intensità