

Onde, Radiazione e Relativita'

XI – Leggi di conservazione, dinamica relativistica

Leggi di Newton e relativita'

Leggi di Newton: principi generali della dinamica, la cui validita' e' basata sull'esperienza.

Nella forma con cui le conosciamo, incompatibili con i principi della relativita' ristretta.

Esempi:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \mathbf{v} \text{ puo' crescere senza limiti per } \mathbf{F} = \text{costante}$$

Ma $|\mathbf{v}| < c$ secondo la relativita'...

Principio di azione/reazione: forze uguali e contrarie, *simultanee*

Ma la simultaneita' e' relativa ...

Leggi di conservazione - I

Principali conseguenze delle leggi di Newton: *Leggi di conservazione*

Quantita' di moto $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{cost}$

Momento angolare $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \text{cost}$

Energia $E = \sum_i E_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + V_i \right) = \text{cost}$

Scritte così per un sistema di punti materiali...

Non il solo percorso logicamente possibile

Leggi di conservazione - II

Possibile partire da un principio diverso dalle leggi di Newton:

Principio di Minima Azione

Fra le altre conseguenze di questa scelta:

Leggi di conservazione \leftrightarrow Proprieta' di simmetria del sistema

Semplificando molto un soggetto non elementare:

Se l'energia totale di un sistema e' invariante rispetto a un insieme di trasformazioni di coordinate, c'e' una grandezza fisica conservata per il sistema

Principi di invarianza - I

Proprietà di *simmetria/invarianza* dell'energia di un sistema fisico isolato:
Originata da proprietà fondamentali dello spazio e del tempo

Invarianza per traslazioni → Conservazione **quantità di moto**
Legata a *omogeneità* dello spazio

Invarianza per rotazioni → Conservazione **momento angolare**
Legata a *isotropia* dello spazio

Invarianza per traslazione temporale → Conservazione **energia**
Legata a *omogeneità* del tempo

Osservazione molto importante:

Conservazione della massa? **Nessuna proprietà di invarianza...**

Principi di invarianza - II

Invarianza per **traslazioni** → Conservazione **quantità di moto**

Esempio: Moto del sistema Terra – Sole

Si considera il Sole come un punto fisso nell'origine

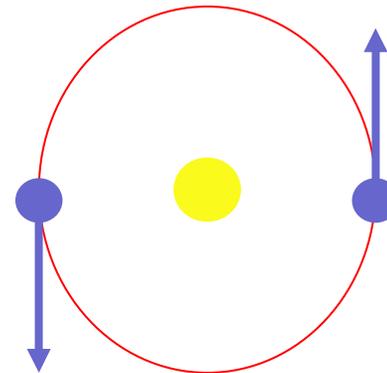
→ L'energia potenziale (e quindi quella totale) della Terra *non e'* invariante per uno spostamento generico dell'origine degli assi:

$$\left\{ V(r) = G \frac{mM}{|\mathbf{r}_T|} \right.$$

$$\left\{ T : \mathbf{r}_T \rightarrow \mathbf{r}'_T = \mathbf{r}_T - \mathbf{a} \right\}$$

$$\rightarrow V(r) \rightarrow V(r') = G \frac{mM}{|\mathbf{r}'_T|} = G \frac{mM}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{a}|} \neq V(r)$$

→ \mathbf{p}_{Terra} non e' costante



Principi di invarianza - III

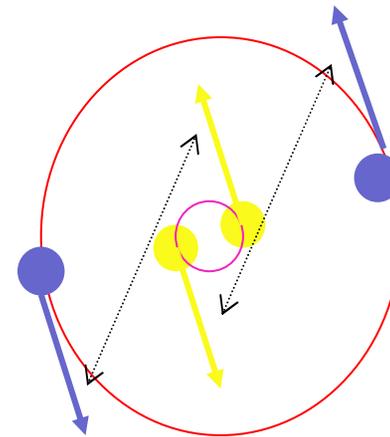
Si considera il Sole come parte del sistema

→ L'energia potenziale (e quindi quella totale) del sistema Terra+Sole e' invariante per uno spostamento generico dell'origine degli assi:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(r) = G \frac{mM}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S|} \\ \{T : \mathbf{r}_{T,S} \rightarrow \mathbf{r}_{T,S}' = \mathbf{r}_{T,S} - \mathbf{a}\} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow V(r) \rightarrow V(r') = G \frac{mM}{|\mathbf{r}_T' - \mathbf{r}_S'|} = G \frac{mM}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S|} = V(r)$$

$$\rightarrow \mathbf{p}_{Terra} + \mathbf{p}_{Sole} (= 0 \text{ nel CdM}) \text{ e' costante}$$



Principi di invarianza - III

Illustrazione della relazione invarianza-conservazione

Per una coppia di punti materiali che interagiscono tramite un potenziale funzione delle posizioni:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases}$$

$$V(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \approx V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \nabla_1 V \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla_2 V \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\nabla_1 V + \nabla_2 V) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

Invarianza di V :

$$V(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\nabla_1 V + \nabla_2 V) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \rightarrow \nabla_1 V + \nabla_2 V = 0$$

$V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ condizione sufficiente per invarianza

Poiche' $\mathbf{F} = -(\nabla_1 V + \nabla_2 V)$

Invarianza di $V \rightarrow \mathbf{F} = 0 \rightarrow \mathbf{P} = \text{cost}$

Principi di invarianza - IV

Vista la loro origine, le leggi di conservazione si possono assumere come valide per un sistema isolato (e conservativo), sia che restiamo nell'ambito pre-relativistico, sia che ci poniamo nel quadro della RR.

Ora: sappiamo che, se le TdG vengono sostituite dalle TdL, le leggi di Newton devono cambiare.

Per cambiarle:

Assumiamo valide le leggi di conservazione, e cerchiamo:

*Nuova definizione di \mathbf{p} ed E
Nuova legge del moto*

Processi di collisione - I

Caso piu' immediato di applicazione delle leggi di conservazione:

Collisione di due masse uguali

Confronto fra trattazione galileiana/newtoniana e TdL

Ipotesi non sempre esplicitamente ricordata:

La massa e' una costante di ogni corpo, indipendente dal SRI in cui viene misurata.

Conseguenza: la massa totale di un sistema isolato e' sempre conservata

Questa ipotesi e' in contrasto con le TdL, se la quantita' di moto deve conservarsi. Motivo: legge relativistica di composizione delle velocita'

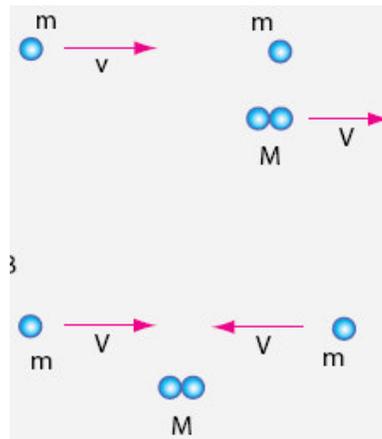
Processi di collisione - II

Esperimento ideale n. 1 (Von Laue):

Collisione completamente anelastica, osservata da due riferimenti inerziali

$$m_{(1)} + m_{(2)} \rightarrow M$$

S': Sistema di quiete di 2



S: Centro di massa

Processi di collisione - III

Descrizione galileiana/newtoniana

Ipotesi: $m=m'$, massa indipendente dal SRI in cui e' osservata

Nel SRI S (centro di massa)

$$u_1 = V, \quad u_2 = -V$$

$$mV + m(-V) = 0 = Mu' = (m + m)u' \rightarrow u' = 0 \quad \text{impulso conservato}$$

$$\text{NB: } \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV^2 \neq \frac{1}{2}(2m)u'^2 = 0 \quad \text{en. cinetica non conservata}$$

Nel SRI S' (s. di quiete di 2) (S ha velocita' $-V$ rispetto a S')

$$\begin{cases} u_1 \rightarrow \bar{u}_1 = u_1 - (-V) = V - (-V) = 2V, & u_2 \rightarrow \bar{u}_2 = u_2 - (-V) = -V - (-V) = 0 & \text{TdG} \\ u' \rightarrow \bar{u}' = u' - (-V) = 0 - (-V) = V & & \text{TdG} \end{cases}$$

$$\rightarrow m\bar{u}_1 + 0 = m2V, M\bar{u}' = 2mV \rightarrow m\bar{u}_1 + 0 = M\bar{u}' \quad \text{OK impulso conservato}$$

Processi di collisione - IV

Trattazione relativistica

Nel SRI del centro di massa, ancora:

$$\begin{cases} u_1 = u, & u_2 = -u \\ u' = 0 \end{cases}$$

Quindi la quantità di moto definita classicamente è ancora conservata in S

Ma nel SRI di quiete di 2, se usiamo la legge relativistica di trasformazione delle velocità:

$$u_1 \rightarrow \bar{u}_1 = \frac{u_1 - v}{1 - u_1 v / c^2} = \frac{u + u}{1 + uu / c^2} = \frac{2u}{1 + u^2 / c^2}, \quad u_2 \rightarrow \bar{u}_2 = \frac{u_2 - v}{1 - u_2 v / c^2} = \frac{-u + u}{1 - (-u)u / c^2} = 0$$

$$u' \rightarrow \bar{u}' = \frac{u' - v}{1 - u' v / c^2} = \frac{0 - (-u)}{1 - 0 \cdot v / c^2} = u$$

Se continuiamo ad assumere che la massa sia indipendente dal SRI, la quantità di moto *non è conservata in S'* :

$$2mu \neq \frac{2mu}{1 + u^2 / c^2}$$

Processi di collisione - V

Cosa pensiamo si debba continuare a conservare?

Massa: buona evidenza sperimentale ($\sim 10^{-6}$ nelle reazioni chimiche), non conseguente ad alcuna proprietà di invarianza che sia evidente

Impulso: buona evidenza sperimentale, conseguente a una 'evidente' proprietà di invarianza

Essendo forzato ad abbandonare una delle leggi di conservazione, Einstein abbandona la prima, per la quale non c'è ragione di sussistere a priori

Quindi: *massa dipendente dal SRI usato*

Processi di collisione - VI

Supponiamo che la massa dipenda dalla velocità: allora possiamo ancora conservarla, insieme all'impulso:

$$\begin{cases} M = m(u') + m(0) \\ Mu = m(u')u' & \rightarrow u = u' \frac{m(u')}{m(u') + m(0)} \rightarrow m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ u' = \frac{2u}{1 + u^2/c^2} \end{cases}$$

Distinzione fra *massa a riposo* $m(0)$ e *massa relativistica* $m(u)$

NB1: Tuttavia, come si vedrà il concetto di massa relativistica è alla fine superfluo, e anzi nell'insieme fuorviante

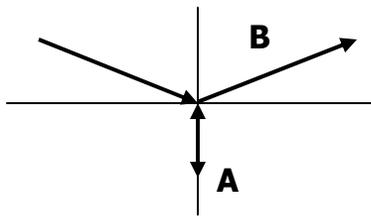
NB2: Nel fare queste considerazioni, il concetto di massa come misura della 'quantità della materia' è da considerarsi del tutto perduto (situazione che già si presenta nella meccanica newtoniana: massa come inerzia)

Processi di collisione - VII

Esperimento ideale n. 2 (Lewis e Tolman):

Collisione elastica fra sfere (massa m) lanciate fra A e B lungo y, y' con la stessa velocità $\pm u$, riferita al proprio SRI di quiete

K : SRI di quiete di A



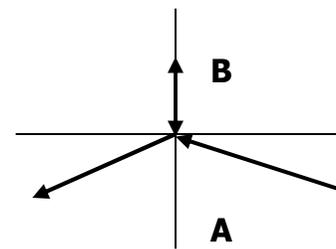
$v_{rel} = v$

Trasf. delle velocità:

$$v_x \rightarrow v_x' = \frac{v_x + v}{1 + vv_x/c^2}$$

$$v_y \rightarrow v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1 + vv_x/c^2)}$$

K' : SRI di quiete di B



Componenti della velocità delle sfere:

$$(A) \begin{cases} v_x = 0 \rightarrow v_x = 0 \\ v_y = u \rightarrow v_y = -u' \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} v_x = v \rightarrow v_x = v \\ v_y = -u\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow v_y = +u'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

Componenti della velocità delle sfere:

$$(A) \begin{cases} v_x = -v \rightarrow v_x = -v \\ v_y = u\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow v_y = -u'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} v_x = 0 \rightarrow v_x = 0 \\ v_y = -u \rightarrow v_y = +u' \end{cases}$$

Processi di collisione - VIII

Assumiamo in generale:

$$\mathbf{p} = m(v) \mathbf{v}$$

Conservazione della quantità di moto lungo x :

$$\begin{cases} m(v^{in}) v_x^{in} = m(v^{fin}) v_x^{fin} \\ v_x^{in} = v_x^{fin} \end{cases} \rightarrow v^{in} = v^{fin} \rightarrow u' = u$$

Conservazione della quantità di moto lungo y :

$$m(v^{in}) v_y^{in} = m(v^{fin}) v_y^{fin}$$

$$\rightarrow m(u)u - m\left(\sqrt{v^2 + u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) u \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m(u)(-u) \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right) + m\left(\sqrt{v^2 + u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) u \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow m(u)u - m\left(\sqrt{v^2 + u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) u \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0 \rightarrow m(u)u = m\left(\sqrt{v^2 + u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) u \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow m(u) = m\left(\sqrt{v^2 + u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \xrightarrow{u \rightarrow 0} m(0) = m(v) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ri-definizione dell'impulso

Come ridefinire l'impulso alla luce della nuova definizione di massa?

Come nella vecchia definizione, con la nuova massa:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m(0)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \mathbf{v} \equiv \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

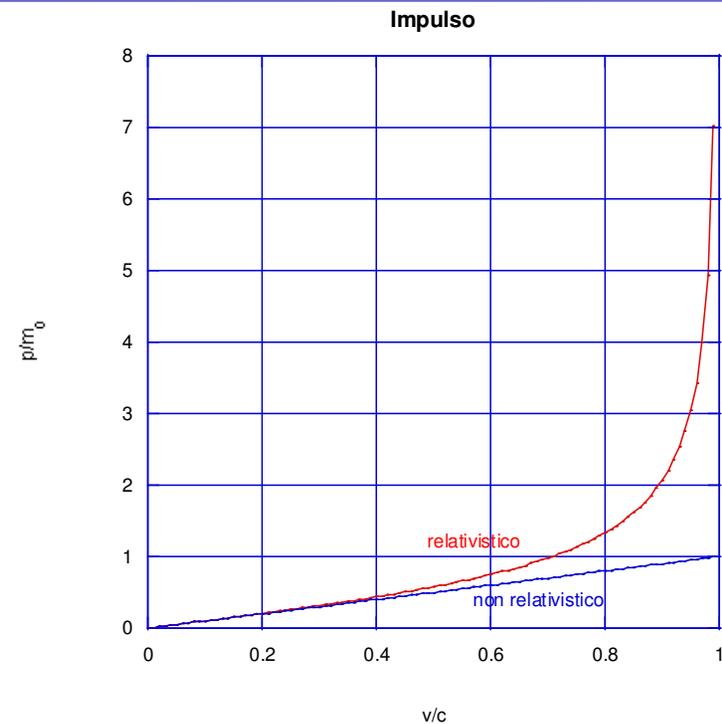
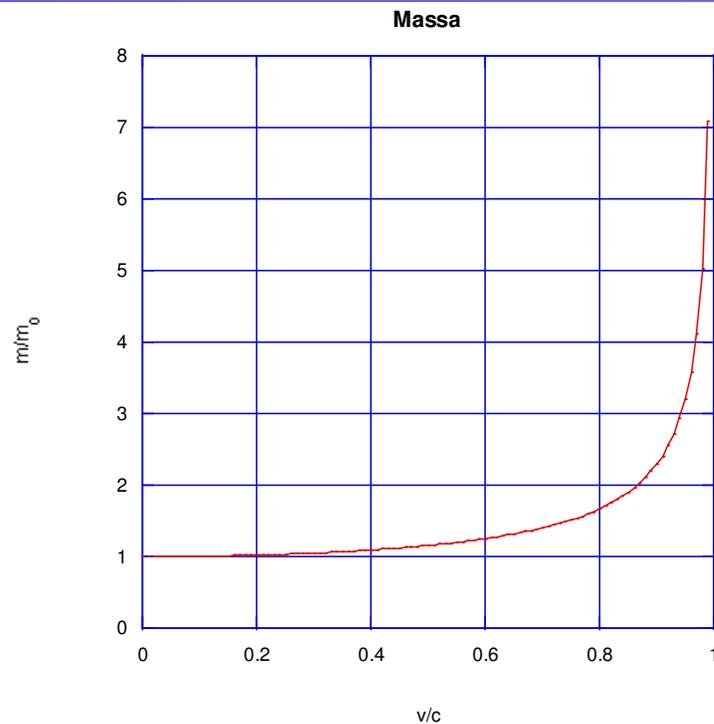
Come visto prima, con questa ri-definizione l'impulso si conserva nelle collisioni (e, in realta', in tutti i processi), in tutti i SRI, in accordo con il principio di relativita'.

Altro modo di scriverlo:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0 \boldsymbol{\beta} c}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \gamma \boldsymbol{\beta} c \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} m_0 \mathbf{v}$$

che mostra come per piccole velocita' si torni alla definizione pre-relativistica

Andamento con β



Notare la divergenza per $\beta \rightarrow 1$: una particella con velocità uguale a quella della luce avrebbe massa e quantità di moto infinite

Ri-definizione dell'energia - I

Relazione classica fra energia cinetica e impulso:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Qualche conticino sull'impulso relativistico:

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$$

$$\beta^2 \gamma^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = 1 \rightarrow \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\rightarrow p^2 = m_0^2 c^2 (\gamma^2 - 1) \rightarrow m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 - \frac{p^2}{c^2} \rightarrow \cancel{m_0^2 c^4} = \cancel{m_0^2 c^4 \gamma^2} - \cancel{p^2 c^2}$$

~~Questa e' una quantita' invariante; questo e' l'impulso relativistico (al quadrato); che cosa e' questo??~~

Ri-definizione dell'energia - II

Per capirlo, ricordiamo prima di tutto che la quantità $m_0\gamma$ ha il significato di massa relativistica.

Sviluppiamo in serie:

$$m_0c^2\gamma = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta \ll 1}{\approx} \frac{m_0c^2}{1-\beta^2/2} \underset{\beta \ll 1}{\approx} m_0c^2 \left(1 + \beta^2/2\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

Sorpresa! Nel limite di basse velocità, il termine misterioso si rivela (in parte) del tutto familiare: il secondo pezzo dello sviluppo in serie, infatti, non è altro che l'energia cinetica classica del corpo in movimento.

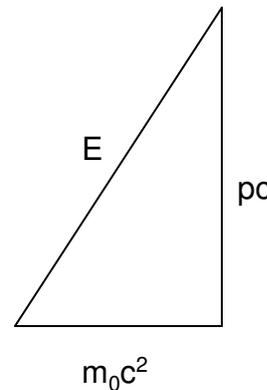
Possiamo allora definire il termine misterioso come *l'energia totale relativistica* del corpo di massa a riposo m_0 :

$$E^2 \equiv m_0^2c^4\gamma^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

Energia e impulso relativistici - I

Relazione fra i due (di tipo 'pitagorico'):

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$



Riarrangiando:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Poiche' questa e' una costante, questa e' una quantita' *invariante* (ossia, ha lo stesso valore in tutti i SRI):

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

quindi viene lasciata invariata da ogni TdL.

Energia e impulso relativistici - II

Situazione simile a quella incontrata per le TdL delle coordinate di un evento: la quantità'

$$\Delta s^2 = [\Delta(ct)]^2 - (\Delta\mathbf{r})^2$$

e' lasciata invariata da ogni TdL.

Allora, le quantità E e \mathbf{p} si trasformeranno da un SRI ad un altro con le stesse TdL:

$$p_x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right)$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (E - vp_x/c)$$

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(p_x' + \frac{vE'}{c^2} \right)$$

$$p_y = p_y'$$

$$p_z = p_z'$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (E' + vp_x')$$

Collisioni anelastiche - I

Consideriamo la solita collisione anelastica fra le particelle 1 e 2, di uguale massa a riposo m_0 , che 'restano attaccate' a formare una terza particella 3.

Nel SRI del centro di massa

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$$

mentre in ogni altro SRI:

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_3'$$

Usiamo le TdL per mettere in relazione i due insiemi di componenti:

$$\begin{cases} p_{x1}' + p_{x2}' = \gamma \underbrace{(p_{x1} + p_{x2})}_{=0} - \frac{\beta\gamma}{c} (E_1 + E_2) \\ p_{x3}' = \gamma \underbrace{p_{x3}}_{=0} - \frac{\beta\gamma}{c} E_3 \end{cases}$$
$$\rightarrow E_3 = E_1 + E_2$$

Collisioni anelastiche - II

Dalla definizione di energia totale relativistica, nel SRI S :

$$\begin{cases} E_3 = m_{03}c^2 \\ E_1 = E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases} \rightarrow m_{03}c^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\rightarrow m_{03}c^2 > 2m_0c^2 !!$$

La massa a riposo di 3 e' maggiore della somma delle masse a riposo di 1 e 2 !! L'energia cinetica di 1 e 2 e' stata convertita in contributo alla massa a riposo di 3

Quindi e' possibile convertire en. cinetica in massa

$$\Delta E = \Delta mc^2$$