Onde, Radiazione e Relativita'

I – Onde elettromagnetiche

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$$

Non esistono cariche o correnti magnetiche

Cariche e correnti elettriche

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

8 equazioni differenziali alle derivate parziali del I ordine, accoppiate

Equazione delle onde

$$\nabla\times\left(\nabla\times\cdots=\nabla\left(\nabla\cdot\ \ \cdots\ \ -\Delta\cdots\right.\right.$$

$$\Delta=\nabla^2\quad \text{Laplaciano}$$

Identita' vettoriale; applicata alla III e IV eq. di Maxwell
Tenuto conto delle prime due:

$$\Delta\mathbf{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\Delta\mathbf{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0$$

Equazioni delle onde →
6 eq. differenziali alle der. parziali del II ordine, disaccoppiate

$$\rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\quad !!!$$

Soluzioni equazione delle onde

Caso unidimensionale

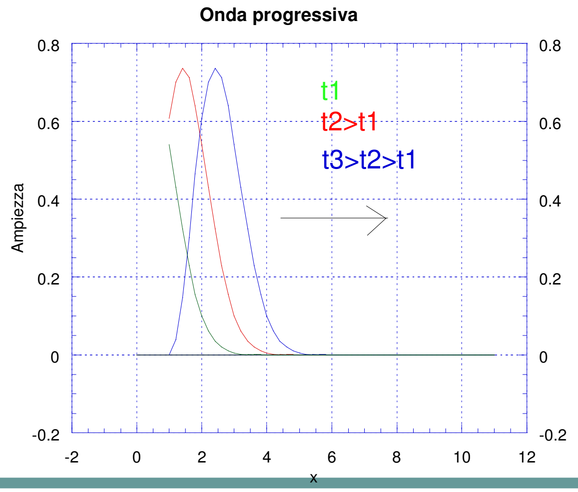
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad v = velocita'$$

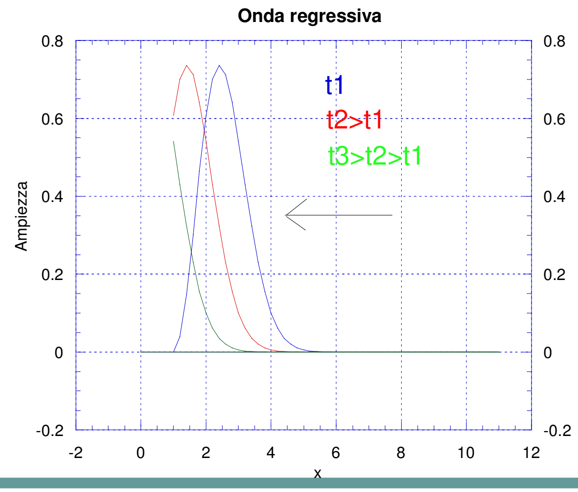
f=f(x,t) funzione di 2 variabili

Soluzione piu' generale

g, h funzioni qualsiasi

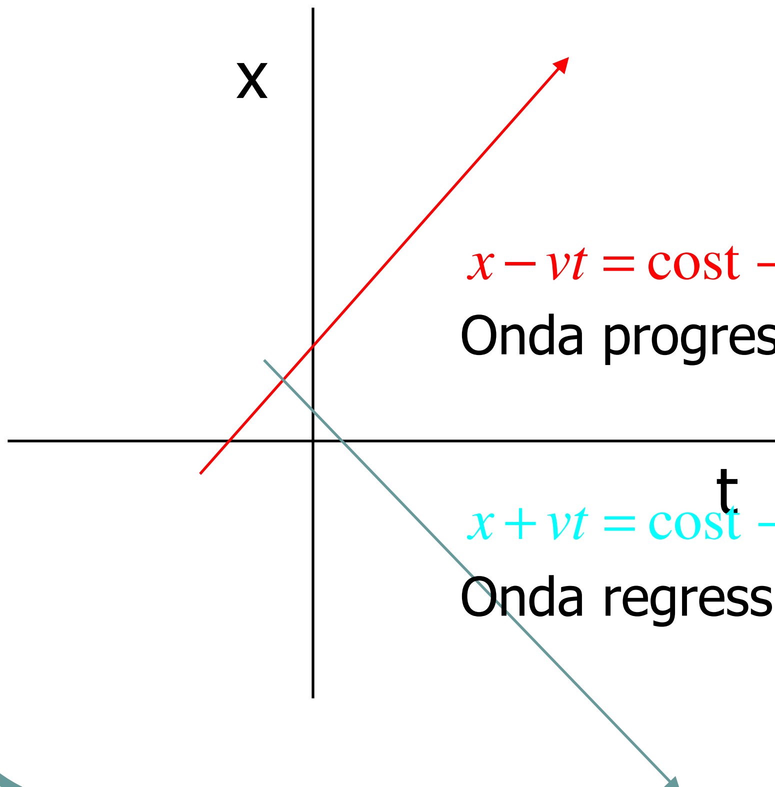
$$f = g(x - vt) \quad + \quad h(x + vt)$$





Onde progressive e regressive

Luogo dei "punti" *(x,t)* in cui la funzione ha un dato valore (p.es. *creste*, o *valli*)



$$x - vt = \text{cost} \rightarrow \text{se } t \text{ aumenta, } x \text{ aumenta}$$

Onda progressiva

$$x + vt = \text{cost} \rightarrow \text{se } t \text{ aumenta, } x \text{ diminuisce}$$

Onda regressiva

Onde armoniche - I

Soluzione particolare:

$$f(x,t) = \underbrace{A}_{\text{Ampiezza}} \cos\left[\underbrace{k}_{\text{Numero d'onda}}\left(x - vt\right) + \underbrace{\delta}_{\text{Fase}}\right]$$

Relazioni fondamentali e definizioni:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}$$

k: *frequenza* <u>*spaziale*</u>
ν: *frequenza* <u>*temporale*</u>

Onde armoniche - II

$$f_P(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) \;\; \text{progressiva}$$

$$f_R(x,t) = A\cos(kx + \omega t - \delta) \;\; \text{regressiva}$$

Perche' il -?

$$f_P(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = A\cos\left(kx - \left(\omega t - \delta\right)\right)$$

La fase si assegna per convenzione alla componente temporale dell'argomento, che cambia segno nel passare da un'onda progressiva a una regressiva. Allora:

$$f_R(x,t) = A\cos(kx + \left(\omega t - \delta\right))$$

Nota: Per passare da o.progressiva a o.regressiva $k \rightarrow -k$

$$f_R\left(x,t\right) = A\cos\left(-kx - \left(\omega t - \delta\right)\right)$$

Esponenziali complessi - I

In luogo delle funzioni trigonometriche si usano le funzioni esponenziali complesse

$$A\cos(kx-\omega t+\delta)=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t+\delta)}\right]$$

Si sottintende sempre di prendere alla fine dei calcoli la parte reale del risultato

Formalismo utile per operazioni lineari, in cui ω non cambia.
Vantaggio: grande semplificazione dei calcoli!

Esponenziali complessi - II

Esempio: somma di due onde piane con ampiezza e fase diverse
Come trovare ampiezza e fase della somma?

$$A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) = A_3 \cos(kx - \omega t + \delta_3)$$

$$\rightarrow \underbrace{A_1 e^{i\delta_1}}_{\tilde{A}_1} e^{i(kx-\omega t)} + \underbrace{A_2 e^{i\delta_2}}_{\tilde{A}_2} e^{i(kx-\omega t)} = \underbrace{A_3 e^{i\delta_3}}_{\tilde{A}_3} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\rightarrow \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \tilde{A}_3$$

$$\left|\tilde{A}_3\right|^2 = \left|\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\right|^2$$

$$A_3^2 = \left(\underbrace{A_2 \cos\delta_2 + A_1 \cos\delta_1}_{\text{Re}}\right)^2 + \left(\underbrace{A_2 \sin\delta_2 + A_1 \sin\delta_1}_{\text{Im}}\right)^2$$

$$\rightarrow \qquad = A_2^2 + A_1^2 + 2A_1A_2(\cos\delta_2 \cos\delta_1 + \sin\delta_2 \sin\delta_1) = A_2^2 + A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\delta_3 = \arctan\frac{\overbrace{A_2 \sin\delta_2 + A_1 \sin\delta_1}^{\text{Im}}}{\underbrace{A_2 \cos\delta_2 + A_1 \cos\delta_1}_{\text{Re}}}$$

Sovrapposizione di onde - I

Sovrapposizione di 2 onde piane, con frequenze e numeri d'onda diversi:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos\left(k_1 x - \omega_1 t\right) \\ E_2 = E_0 \cos\left(k_2 x - \omega_2 t\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow E = E_1 + E_2 = E_0\left[\cos\left(k_1 x - \omega_1 t\right) + \cos\left(k_2 x - \omega_2 t\right)\right]$$

$$\rightarrow E = 2E_0 \cos\left[\frac{\left(k_1 x - \omega_1 t\right) + \left(k_2 x - \omega_2 t\right)}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(k_1 x - \omega_1 t\right) - \left(k_2 x - \omega_2 t\right)}{2}\right]$$

$$\rightarrow E = 2E_0 \cos\left[\frac{\left(k_1 + k_2\right)x - \left(\omega_1 + \omega_2\right)t}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(k_1 - k_2\right)x - \left(\omega_1 - \omega_2\right)t}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \overline{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \Delta\omega = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ \overline{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}, \Delta k = \dfrac{k_1 - k_2}{2} \end{cases} \rightarrow E = 2E_0 \cos\left[\overline{k}x - \overline{\omega}t\right]\cos\left[\Delta k x - \Delta\omega t\right]$$

Sovrapposizione di onde - II

Definiamo

$$E_{\mathrm{mod}}(x,t) = 2E_0 \cos\left[\Delta k x - \Delta \omega t\right]$$

$$\rightarrow E(x,t) = E_{\mathrm{mod}}(x,t) \cos\left[\bar{k}x - \bar{\omega}t\right]$$

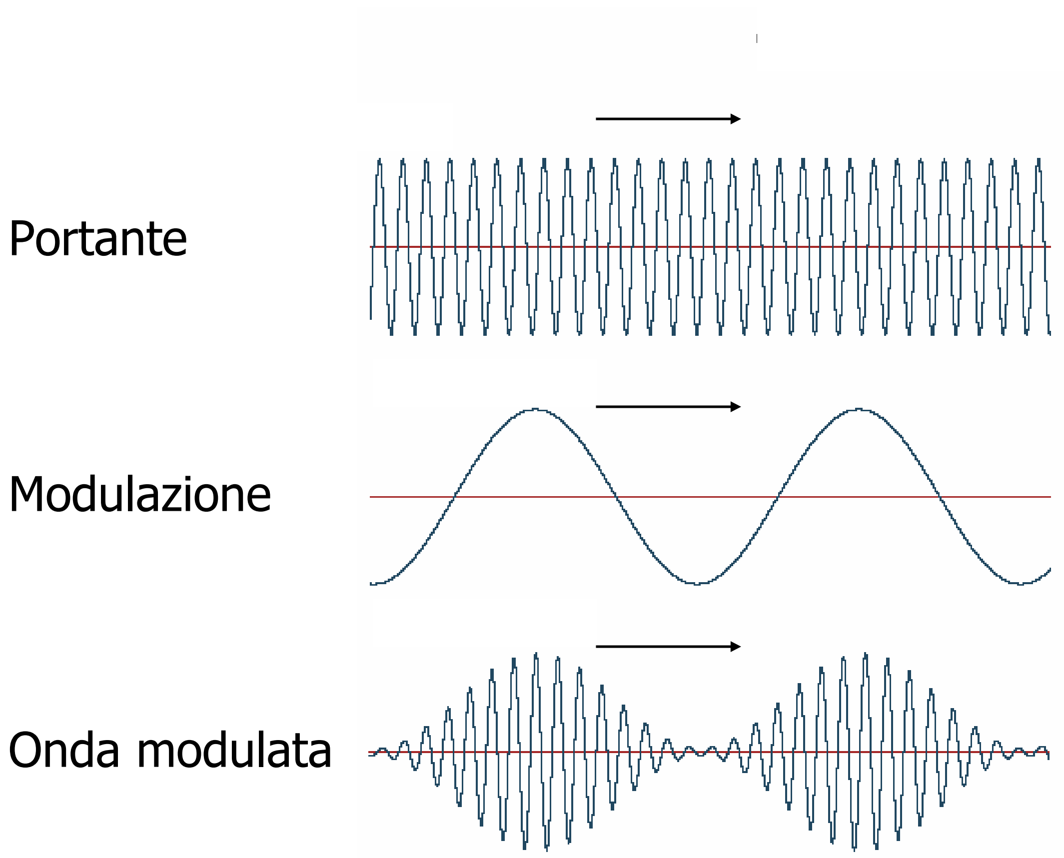
Interpretazione:

Onda ‘portante’ con parametri $(\bar{k}, \bar{\omega})$, con ampiezza modulata da onda ‘modulante’ con parametri $(\Delta k, \Delta \omega)$

Velocita’ portante: *velocita’ di fase* $v_f = \dfrac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} = \bar{\lambda}\bar{\nu} = \dfrac{\bar{\omega}}{2\pi}\dfrac{2\pi}{\bar{k}} = \dfrac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$

Velocita’ modulazione: *velocita’ di gruppo* $v_g = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi}\dfrac{2\pi}{\Delta k} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$

Sovrapposizione di onde - III



Sovrapposizione di onde - IV

Per un'onda e.m. nel vuoto (come per altri casi)

$$v_f = \frac{\omega}{k} \equiv c \quad \text{costante indipendente da } \lambda, \text{ o } k$$

In questo caso, la velocita' di gruppo coincide con la velocita' di fase: tutte le componenti monocromatiche viaggiano con la stessa velocita'

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\Delta k c}{\Delta k} = c = v_f$$

In generale pero' onde con lunghezza (o numero) d'onda diversa(o) viaggiano con velocita' di fase diversa :

$$\omega = \omega(k) \to v_f = \frac{\omega(k)}{k} = v_f(k) \quad \text{Relazione di dispersione}$$

Sovrapponendo onde con diversi numeri d'onda si avra' un gruppo d'onde, la cui velocita' di gruppo sara':

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Segno della derivata fissa

$$v_g \gtrless v_f$$

Teorema di Fourier - I

Un'onda qualsiasi non e' in generale monocromatica: contiene diverse frequenze. Questo avviene perche' l'eq. delle onde e' lineare:
Combinazioni lineari di soluzioni sono anch'esse soluzioni.

Qualsiasi onda (o quasi) si puo' esprimere come combinazione lineare di onde sinusoidali di diverse frequenze: il modo piu' generale di farlo e' svilupparla in integrale di Fourier.

Per un'onda piana generica che si propaga lungo *x*:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i(kx-\omega t)} d\omega$$

$\rightarrow$*Ci si puo' limitare a studiare le proprieta' generali delle onde sinusoidali*

Teorema di Fourier - II

Trasformata di Fourier di $f(x,t)$:

$$A(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)e^{-i(kx-\omega t)}d\omega\left(=f(x,\omega)\right)$$

Notazione confondente ma molto usata

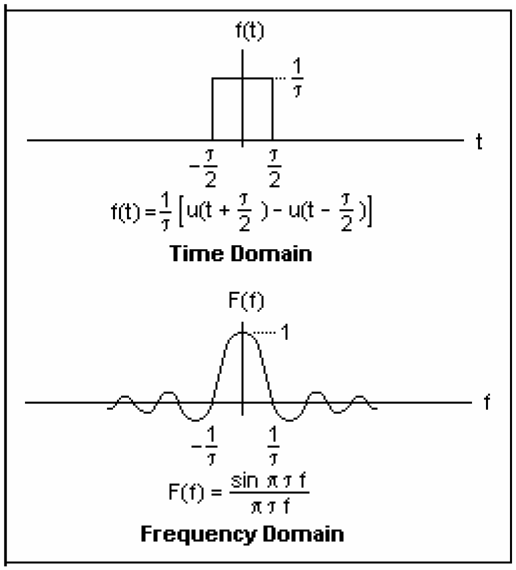
Funzione complessa (*Re+Im*) di variabili reali
Significato: la seconda personalita' di ogni funzione del tempo

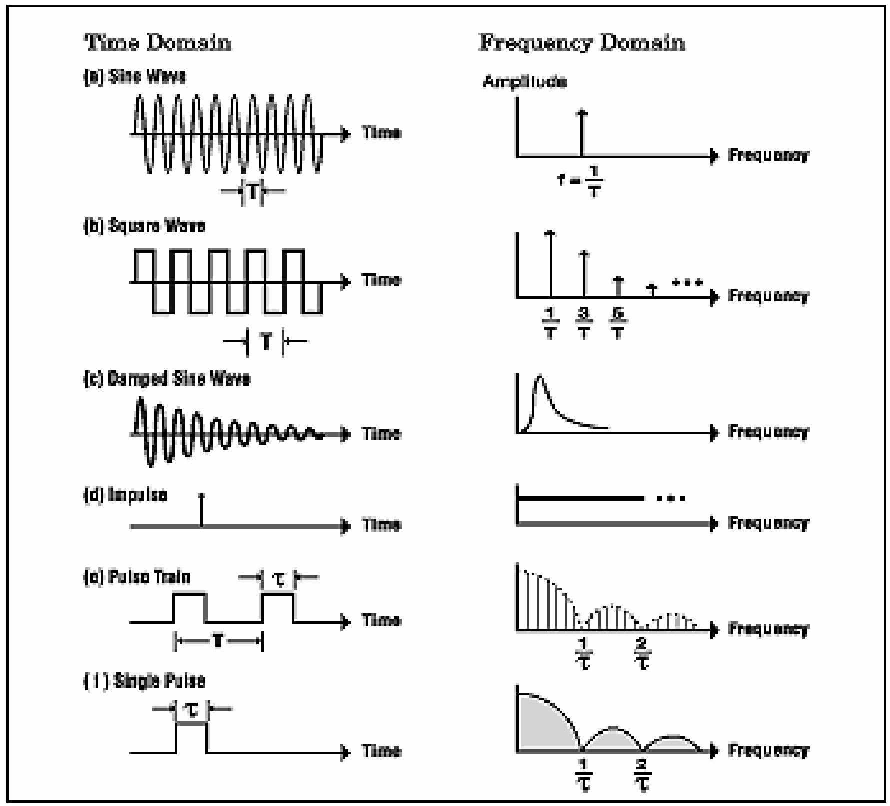
Scoperta di Fourier: Ogni grandezza fisica funzione del tempo puo' essere rappresentata in modo equivalente nel dominio della frequenza, mantenendo tutta l'informazione originale

Funzioni *periodiche* nel dominio di *t*: TdF definita su insieme *discreto* nel dominio di ω
Funzioni *aperiodiche* nel dominio di *t*: TdF definita su insieme *continuo* nel dominio di ω

Teorema di Fourier - III

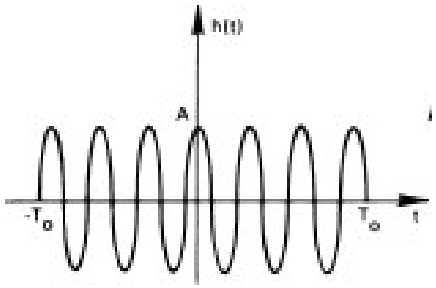
Esempi:



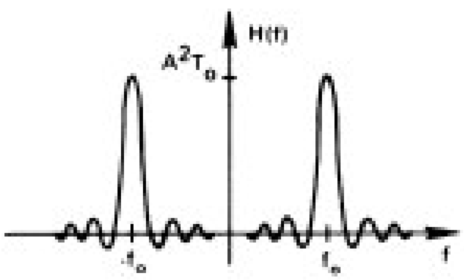


Pacchetti d'onde

Consideriamo un impulso cosinusoidale di durata finita:



La sua trasformata di Fourier e':



Esso e' un esempio di *pacchetto d'onde*, che si puo' considerare come composto da un insieme di infinite onde armoniche, ognuna con peso $A(\omega)$

Le velocita' di un'onda

Ricapitolando:

Velocita' di fase
E' la velocita' con cui si sposta la fase di *una data componente monocromatica* dell'onda (p.es. quella di un nodo, o di una cresta, o…)

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\omega}{2\pi}\frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k}$$

La velocita' di fase e' in generale funzione della lunghezza d'onda

Velocita' di gruppo
E' la velocita' con cui si sposta *il pacchetto*: differisce dalla vel. di fase ogni volta che l'onda si propaga in un mezzo dispersivo

$$v_g \approx \frac{d\omega}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Onde piane nello spazio vuoto

Caso particolare: *onda piana monocromatica*

propagazione nella direzione x
non dipendenza da (y,z)
k valore definito e unico

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E_0} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\mathbf{B}(r,t) = \mathbf{B_0} e^{i(kx-\omega t)}$$

Nota: ogni soluzione delle eq. di Maxwell in assenza di cariche e correnti e' un'onda
*Non e' vero il contrario: infatti **E** e **B** soddisfano*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Proprieta' delle onde piane

1) Trasversalita' dei campi

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E_0} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} = 0$$ non dipendenza da (y,z)

$$\rightarrow ikE_{0x} e^{i(kx-\omega t)} = 0 \rightarrow E_{0x} = 0$$

2) Ortogonalita' di ***E,B***

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow kE_{0y} = \omega B_{0z}, \; kE_{0z} = -\omega B_{0y}$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_0 = \frac{k}{\omega}\left(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_0\right) \rightarrow B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c}$$

Onde piane in direzione generica

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k} \bullet \mathbf{r} - \omega t)} = E_0 \hat{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k} \bullet \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

n: versore polarizzazione
k: n. d'onda

Si noti: argomento reale $\rightarrow$ ampiezza costante
argomento complesso $\rightarrow$ ampiezza smorzata

n non necessariamente costante nel tempo

Energia, quantita' di moto

$U=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)$ $\to U=\varepsilon_0 E^2$	Densita' di energia elettromagnetica $\leftarrow$ *per un'onda piana*
$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$ $\to \mathbf{S}=cU\hat{\mathbf{k}}$	Vettore di Poynting: flusso di energia elettromagnetica $\leftarrow$ *per un'onda piana*
$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{S}}{c^2}$ $\to \mathbf{P}=\frac{U}{c}\hat{\mathbf{k}}$	Flusso di quantita' di moto $\leftarrow$ *per un'onda piana*

Polarizzazione

Proprieta' dei campi ***E*** e ***B***: sempre ortogonali a ***k***

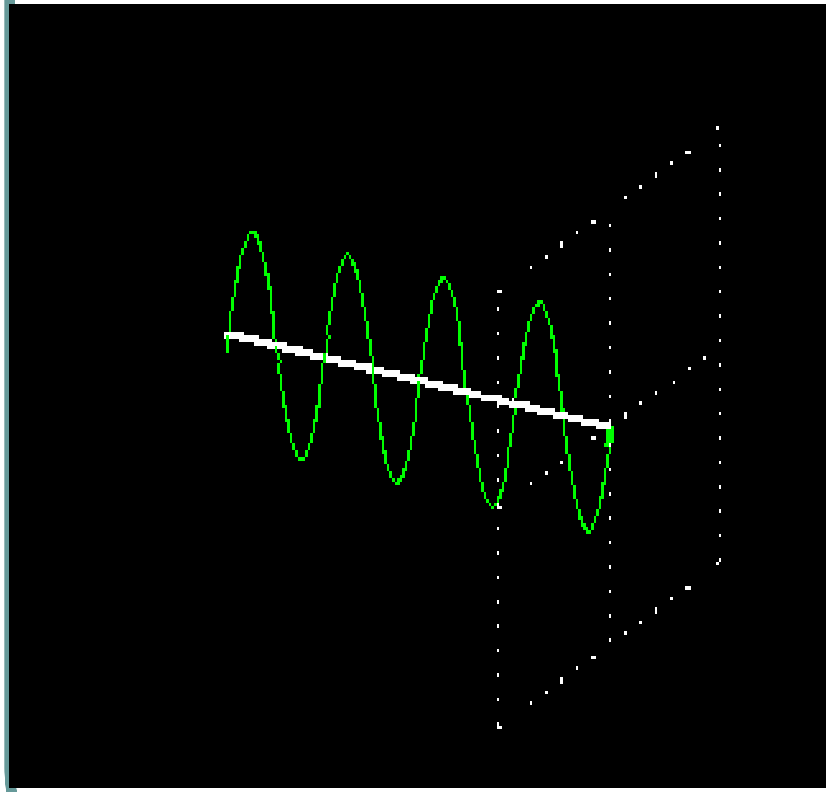
Direzione di ***E***: insieme a ***k***, definisce il *piano di vibrazione* di ***E***
Non necessariamente costante nel tempo (ma $\perp$ ***k***).
Per onde piane:

Costante: onda piana *polarizzata linearmente*

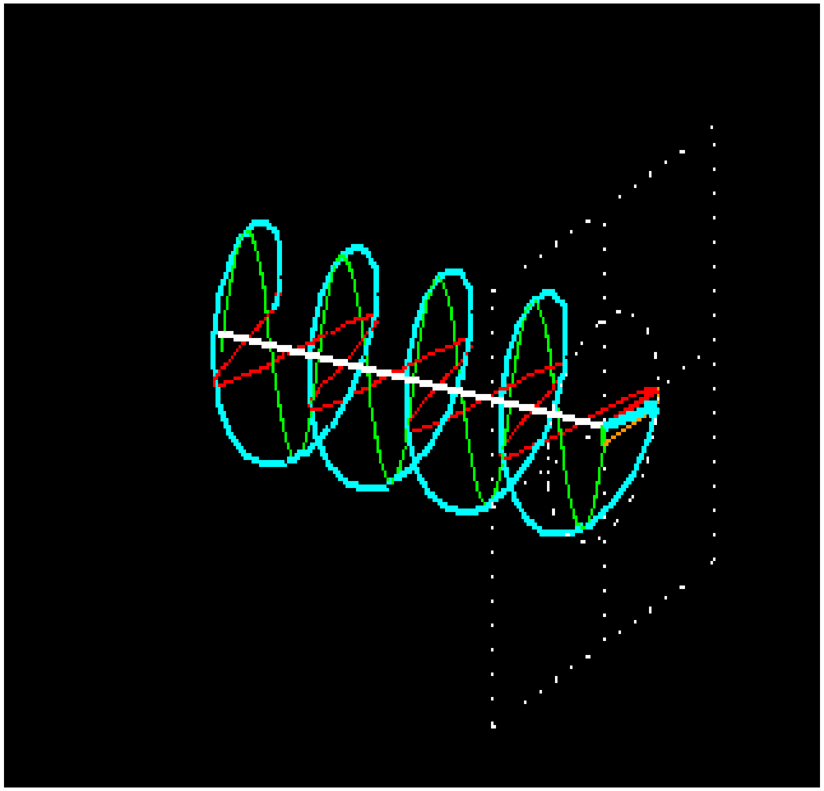
Rotante attorno a ***k***: onda piana *polarizzata ellitticamente (circolarmente,* se ampiezza di oscillazione costante)

Vettore *E* per onde polarizzate

Lineare



Circolare



Mezzi materiali

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

Relazioni costitutive, semiempiriche dal punto di vista macroscopico.
Permittivita' e permeabilita':

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \ , \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\leftarrow$nell'ipotesi in cui ε,μ siano costanti, scalari (isotropia del mezzo), senza cariche e correnti libere

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \equiv \frac{c}{n}$$

Onde nei mezzi materiali

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

Velocita' di propagazione

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Indice di rifrazione

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)$$

Densita' di energia

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)$$

Vettore di Poynting