Onde, Radiazione e Relativita’

X – Spazio-tempo, ‘paradossi’ della Relativita’ Ristretta

Spazio e tempo pre-relativistici

Spazio e tempo newtoniani (*Principia*):

Assoluti

Anche se incorpora il principio di relativita', Newton assume che esista uno spazio assoluto perche' considera le accelerazioni come assolute

Il tempo e' assunto come assoluto e identico in tutti i sistemi di riferimento

Indipendenti

Intervallo

Intervallo fra eventi: invariante rispetto a TdL

$$\begin{cases} ct_1, x_1, y_1, z_1 \\ ct_2, x_2, y_2, z_2 \end{cases} \rightarrow \Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Tipi di intervallo:

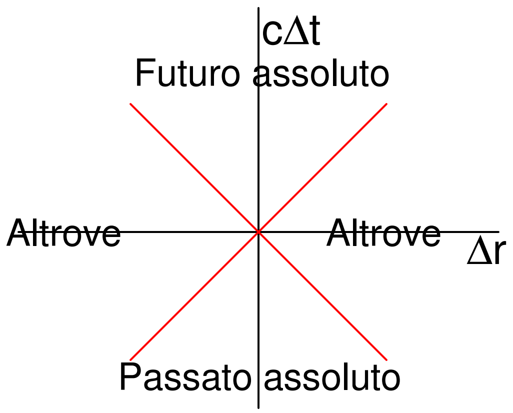
TdL non puo' invertire ordine temporale

Tipo tempo: $c^2\Delta t^2 > \Delta r^2$ *Eventi possono essere connessi causalmente*

Tipo spazio: $c^2\Delta t^2 < \Delta r^2$ *Eventi non possono essere connessi causalmente*

TdL puo' invertire ordine temporale

Tipo luce: $\Delta s^2 = 0$



Le linee rosse delimitano il *cono-luce*

Diagramma di Minkowski - I

Rappresentazione geometrica della TdL:

S e *S′* come al solito, vel. relativa *u* lungo asse *x,x′*

Asse *ct′* = insieme degli eventi che avvengono nell'origine di *S′*: *x′=0*

Asse *x′* = insieme degli eventi che avvengono all'istante iniziale di *S′*: *t′=0*

Allora, usando le TdL:

Asse ct': $x'=0 \rightarrow x=ut=(u/c)ct \quad \rightarrow u/c$ = tangente angolo fra asse ct' e asse ct

Asse x': $t'=0 \rightarrow x=c^2t/u=(u/c)^{-1}ct \rightarrow u/c$ = cotangente angolo fra x' e asse ct

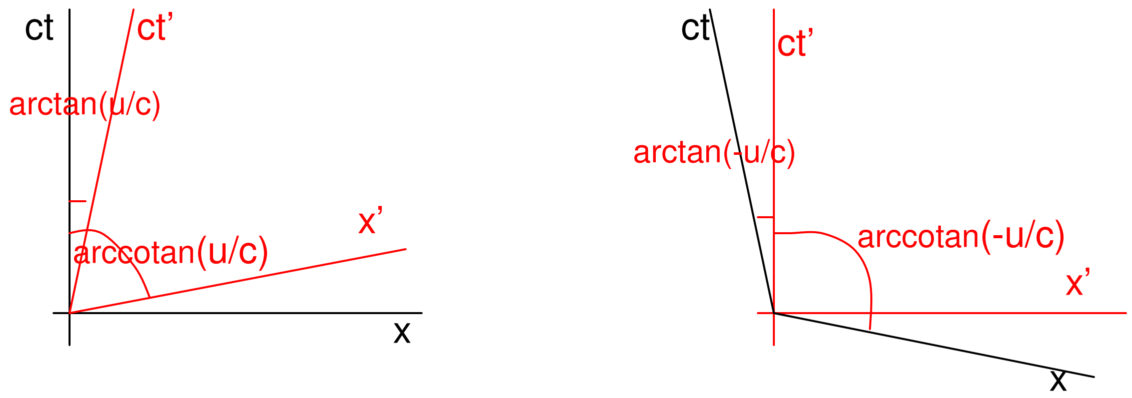
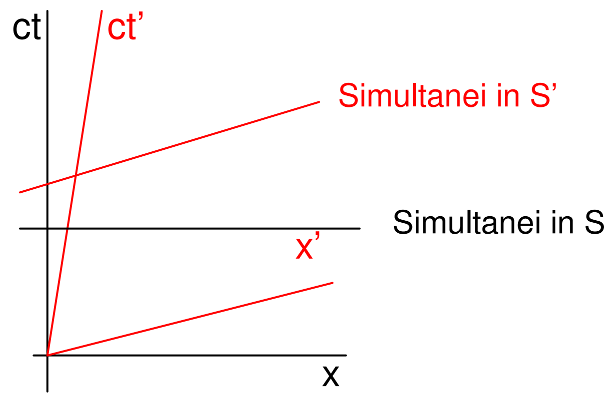


Diagramma di Minkowski - II

Evidenza geometrica della relativita' della simultaneita'



Il luogo geometrico di un insieme di punti-eventi simultanei non e' lo stesso in tutti i SRI…

Diagramma di Minkowski - III

A differenza di una rotazione nel piano (trasformazione lineare *ortogonale)*, la trasformazione di Lorentz fa passare in generale ad *assi obliqui*

Come conseguenza di questo:

gli 'angoli' non sono conservati

la 'distanza' fra due eventi ('punti' nel piano x-ct) non e' quella euclidea, ma quella iperbolica:

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \text{euclidea}$$

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \qquad \text{iperbolica}$$

Quindi: le TdL sono delle *pseudo-rotazioni* nello spazio-tempo; in particolare, la distanza fra due eventi sul diagramma *non* e' quella geometricamente piu' ovvia

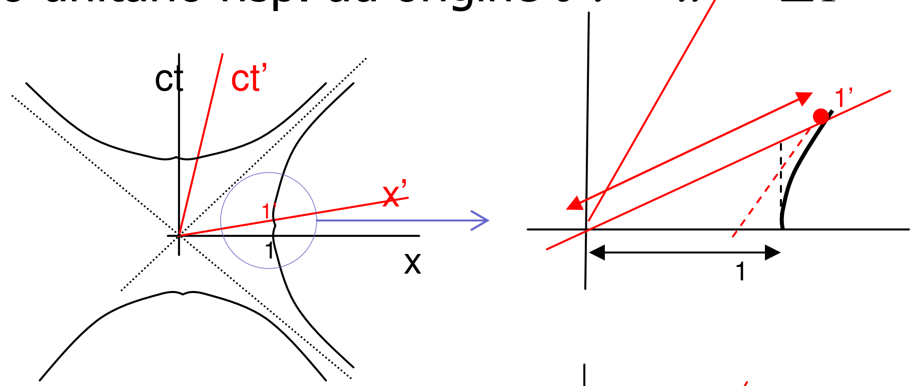
Diagramma di Minkowski - IV

Eq. di iperbole equilatera nel piano *x,ct*

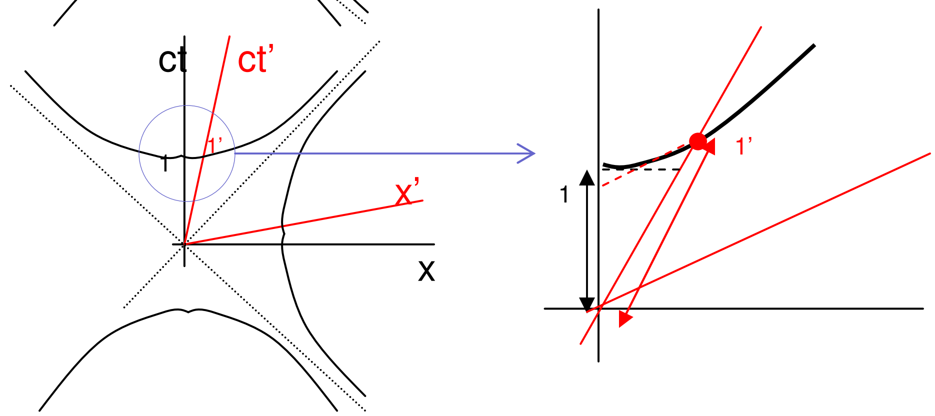
$c^2t^2 - x^2 =$ cost

$\rightarrow$ Luogo eventi a intervallo unitario risp. ad origine $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$

Evidenza geometrica per contrazione dei regoli (Simmetrica $S \leftrightarrow S'$)

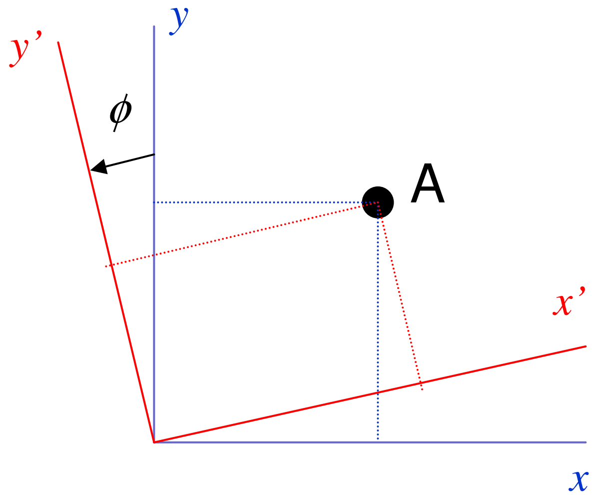


Evidenza geometrica per rallentamento degli orologi (Simmetrico $S \leftrightarrow S'$)



TdL e rotazioni - I

Rotazioni in 2 dimensioni



$$\begin{cases} x' = x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' = -x\sin\phi + y\cos\phi \end{cases}$$

$$\rightarrow x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

In forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TdL e rotazioni - II

Per un angolo infinitesimo:

$$\begin{cases} x' = x + \phi y \\ y' = -\phi x + y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Normalizzazione:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = x^2 + y^2$$

$$\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = x'^2 + y'^2$$

$$= (x + \phi y)^2 + (-\phi x + y)^2$$

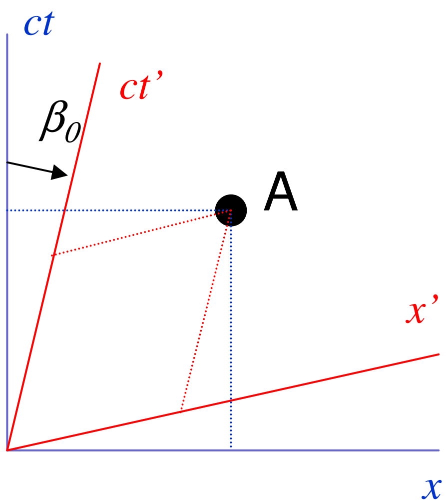
$$= (x^2 + y^2)^2 (1 + \phi^2)$$

Rotazione infinitesima con normalizzazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TdL e rotazioni - III

TdL infinitesima in 1 dim. spaziale + tempo



$$\begin{cases} x' = x - \beta_0 ct \\ ct' = -\beta_0 x + ct \end{cases}$$

$$\rightarrow c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

In forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_0 \\ -\beta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

β_0 e' la velocita' infinitesima di *S'* rispetto ad *S*

TdL e rotazioni - IV

Normalizzazione:

$$a \cdot a = c^2t^2 - x^2$$

$$a' \cdot a' = c^2t'^2 - x'^2$$

$$= \left(ct - \beta_0 x\right)^2 - \left(x - \beta_0 ct\right)^2$$

$$= \left(c^2t^2 - x^2\right)\left(1 - \beta_0^2\right)$$

Che cos'e' *a* ?

Equivalente, rispetto a TdL, del vettore posizione ***r*** rispetto a rotazioni: coppia di numeri reali con prefissata legge di trasformazione rispetto a TdL

In 3+1 dimensioni viene chiamato *4-vettore*

TdL infinitesima con normalizzazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_0 \\ -\beta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

TdL e rotazioni - V

TdL finita:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\eta_0) & -S(\eta_0) \\ -S(\eta_0) & C(\eta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$a \cdot a = c^2 t^2 - x^2$$

$$a' \cdot a' = c^2 t'^2 - x'^2$$

$$= (ctC - xS)^2 - (xC - ctS)^2$$

$$= (c^2 t^2 - x^2)(C^2(\eta_0) - S^2(\eta_0))$$

Che cos'e' η_0?

Osservazione:

Per 2 rotazioni in successione, gli angoli di rotazione si sommano:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

Per 2 TdL in successione, le velocita' *non* si sommano (v. somma relativistica delle velocita')

$$\beta \neq \beta_1 + \beta_2$$

η_0 parametro additivo della TdL, per ora con significato non chiaro..

TdL finita con normalizzazione:

$$C^2(\eta_0) - S^2(\eta_0) = 1$$

TdL e rotazioni - VI

Funzioni adatte:

$$C(\eta_0) = \cosh\eta_0 = \frac{e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}}{2}$$

$$S(\eta_0) = \sinh\eta_0 = \frac{e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta_0 & -\sinh\eta_0 \\ -\sinh\eta_0 & \cosh\eta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Limite infinitesimo:

$$e^{\pm\eta_0} = 1 \pm \eta_0 + \frac{1}{2}\eta_0^2 \pm \dots$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cosh\eta_0 = \dfrac{e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}\eta_0^2 + \dots \\ \sinh\eta_0 = \dfrac{e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}}{2} = \eta + \dots \end{cases}$$

Proprieta' funzioni iperboliche:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = x + \dots$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$$

TdL e rotazioni - VII

η_0 si chiama *rapidita'*

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \cosh \eta_0 \begin{pmatrix} 1 & -\tanh \eta_0 \\ -\tanh \eta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \eta_0}} \begin{pmatrix} 1 & -\tanh \eta_0 \\ -\tanh \eta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \beta_0 = \frac{v}{c} = \tanh \eta_0$$

Verifica TdL infinitesime: Rapidita' infinitesima ~ Velocita'

$$\tanh \eta_0 = \eta_0 + \ldots$$

$$\rightarrow \tanh \eta_0 = \beta_0 \sim \eta_0$$

$$\cosh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}}{2} = \frac{e^{-i(i\eta_0)} + e^{i(i\eta_0)}}{2} = \cos(i\eta_0)$$

$$\sinh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}}{2} = \frac{e^{-i(i\eta_0)} - e^{i(i\eta_0)}}{2} = -i \sin(i\eta_0)$$

Le funzioni iperboliche sono equivalenti alle funzioni circolari di argomento (angolo) immaginario

‘Paradossi’ e logica scientifica

Aspetti paradossali di alcune conseguenze della meccanica relativistica?

Paradossale significa press’a poco ‘internamente contradditorio’, e anche/oppure ‘in contrasto con l’evidenza’

Nessuno di questi aspetti si ritrova nelle predizioni della RR!

Perfettamente coerenti, con la loro logica interna e con i dati sperimentali

Ma: spesso in forte contrasto con l’intuizione, o senso comune

Perche’? Il senso comune e’ costruito sull’esperienza comune, che non include gli effetti di velocita’ ~ c

Quindi: non paradossi, ma conclusioni sorprendenti

Un elenco molto parziale…

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi:

Paradosso della scala e del garage
Paradosso dei gemelli
Paradosso di Andromeda

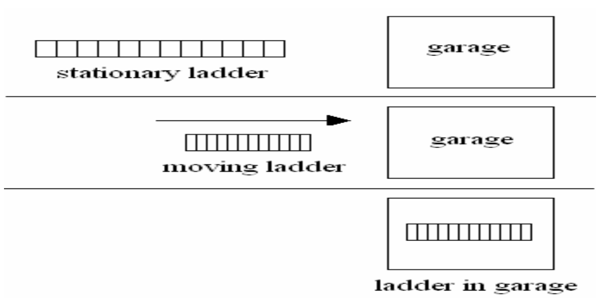
Quasi sempre legati a:

Relativita’ della simultaneita’
Sistemi di riferimento non inerziali
Confusione fra sistemi di riferimento

La scala e il garage - I

Un operaio corre con una scala di lunghezza *L* (*nel suo SRI di quiete*),ed entra in un garage lungo *L/2* (*nel suo SRI di quiete*), con porte aperte sul fronte e sul retro che si chiudono per un istante ‘quando la scala e’ all’interno’. Se l’operaio corre con velocita’ *v=0.9c*, la contrazione delle lunghezze dovrebbe consentire alla scala di rientrare completamente nel garage durante la chiusura istantanea e simultanea delle porte.

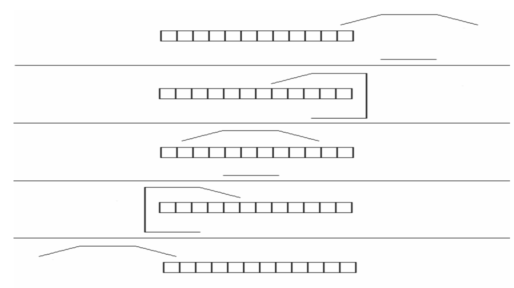
Ma se guardiamo le cose dal SRI di quiete della scala, e’ il garage ad essere contratto, e la scala non dovrebbe poterci entrare. ???



Per evitare complicazioni legate a collisioni, etc:

Le porte fronte e retro si chiudono per un istante

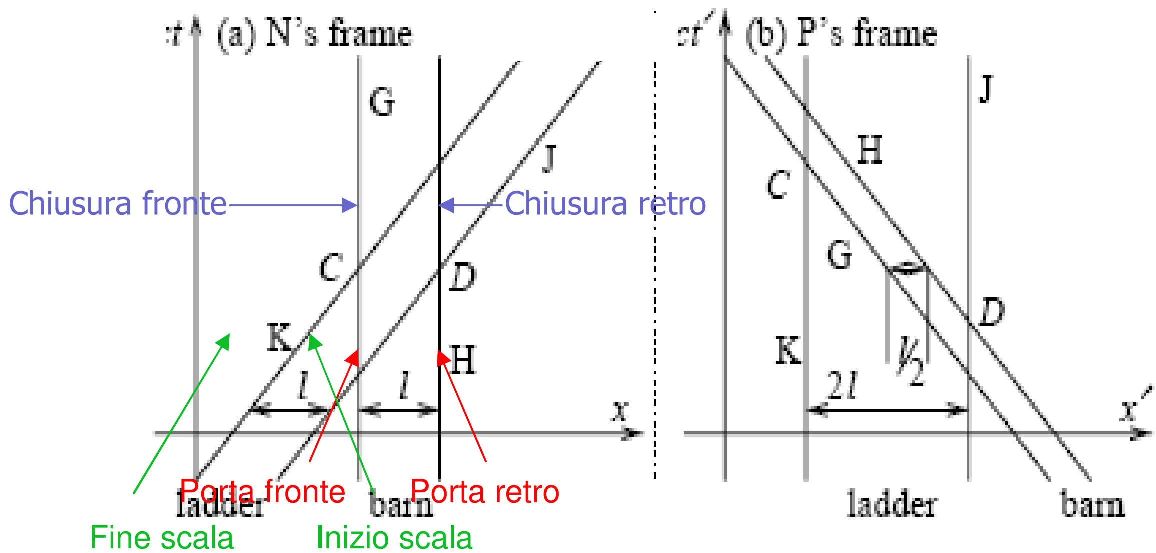
Eventi corrispondenti a chiusura: ***F*** e ***R***



Gli eventi F e R, simultanei in S (garage), non lo sono in S’ (scala).

In S’, la porta F si chiude <u>dopo</u> che si e’ chiusa la porta R

La scala e il garage - II



Riferimento:
Garage in quiete

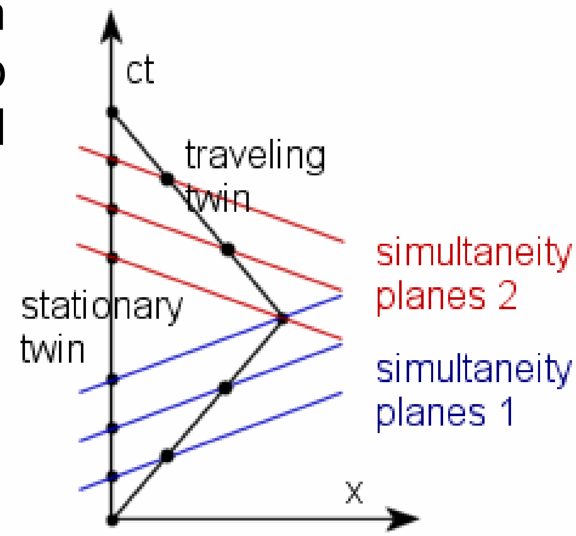
Riferimento:
Scala in quiete

Gli orologi, o i gemelli - I

Due gemelli, od orologi identici, vengono separati: uno resta sulla Terra, l’altro viaggia a grande velocita’ per *n* anni; poi inverte la marcia, e viaggia per altri *n* anni fino a tornare sulla terra. A questo punto, a causa della dilatazione dei tempi, il gemello viaggiatore e’ piu’ giovane dell’altro!

‘Paradosso’: e dal punto di vista del gemello viaggiatore ??

Risposta: il suo SR non e’ inerziale…



Gli orologi, o i gemelli - II

'Paradosso' scoperto (e risolto) da Einstein, Langevin e altri all'inizio di tutta la storia

Origine di un fiume in piena: incomprensioni, malintesi, dibattiti filosofici (quasi mai fondati su qualcosa) oltre che di un'infinita' di racconti fantascientifici

In realta', *all'interno del sistema di principi e concetti della relativita' ristretta*, nulla di paradossale o illogico

Inoltre: *ben verificato sperimentalmente* (v. dopo)

Gli orologi, o i gemelli - III

L'asimmetria fra i due orologi, o gemelli, nasce quindi dal fatto che il sistema di riposo del gemello 'viaggiatore' non e' un SRI

L'asimmetria assume che esistano SRI:

Se l'universo fosse costituito dai soli orologi A e B, la situazione sarebbe perfettamente simmetrica, e non ci sarebbe differenza nel tempo segnato dai due. Ma i SRI esistono, almeno con ottima approssimazione (v. Terra)…

In questo caso, non esisterebbero accelerazioni assolute!
O invece esisterebbero comunque? Questione delicata …

E quindi le accelerazioni sembrano essere assolute…
C'e' un principio di relativita' per i SRNI? Qual e' l'origine delle forze fittizie nei SRNI?
Principio di Mach??...

Gli orologi, o i gemelli - IV

Ma e' proprio vero ??

Collisione fra protoni di alta energia: produzione di particelle

Fra le altre, abbondante produzione di mesoni π

Particelle instabili, si disintegrano con una vita media τ_0 *= 25 ns*

Qual e' il loro percorso in una vita media?

Mesone π che esce con velocita' *v=0.01 c*

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(0.01)^2}} \simeq \tau_0 \to l = \mathrm{v}\tau \simeq 0.01c\tau_0 = 0.01\;3 10^{10} 25 10^{-9}\,cm$$

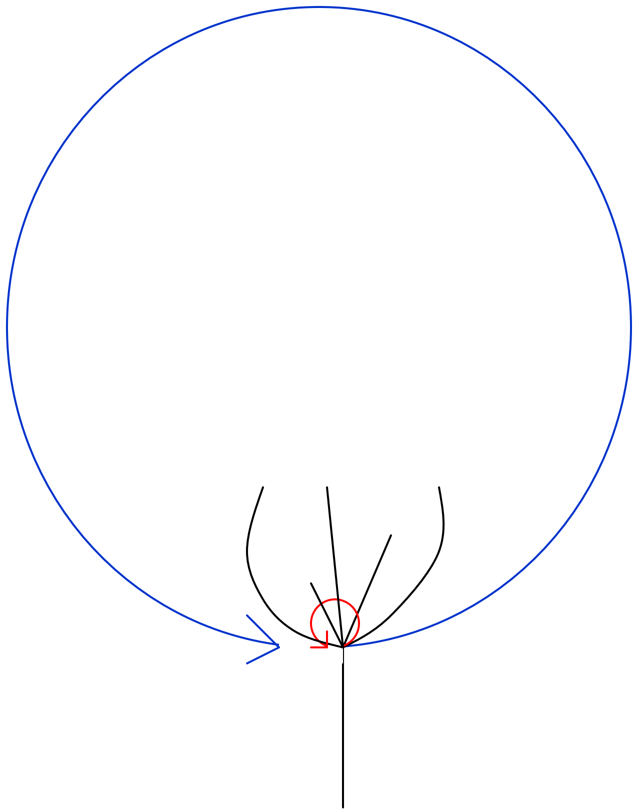
$$\to l = 7.5\;cm$$

Mesone π che esce con velocita' *v=0.99 c*

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(0.99)^2}} \simeq 7.09\tau_0 \to l = \mathrm{v}\tau \simeq 0.99\;c\;7.09\;\tau_0 = 0.99\;3 10^{10}\;7.09\;25\;10^{-9}\,cm$$

$$\to l = 5264\;cm$$

Gli orologi, o i gemelli - V



Campo ***B*** perpendicolare al piano della figura

→ π^+ con velocita' *0.99 c*

→ π^+ con velocita' *0.01 c*

Mesone π^+ blu: 'gemello' viaggiatore

Percorso circolare ~ *52 m*, compiuto in *175 ns*

Mesone π^+ rosso: 'gemello' sedentario

Percorso circolare ~ *0*, compiuto in *25 ns*

Il mesone blu torna a casa dopo il viaggio, e trova che il gemello rosso e' morto da tempo: situazione non simmetrica

Gli orologi, o i gemelli - VI

E per gli oggetti macroscopici ??

During October, 1971, four cesium atomic beam clocks were flown on regularly scheduled commercial jet flights around the world twice, once eastward and once westward, to test Einstein's theory of relativity with macroscopic clocks. From the actual flight paths of each trip, the theory predicted that the flying clocks, compared with reference clocks at the U.S. Naval Observatory, should have lost 40+/-23 nanoseconds during the eastward trip and should have gained 275+/-21 nanoseconds during the westward trip ... Relative to the atomic time scale of the U.S. Naval Observatory, the flying clocks lost 59+/-10 nanoseconds during the eastward trip and gained 273+/-7 nanosecond during the westward trip, where the errors are the corresponding standard deviations. These results provide an unambiguous empirical resolution of the famous clock "paradox" with macroscopic clocks

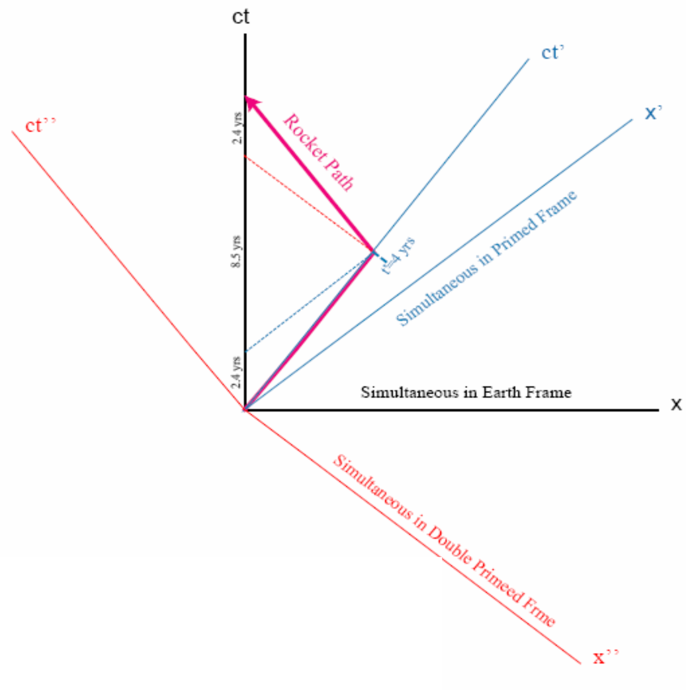
(J.C. Hafele and R. E. Keating, Science 177, 166 (1972))

Predicted:	Time difference (ns)	
	Eastward	Westward
Gravitation	144 +/- 14	179 +/- 18
Kinematic	-184 +/- 18	96 +/- 10
Net effect	-40 +/- 23	275 +/- 21
Observed:	-59 +/- 10	273 +/- 21

I gemelli e le accelerazioni - I

Nel caso limite in cui le 3 accelerazioni avvengono su intervalli molto brevi, l'andata e il ritorno avvengono quasi interamente con moto inerziale: quindi l'effetto di dilatazione dei tempi e' reciproco per i due gemelli.

Quindi l'effetto dominante e' il rallentamento (asimmetrico) dell'orologio del gemello viaggiatore durante le accelerazioni: in base al Principio di Equivalenza, esse sono equivalenti a campi gravitazionali, nei quali gli orologi cambiano ritmo



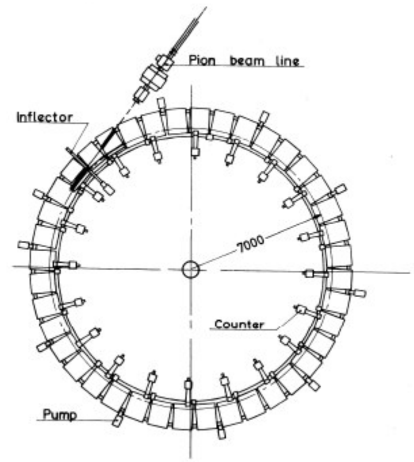
I gemelli e le accelerazioni - II

Necessario fissare un punto cruciale: *Ipotesi degli orologi*

Il ritmo osservato di un orologio dipende solo dalla velocita', non dalla sua accelerazione

Esempio (CERN, anni '60):

Fasci di muoni relativistici in anello di accumula



$$\left.\begin{array}{l}\omega = 6.81 MHz \\ R = 7m\end{array}\right\} a = \omega^2 R = 1.34\ 10^{15} g\ \ !$$

$$\beta = .9994, \quad \gamma = 29.3$$

$\tau_{misurato} = \gamma \tau_0$ OK

Ma: Variazione di velocita' e' conseguenza necessaria di ogni accelerazione

Quindi, orologi accelerati cambiano il loro ritmo perche' cambiano velocita'; e orologi in un campo gravitazionale cambiano ritmo perche' il campo e' equivalente a un riferimento accelerato

Andromeda - I

Come molti altri, legato alla relativita' della simultaneita'

M31: Galassia distante *D = 2 milioni di anni luce* da noi

Al centro di M31, alieni ostili…

Osservatore O, fermo sul marciapiede e rispetto agli alieni

Osservatore O', in bici con velocita' *v = 30 km/h* rispetto a O e a M31

Evento E_1: Gli alieni decidono di invadere la Terra

Evento E_2: O' passa accanto a O

Andromeda - II

Per O : E_1 simultaneo a E_2

Per O’: E_1 non simultaneo a E_2

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1' = \gamma\left(t_1 - v\dfrac{x_2(=D)}{c^2}\right) \simeq -v\dfrac{x_2}{c^2} = -18\ h \\ t_2' = \gamma\left(t_2 - v\dfrac{x_1}{c^2}\right) \simeq t_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi per O’ la decisione aliena e’ gia’ presa, mentre per O non lo e’

Nessun paradosso: nessuno dei due sa quale sia la decisione

Solo un fatto curioso..

Visibilita' della contrazione - I

La contrazione di Lorentz e' un fenomeno fisico non ambiguo, i cui effetti sulle misure non sono in questione (v. esempio del decadimento dei muoni cosmici).

Ma: si potrebbe davvero *vederla* in azione, p.es. fotografando – se fosse tecnicamente possibile – un oggetto in moto ad alta velocita'?

Attenzione: *vedere* e' una cosa diversa da *misurare*...Misurare gli effetti della contrazione e fotografare un oggetto contratto sono operazioni diverse: nell' atto della visione entrano in gioco i tempi di arrivo della luce dalle diverse parti dell'oggetto in movimento, che modificano gli effettidella pura contrazione.

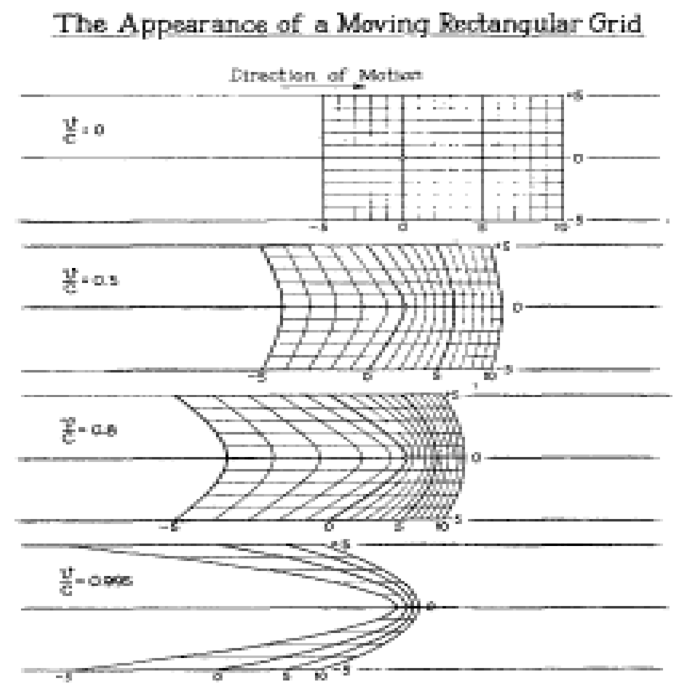
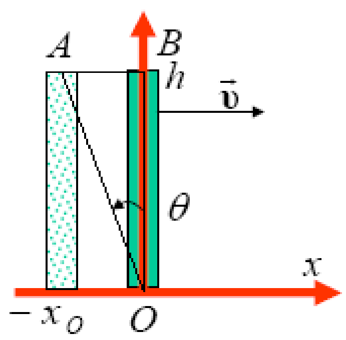


FIG. 1. The appearance of a plane grid moving at relativistic speeds. The observer is unit distance in front of the origin. For each view the direction in which the observer sees the origin is perpendicular to the motion.

Visibilita' della contrazione - II

Esempio di questo effetto: visione (o istantanea) di una sbarra in movimento



La luce che arriva dalla sbarra in movimento ad un dato istante ad un osservatore nell'origine proviene da istanti diversi per ogni segmento di sbarra

Come per l'aberrazione:

$$\sin\theta = \frac{v}{c}$$

La sbarra appare ruotata.

Effetto combinato di aberrazione e contrazione delle lunghezze:

Invisibilita' della contrazione di Lorentz

Cosa si puo' prevedere?

Si puo' fare una trasformazione analitica per la visualizzazione di oggetti che compaiono in una foto in un SRI in moto con velocita' elevata.

Ecco qualche esempio:

Figure 3: Non-relativistic view.

Figure 4: Relativistic visualization of apparent geometry with $\beta = 0.99$.

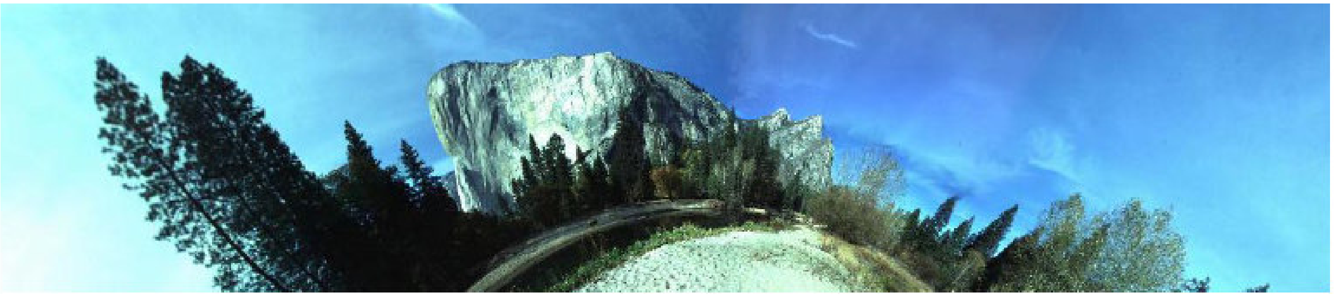


Figure 10: Flight through Yosemite Valley with $\beta = 0.95$.