

# Onde, Radiazione e Relativita'

XII – Massa ed energia, forza e accelerazione

# Massa, impulso ed energia - I

Relazione fra impulso, massa a riposo, en. cinetica:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

Se il termine cinetico e' piccolo rispetto a quello di massa:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \sim mc^2 \left( 1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} \right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Quindi: *termine di energia a riposo + termine classico*

Se il termine cinetico e' dominante:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = pc \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \sim pc \left( 1 + \frac{m^2 c^2}{2p^2} \right) \approx pc$$

Quindi: *Energia  $\propto$  Impulso*

# Massa, impulso ed energia - II

Perche' non c'e' il termine a riposo nella meccanica classica?

Conservazione della massa: in ogni processo, le masse dei corpi si conservano.

I corpi non perdono la loro identita' nei processi. Assegnare un contributo 'a riposo' all'en. totale di un corpo non modificherebbe le regole che governano i processi

Particelle a massa nulla:

$$m = 0 \rightarrow E = pc$$

Esempi: fotone, neutrino,.. Si muovono con *velocita'* =  $c$  in ogni SRI

Per esse: en. totale = en. cinetica

# Massa, impulso ed energia - III

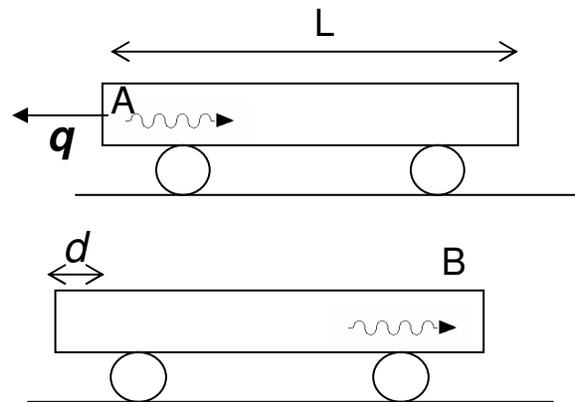
La distinzione fra termine cinetico e termine a riposo ha senso, perché quest'ultimo è un termine uguale in tutti i SRI per ogni corpo.

Nondimeno, in un processo qualsiasi (v. collisioni) ciò che si conserva strettamente è l'en. totale in senso relativistico, e non i singoli contributi: questa è la differenza essenziale rispetto alla meccanica pre-relativistica

L'altro aspetto del tutto nuovo è l'attribuzione di *inerzia* (la caratteristica che determina la dinamica di un sistema fisico) ad ogni forma di energia: pre-relativisticamente, questa era una proprietà delle sole masse.

# L'argomento di Einstein - I

L'inerzia dell'energia e' uno dei concetti originali della RR.  
Introdotta originariamente da Einstein con il seguente 'esperimento concettuale':



Scatola chiusa, ferma

La sorgente  $A$  emette un impulso luminoso, di durata  $t \ll L/c$  ed energia  $E$ .  
La quantita' di moto associata e'  $q = E/c$ , che viene compensata da una  
quantita' di moto uguale e opposta acquistata dal carrello.

# L'argomento di Einstein - II

Dopo un tempo  $T=L/c$ , l'impulso luminoso viene assorbito all'estremità  $B$ . Il carrello si ferma, dopo aver percorso la distanza

$$d = \frac{qL}{Mc}$$

in cui  $M$  è la massa del carrello.

Il centro di massa del sistema chiuso non deve però muoversi, naturalmente: quindi occorre attribuire alla radiazione emessa e assorbita una massa  $m$  tale da soddisfare:

$$mL - Md = 0 \rightarrow m = M \frac{d}{L} = M \frac{qL}{McL} = \frac{E}{c^2}$$

# Equivalenza massa-energia - I

Significato di  $\Delta E = \Delta mc^2$

Esempio visto prima: due corpi uguali, di massa  $m$ , collidono con urto completamente anelastico, formando un terzo corpo di massa  $M$

Nel SRI del centro di massa:

$$\begin{cases} v_M = 0 \\ M = 2\gamma m \end{cases} \rightarrow M > 2m$$

Descrizione pre-relativistica:

*L'en. cinetica dissipata si converte in calore; il terzo corpo ha massa  $M=2m$*

Descrizione relativistica:

*Come sopra, ma  $M>2m$*

*Dal punto di vista di una forza esterna che agisce su  $M$ , l'effetto e' diverso nei due casi!*

*L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia*

# Equivalenza massa-energia - II

Esempi:

1. Urto anelastico fra due sfere con  $m = 1 \text{ g}$ ,  $v = 10^5 \text{ cm s}^{-1}$

$$\Delta M = \underbrace{2 \frac{1}{2} m v^2}_{\Delta E} \frac{1}{c^2} = m \frac{v^2}{c^2} = m \beta^2 = +10^{-3} \frac{10^{10}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq +10^{-3} 10^{-11}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta M}{2m} = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} 10^{-11} \sim +10^{-11}$$

Incremento in massa non misurabile

2. Formazione atomo di  $H$ , da protone ed elettrone inizialmente fermi a distanza infinita:

$$M_H = 1.67338 \cdot 10^{-24} \text{ g} = m_p + m_e + \frac{1}{c^2} \underbrace{E_L}_{\text{En. di legame } < 0} = m_p + m_e - \frac{1}{c^2} 13.6 \text{ eV}$$

$$\Delta m = \frac{E_L}{c^2} = - \frac{13.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq -2.4 \cdot 10^{-32} \text{ g} \rightarrow \frac{\Delta m}{M_H} \simeq - \frac{2.4 \cdot 10^{-32}}{1.67338 \cdot 10^{-24}} \approx -1.4 \cdot 10^{-8}$$

Decremento in massa difficile da misurare (possibile oggi?)

# Equivalenza massa-energia - III

3. Formazione nucleo di deuterio, da protone e neutrone inizialmente fermi e separati:

$$M_D = 3.34334 \cdot 10^{-24} \text{ g} = m_p + m_n + \underbrace{E_L}_{\text{En. di legame } < 0} = m_p + m_n - 2.226 \text{ MeV}$$

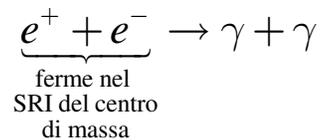
$$\Delta m = \frac{E_L}{c^2} = -\frac{2.226 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq -0.396 \cdot 10^{-26} \text{ g}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta m}{M_D} \simeq -\frac{0.396 \cdot 10^{-26}}{3.34334 \cdot 10^{-24}} \approx -1.19 \cdot 10^{-3}$$

Decremento in massa facile da misurare !

# Equivalenza massa-energia - IV

4. Conversione totale di massa in energia: annichilazione elettrone positrone in 2 fotoni

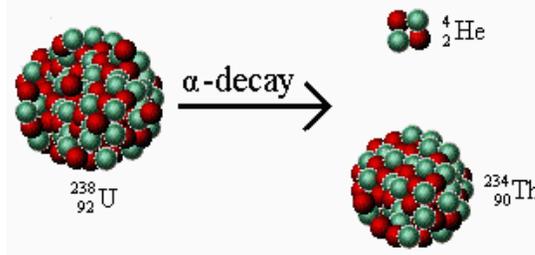


Processo comune fra particelle elementari: annichilazione a riposo particella-antiparticella

Elettrone e positrone scompaiono; i due fotoni escono "schiena a schiena", portando via ciascuno l'energia (solo cinetica, visto che  $m_\gamma=0...$ )  $E_\gamma = m_e c^2$

# Equivalenza massa-energia - IV

5. Conversione *parziale* di massa a riposo in energia cinetica.  
Es. decadimento  $\alpha$  del nucleo di  $U^{238}$ :



En. cinetica dei nuclei figli = 4.3 MeV

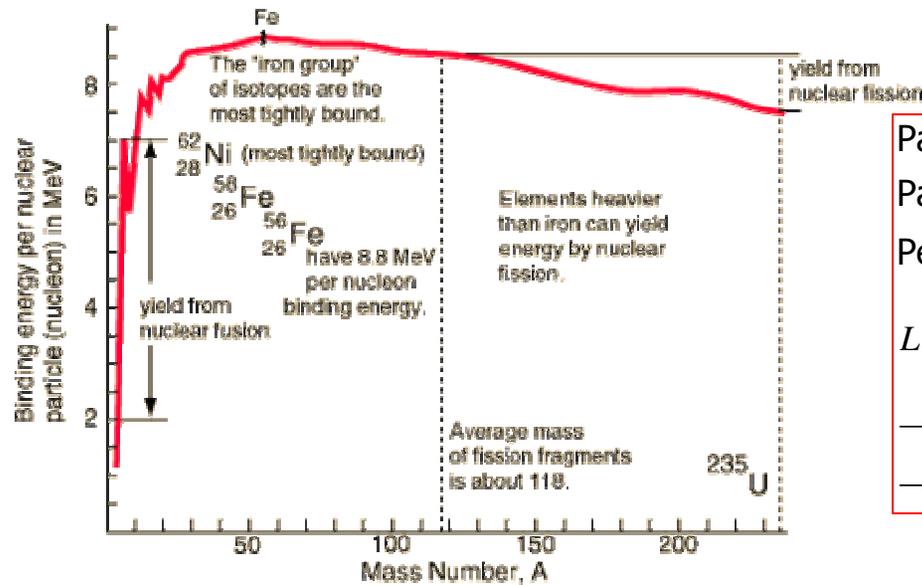
Decremento in massa a riposo:

$$\Delta M = M_{U^{238}} - m_{Th^{234}} - m_{\alpha} = \frac{4.3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{20}} \text{ g} = 0.48 \cdot 10^{-33} \text{ g}$$

Processo *spontaneo*, esotermico: il nucleo di  $U^{238}$  e' *instabile*

# Equivalenza massa-energia - V

6. Energia di legame/A dei nuclei vs. numero di massa A  
 Energia richiesta per separare i singoli nucleoni dal nucleo



Particelle libere:  $E_{tot} = E_{cin} > 0$

Particelle legate:  $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$

Per forza attrattiva:

$$L = \int_{\infty}^r \underbrace{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{<0} = [U(r) - U(\infty)] = U(r) = E_{pot}$$

$$\rightarrow E_{pot} < 0 \rightarrow E_{tot} < E_{cin}$$

$$\rightarrow E_L = E_{tot} - E_{cin} < 0$$

# Un punto un po' sottile...

In che cosa il decadimento del nucleo instabile in due nuclei figli differisce dal seguente esempio, certamente pre-relativistico?

*Due masse  $m_1, m_2$  sono appoggiate alle estremità di una molla compressa, priva di massa, di costante elastica  $k$ . La molla viene lasciata libera, e l'en.potenziale elastica si trasforma in en. cinetica...Non è la stessa cosa??? (Al di là del fatto che l'en. potenziale ha segno opposto nei due casi...)*

Risposta: No! La massa totale iniziale e finale è identica secondo la fisica pre-relativistica, ma non lo è secondo la RR

(Se misuriamo la massa di  $m_1, m_2$ +molla compressa con un dinamometro, e dopo il rilascio p.es. misuriamo le masse  $m_1, m_2$  dalle loro accelerazioni in un campo esterno, secondo Newton troviamo *lo stesso valore totale*, secondo Einstein troviamo *valori diversi*)

# Energia da fissione nucleare - I

Nuclei medio-leggeri: un po' piu' legati dei nuclei pesanti

La massa di un nucleo pesante che possa fissionare (= scindersi, spontaneamente o quasi) in due nuclei leggeri e' maggiore della somma delle masse dei prodotti della fissione. La differenza si ritrova come en. cinetica dei prodotti stessi, che puo' essere usata per scaldare un assorbitore ( o per produrre un'esplosione su larga scala).

Processo: avviene a temperatura ambiente, e puo', una volta innescato, procedere autonomamente, purché siano verificate alcune condizioni (presenza di nuclei fissionabili per urto da neutroni di energie 'termiche', emissione di neutroni liberi nella fissione, probabilita' alta di urto neutrone-nucleo, presenza di un sistema di termalizzazione dei neutroni emessi...)

Prodotti di fissione: fra di essi, spesso isotopi radioattivi a vita lunga → scorie

# Energia da fissione nucleare - II

Esempio di reazione di fissione indotta da neutroni:



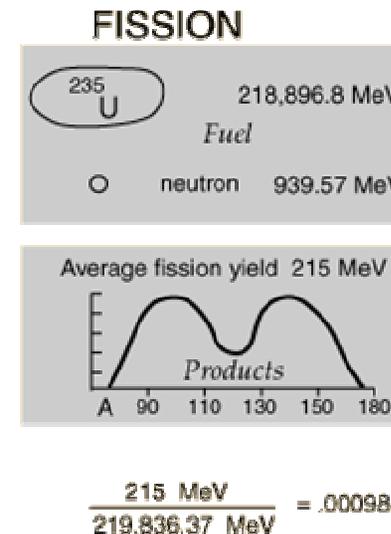
Energia neutrone incidente: termica

Prodotti di fissione:

Tipicamente  $A \sim 100 \div 130$

Resa energetica  $\sim 200 \text{ MeV/nucleo}$

Circa 1‰ della massa totale si trasforma in energia cinetica dei neutroni



# La fusione - I

Grafico dell'en. di legame/A vs. A: anche i nuclei piu' leggeri sono meno legati di quelli medio-leggeri (con un po' di altalena all'inizio...).

E' possibile ottenere energia anche dal processo inverso a quello di fissione, ossia dalla fusione nucleare. Due nuclei leggeri possono fondersi in uno piu' pesante, con rilascio di energia cinetica se la somma delle masse dei prodotti e' minore di quella delle masse dei reagenti.

Interessante per la produzione di energia, perche':

- *non richiede nuclei pesanti e fissionabili, come l'uranio, relativamente rari, costosi e pericolosi da maneggiare, ma elementi comuni e innocui come l'idrogeno o il deuterio*
- *non porta a produrre nuclei instabili, che sono sorgenti di radiazioni, in misura apprezzabile*

Ma: *solo a temperatura elevatissima* (le reazioni di fusione avvengono fra nuclei tutti con carica positiva: l'en. cinetica dei reagenti deve essere elevata perche' si possa superare la repulsione coulombiana)

# La fusione - II

Esempio di reazione di fusione  ${}^3\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow \alpha + \text{N} + 17.6 \text{ MeV}$

FUSION	
deuterium	1875.62 MeV
<i>Fuel</i>	
tritium	2808.92 MeV
<i>Products</i>	
alpha	3727.38 MeV
neutron	939.57 MeV
D-T fusion yield:	17.6 MeV
Fractional yield:	$\frac{17.6 \text{ MeV}}{4684.54 \text{ MeV}} = .00375$

Resa notevolmente superiore alla fissione: fattore 3-4  
Essenzialmente, energia cinetica dei neutroni

# Le reazioni termonucleari stellari

Da dove viene l'energia delle stelle?

Da processi termonucleari come quelli descritti; le temperature elevate sono fornite dall'attrazione gravitazionale che tende a comprimere il plasma e a scaldarlo.

Cicli che corrispondono agli stadi successivi dell'evoluzione stellare

## Ciclo dell'idrogeno

$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$	.42 MeV
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$	1.02 MeV
${}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.49 MeV
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p + p$	12.86 MeV
total	<b>26.72 MeV</b>

## Ciclo dell'elio

${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1.59 MeV
${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	13 MeV
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	10.78 MeV
${}^8\text{Be} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$	.095 MeV
total	<b>12.595 MeV</b>

Dopo quello dell'elio: alcuni altri cicli, fino a produrre nuclei di Fe.

La fusione del Fe e' un processo endotermico, quindi l'evoluzione stellare si arresta (esaurimento combustibile..).

Possibili finali (a seconda della massa):

*Nana bianca*, oppure *Supernova*, che si spegne in una *stella di neutroni* o in un *buco nero*

# PET - I

La relativita' per la medicina: *Positron Emission Tomography*

Relativita' 1: Decadimento radioattivo

Relativita' 2: Antimateria

Relativita' 3: Conversione massa – energia

Ovvero:

Perche' la ricerca fondamentale e' essenziale per quella applicata

# PET - II

Decadimento radioattivo:

Fra le sue varianti, il decadimento  $\beta$

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_e = 0,00091 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  Energeticamente permesso

$$m_n c^2 > m_p c^2 + m_e c^2$$

$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  Energeticamente proibito

$$m_p c^2 < m_n c^2 + m_e c^2$$

Quindi:

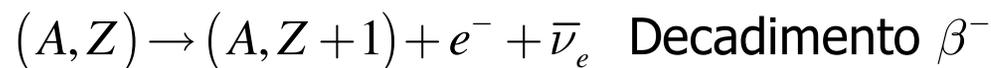
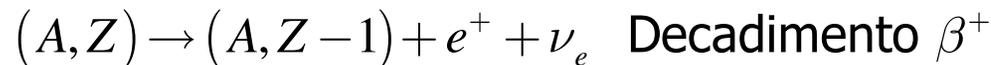
$n$  instabile (vita media  $\frac{1}{4}$  d'ora),  $p$  stabile (vita media  $> 10^{31}$  anni)

# PET - III

Ma: nei nuclei,  $p$  e  $n$  sono legati

In media:  $E_{legame} \sim \text{Alcuni MeV}$

Quindi puo' accadere che siano energeticamente permessi processi del tipo



Il nucleo figlio e' pesante e porta via quantita' di moto, ma non energia

La differenza di en. a riposo fra nucleo madre e nucleo figlio va in:

*En. a riposo dell'elettrone/positrone*

*En. cinetica di elettrone/positrone e neutrino  $\sim 1 \text{ MeV}$*

Neutrino: solo interazione debole, di fatto invisibile

Quindi: *Come risultato del decadimento  $\beta^+$ , emissione di positroni che si muovono nel materiale, perdendo continuamente energia per collisioni fino a termalizzare*

# PET - IV

Ma che cos'è un positrone?

1925: Scoperta della Meccanica Quantistica (Eq. di Schrodinger, Relazione di indeterminazione di Heisenberg, Interpretazione statistica di Born)

1928: 'Matrimonio' fra MQ e Relatività ristretta (Eq. di Dirac)

*Previsione dello spin  $\frac{1}{2}$  per l'elettrone* OK

*Previsione delle antiparticelle* ??

Ogni particella ha una 'gemella': stessa massa, stesse proprietà, carica opposta

1932: Scoperta del positrone nella radiazione cosmica (Anderson) OK!

# PET - V

Radioisotopi normalmente in uso e relative vite medie:

$^{11}\text{C}$  (20 min)

$^{13}\text{N}$  (10 min)

$^{15}\text{O}$  (2 min)

$^{18}\text{F}$  (110 min)

Contenuti in molti composti normalmente assimilabili

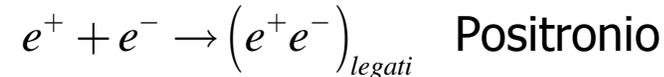
Percorso positrone in tessuto fino a termalizzazione:  $\sim$  mm

Determina la risoluzione spaziale dello scan

# PET - VI

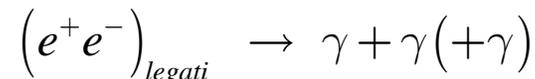
Annichilazione:

Positrone termalizzato trova rapidamente un elettrone libero



'Atomo' simile a quello di H, con il positrone al posto del protone

Instabile: a differenza di quello di H, possibilita' della reazione di annichilazione



Annichilazione in 2 raggi  $\gamma$  molto rapida:  $\tau \sim 0.125 \text{ ns}$

Risultato: conversione completa di energia a riposo in radiazione  $\gamma$

$$\begin{cases} E_\gamma^1 + E_\gamma^2 = 2m_e c^2 \\ E_\gamma^1 = E_\gamma^2 \end{cases} \rightarrow E_\gamma^{1,2} = m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

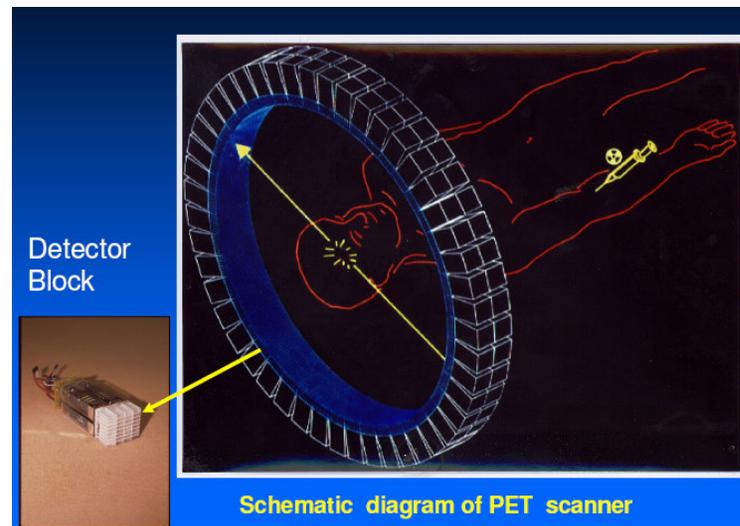
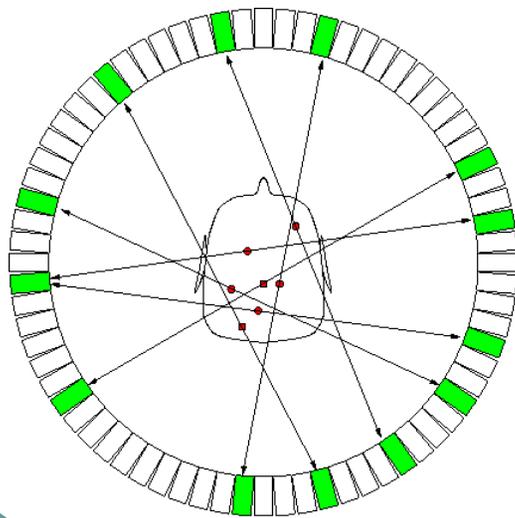
# PET - VII

Linea di volo: contiene il vertice di annichilazione

Emissione dei 2  $\gamma$ : isotropa

→ Rivelando in coincidenza temporale diverse coppie di  $\gamma$  emesse ad angoli diversi si determina il vertice

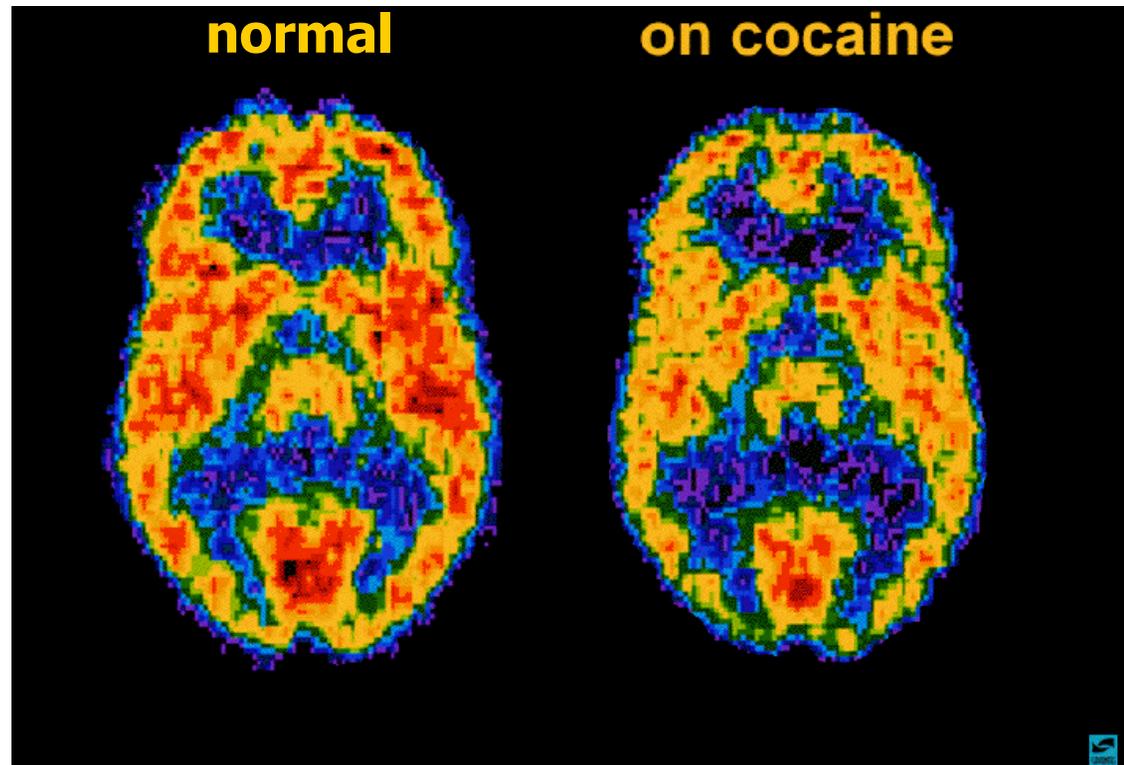
→ Il rate di coincidenze in funzione dell'angolo rivela la struttura in 3D della distribuzione dei vertici



# PET - VIII

PET contro la droga!

Uso di cocaina e riduzione dell'attività cerebrale: Densità di glucosio



# La legge dinamica in RR - I

Puo' essere interessante chiedersi: cosa sostituisce la legge fondamentale della dinamica in RR?

Il soggetto e' meno importante di quel che puo' sembrare, perche' i problemi dinamici in RR devono venire affrontati da un punto di vista diverso da quello pre-relativistico: l'impossibilita' di azioni a distanza (conseguenza di un limite invalicabile alla velocita' di propagazione delle interazioni) rende indispensabile introdurre il concetto di campo (vedi caso del campo elettromagnetico), il che sposta il problema dalla descrizione del moto dei sistemi materiali a quello della descrizione della dinamica dei sistemi+campi coinvolti nelle interazioni.

E' nondimeno possibile, in una certa misura, estendere la descrizione pre-relativistica in modo da renderla coerente con le TdL, il che ha qualche utilita' nella trattazione di esempi semplici di sistemi chiusi, che non scambiano impulso ed energia con l'esterno.

# La legge dinamica in RR - II

La legge fondamentale deve garantire la conservazione dell'impulso e dell'energia (relativistici) per un sistema isolato.

Possiamo assumere quindi, per un punto materiale:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{v}) = m_0\mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt} + m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0\mathbf{v}\underbrace{\nabla_{\mathbf{v}}(\gamma)}_{=\frac{d\gamma}{dt}}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

rimanendo per ora poco definite le proprietà della forza.

Nello stesso modo possiamo assumere come definizione della potenza esercitata su un punto in movimento l'estensione della definizione pre-relativistica:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\rightarrow P = m_0\mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt} \cdot \mathbf{v} + m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = m_0v^2\underbrace{\nabla_{\mathbf{v}}(\gamma)}_{=\frac{d\gamma}{dt}}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

$\gamma$  è funzione di  $t$  tramite le  $v_x, v_y, v_z$

# La legge dinamica in RR - III

Ora:

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla_v(\gamma)}_{\frac{d\gamma}{dt}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2}} \right) \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial v_y} \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2}} \right) \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2}} \right) \frac{dv_z}{dt} \\ &= \frac{v_x/c^2}{(1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2)^{3/2}} \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_y/c^2}{(1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2)^{3/2}} \frac{dv_y}{dt} + \frac{v_z/c^2}{(1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2)^{3/2}} \frac{dv_z}{dt} \\ &= \frac{1}{c^2} \gamma^3 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbf{F} = m_0 \mathbf{v} \underbrace{\nabla_v(\gamma)}_{\frac{d\gamma}{dt}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m_0 \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0 \gamma^3 \mathbf{v} \left( \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right) + m_0 \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Si osservi che  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = c d\boldsymbol{\beta}/dt$  non sono, in generale, paralleli...

$$P = m_0 v^2 \underbrace{\nabla_v(\gamma)}_{\frac{d\gamma}{dt}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m_0 \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{m_0}{c^2} v^2 \gamma^3 \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) + m_0 \gamma \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{m_0}{c^2} \gamma \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \underbrace{(v^2 \gamma^2 + c^2)}_{=c^2 \gamma^2} = m_0 \gamma^3 \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = m_0 c^2 \gamma^3 \left( \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right)$$

$$\rightarrow L = \int P dt = \int m_0 c^2 \gamma^3 \left( \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right) dt = m_0 c^2 \int_0^\beta \frac{\beta d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad L = \text{En. cinetica} = \text{En. totale} - E. \text{riposo}$$

Se  $\mathbf{v} // \mathbf{a}$

# Forza costante - I

In generale:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = q\mathbf{E}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\gamma m_0} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma m_0} \frac{d(\gamma m_0)}{dt}; \quad \frac{d(\gamma m_0)}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\gamma m_0} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma m_0 c^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$$

Se  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$  (p.es. carica puntiforme in campo elettrico costante //  $\mathbf{v}$  iniziale), moto rettilineo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1-u_x^2/c^2}} \right) = \frac{qE}{m_0} \rightarrow \frac{u_x}{\sqrt{1-u_x^2/c^2}} = \frac{qE}{m_0} t + C_1$$

$$\rightarrow v_x = \frac{qEt}{m_0 \left[ 1 + q^2 E^2 t^2 / m_0^2 c^2 \right]^{1/2}} \quad \text{se } C_1 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{m_0 c^2}{qE} \left( 1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} + \underbrace{C_2}_{\text{Si puo' porre } = 0}$$

Non si ottiene dal caso NR con la sostituzione  $m \rightarrow m_0 \gamma$

Se  $qEt \ll m_0 c$   $v_x \approx \frac{qE}{m_0} t$

Limite non relativistico

Se  $qEt \ll m_0 c$   $x \approx \frac{qE}{2m_0} t^2$

# Forza costante - II

Altro caso interessante di forza costante: carica puntiforme in campo magnetico costante. Allora:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$$

*Si ottiene* dal caso NR con la sostituzione  $m \rightarrow m_0\gamma$

$$\rightarrow \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m_0\gamma} \rightarrow \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m_0} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{v} \rightarrow |\mathbf{v}| = \text{costante}$$

Situazione analoga al caso non-relativistico: traiettoria elicoidale attorno alle linee di campo di  $\mathbf{B}$ , con la sola variante della "massa relativistica" al posto della "massa non relativistica"

Come si vede: il concetto di *massa relativistica* ha valore e utilità limitati..