

Onde, Radiazione e Relativita'

XIII – La radiazione di sincrotrone

Luce di sincrotrone

Radiazione di sincrotrone (ciclotrone, betatrone):

Radiazione elettromagnetica emessa da particelle cariche in moto circolare
Moto circolare uniforme: moto accelerato → Emissione di radiazione

Fenomeno caratteristico di particelle cariche con velocità relativistiche → Tipico dei fasci circolanti negli acceleratori circolari

Predetto dai primi del '900, osservato per la prima volta nel 1947 alla General Electric di Schenectady, NY (USA)

Acceleratori di elettroni come sorgenti di 'luce' con caratteristiche uniche

Gran numero di applicazioni, anche per lo studio dei materiali

Campi di radiazione

Espressione valida in generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]}{c^2 \left(1 - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^3} \\ \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E}_{rad} \end{array} \right.$$

Ricordiamo, nel limite non relativistico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \\ \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{rad} \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi c} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$NB: \mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \mathbf{E} \parallel \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Formula di Larmor - I

Usando il limite non relativistico:

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{S}| r^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 r^2 = \frac{\mu_0 e^2}{64\pi^3 \epsilon_0} \left| \hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2}{64\pi^3 \epsilon_0} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \Theta$$

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\mathbf{a}|^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left| \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|^2, \mathbf{q} = m\mathbf{v}$$

Formula di Larmor - II

Cosa diventa la formula di Larmor nel caso generale, relativistico?

Calcoli abbastanza complicati..

In breve: Distinzione fra

Potenza che transita attraverso l'elemento di superficie ad un dato istante

Potenza emessa per unita' di angolo solido ad un (altro) dato istante

Le due quantita' non sono identiche, anche se sono legate

Formula di Larmor - III

$$d^3W = \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dA \rightarrow d^2W = \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dA$$

L'energia così scritta si può esprimere in termini di t' (tempo ritardato) invece che di t (tempo attuale):

$$t = t(t') \rightarrow d^2W = \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dA = \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t(t')) \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{dt}{dt'} dt' dA = \int \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t(t')) \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{\equiv \frac{d^3W}{dAdt'}} dt' dA$$

$\frac{d^3W}{dAdt'}$: energia irraggiata a t' che poi passerà per dA a t

$$\rightarrow \frac{d^3W}{dAdt'} R^2 = \frac{d^3W}{d\Omega dt'} \equiv \frac{d^2P(t')}{d\Omega}$$

Si può dimostrare (...!) che:

$$\frac{d^2P(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \left((\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right)}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right]^2 \Bigg|_{t=t'}$$

Acceleratori - I

Particelle cariche (elettroni, protoni, ioni, ..) in moto

Azione di campi elettromagnetici oscillanti: *cavita' a radiofrequenza*

Azione di campi magnetici statici: *campo guida*

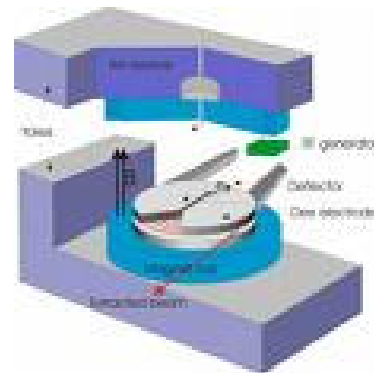
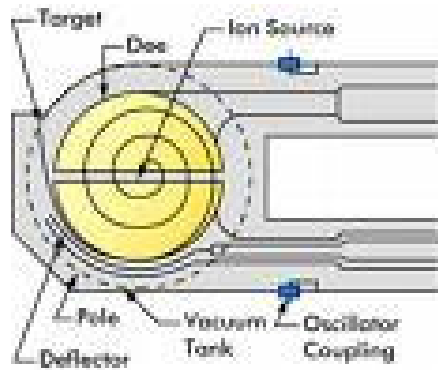
Guadagno di energia a ogni passaggio attraverso le cavita'

Orbita a raggio crescente (campo fisso)

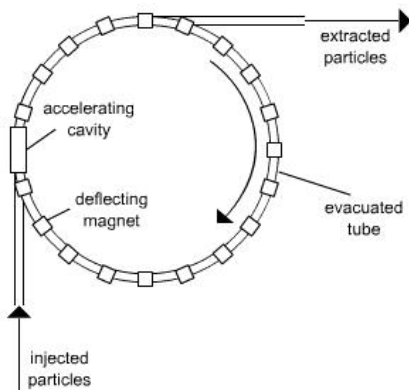
Orbita a raggio fisso (campo crescente)

Acceleratori - II

Ciclotrone: Campo fisso, raggio crescente

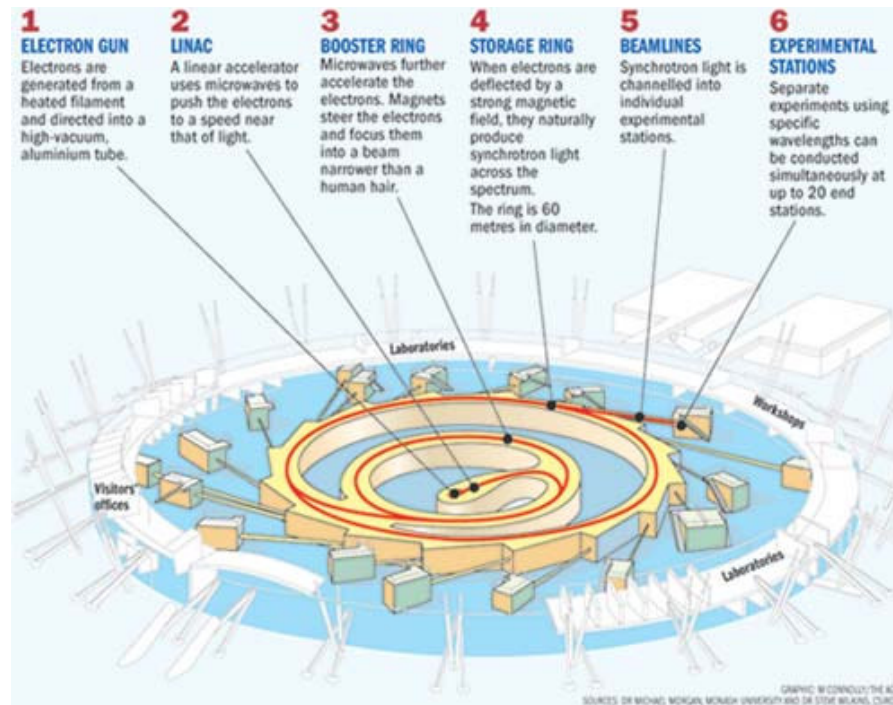


Sincrotrone: Raggio fisso, campo crescente



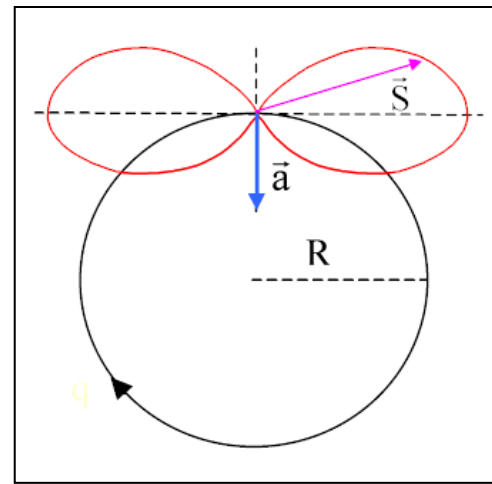
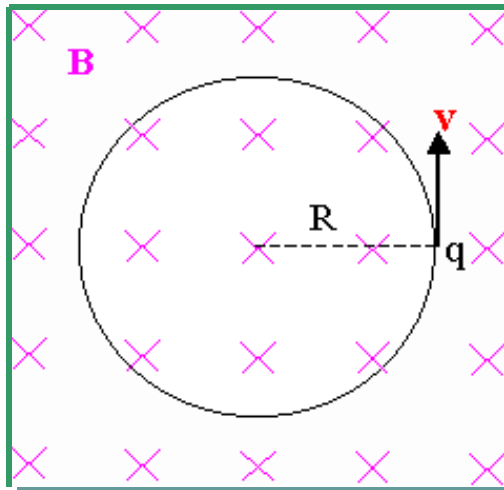
Acceleratori - III

Schema di un sincrotrone a elettroni per produzione di luce di sincrotrone



Radiazione di ciclotrone

$$v \ll c$$

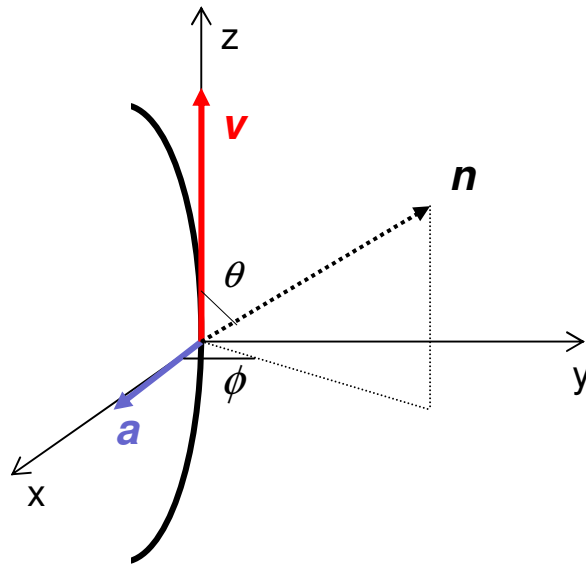


Radiazione di sincrotrone - I

Quello che ci interessa e' il caso in cui $\mathbf{acc} \perp \mathbf{vel}$

Questo e' quello che si presenta quando un elettrone si muove in un campo magnetico uniforme

Es.: Moto nel piano $xz \leftarrow \mathbf{B} \parallel$ asse y



θ : angolo di osservazione
rispetto alla velocita'
istantanea dell'elettrone

ϕ : angolo di tilt rispetto al
piano dell'orbita

Radiazione di sincrotrone - II

La distribuzione angolare della radiazione emessa e':

$$\frac{d^2 P}{d\Omega} = \frac{e^2 \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|^2}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]$$

Integrando sugli angoli:

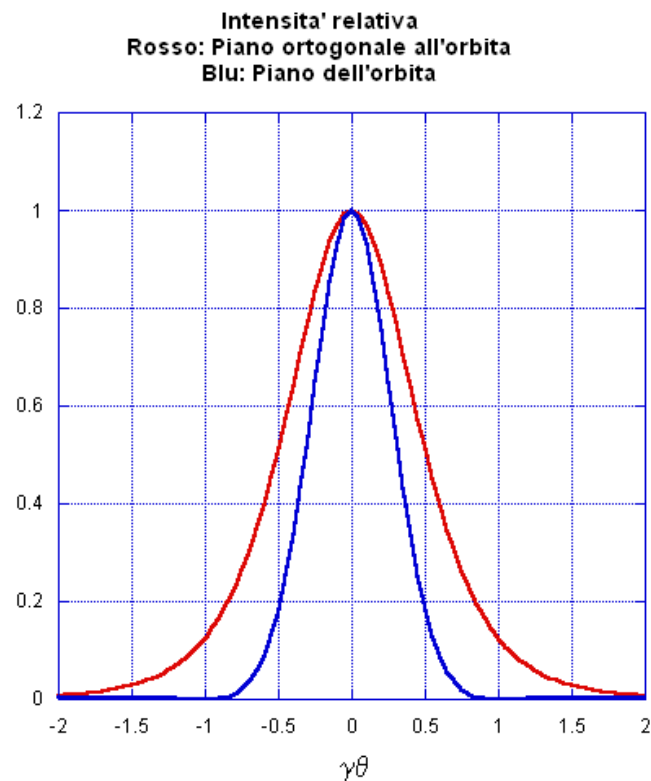
$$P = \frac{2e^2 c (\beta \gamma)^4}{3R^2} = \frac{2e^2 c}{3R^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \beta^4$$

Approssimazione di angoli polari piccoli:

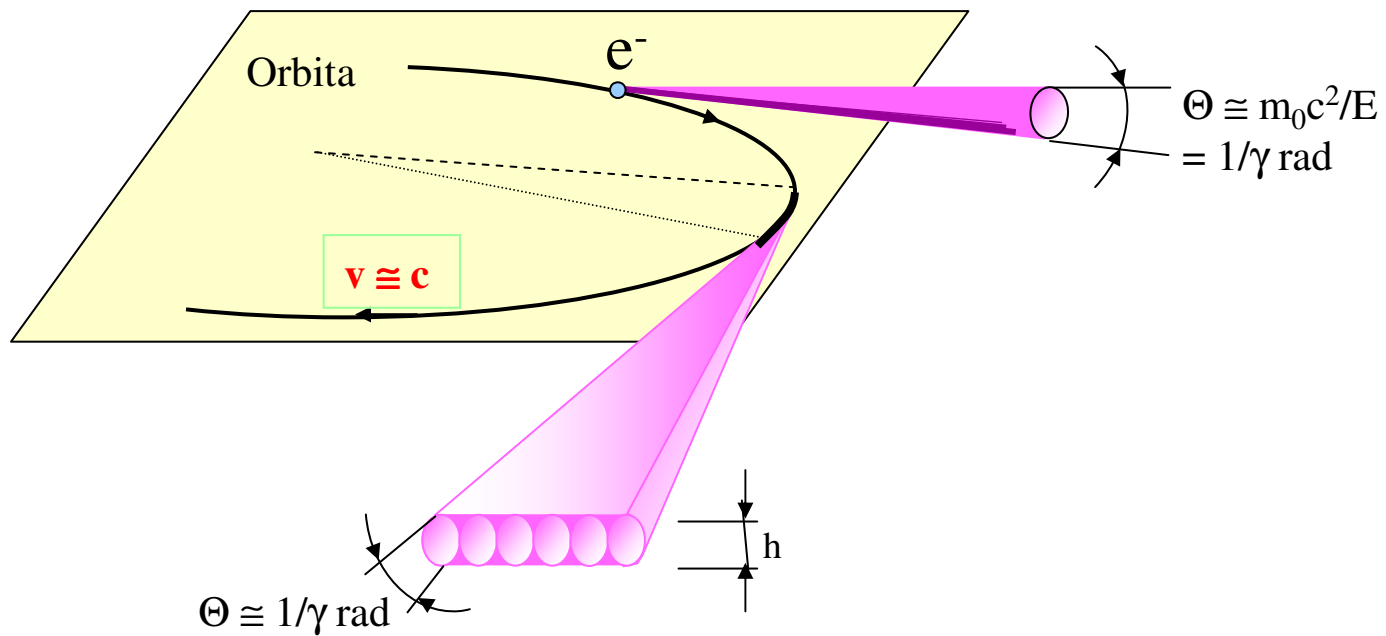
$$\frac{d^2 P}{d\Omega} = \frac{2e^2 \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|^2 \gamma^6}{\pi c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \cos^2 \varphi \right]$$

Radiazione di sincrotrone - III

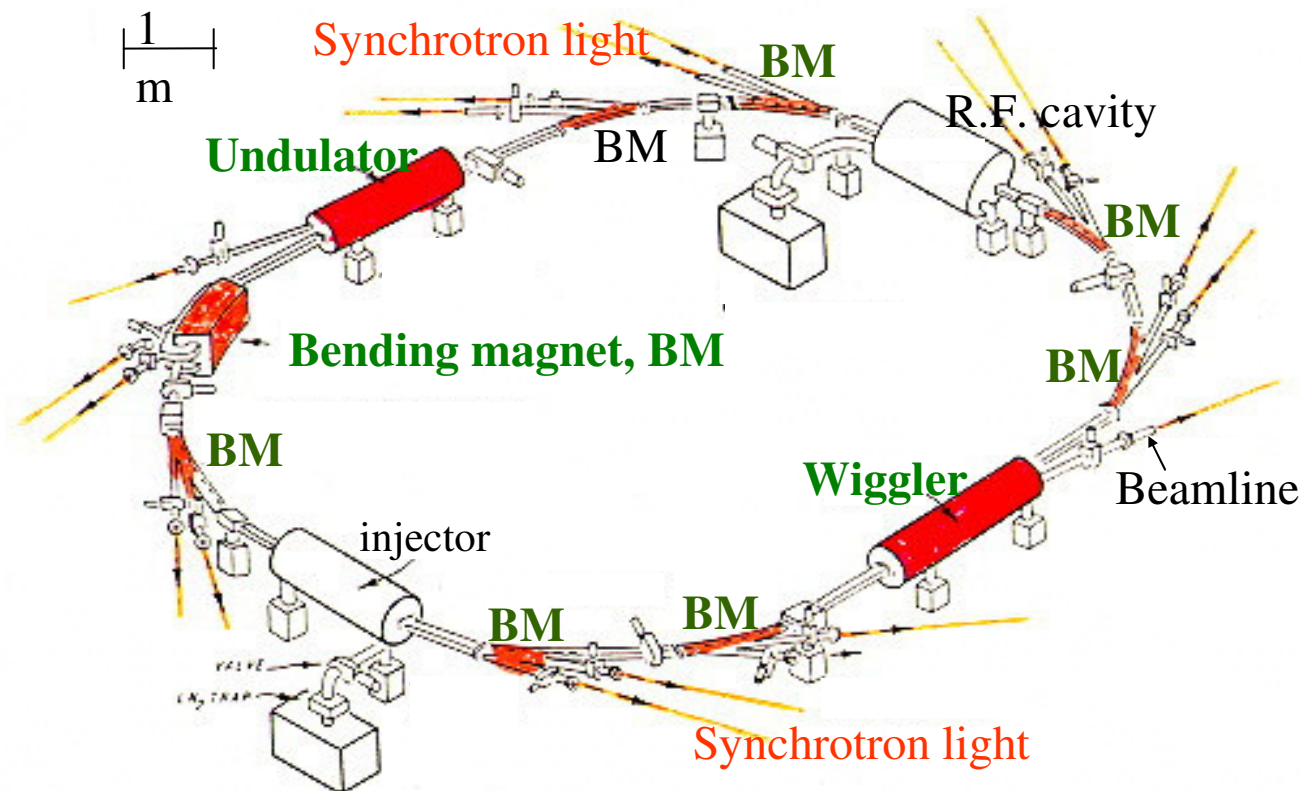
La maggior parte della radiazione e' confinata entro un angolo $\sim 1/\gamma$ rispetto alla velocita' dell'elettrone



Radiazione di sincrotrone - IV



Luce di sincrotrone

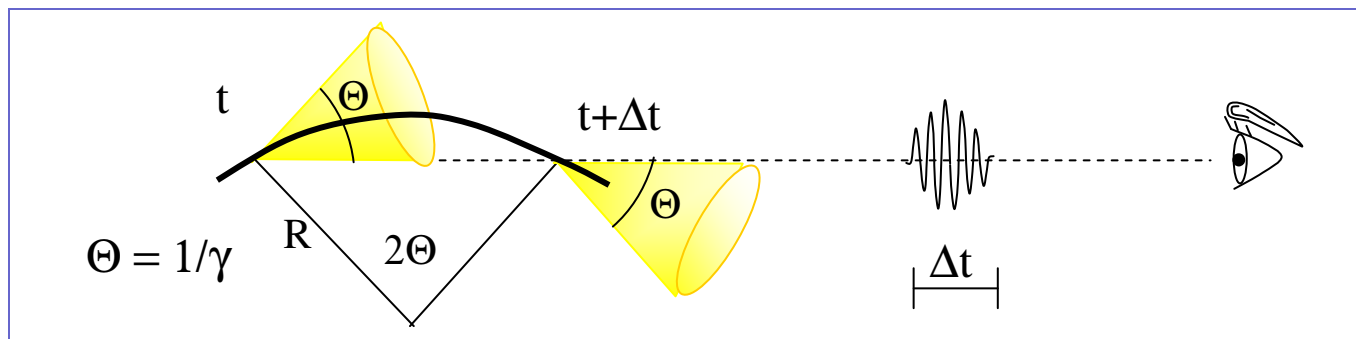


Spettro di frequenze - I

La questione piu' interessante:

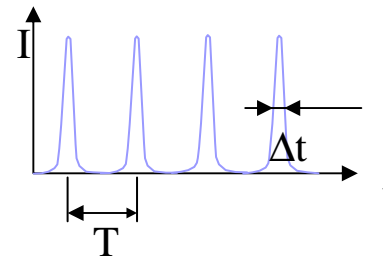
Quali frequenze sono contenute nella radiazione di sincrotrone?

Si consideri il problema dal punto di vista di un osservatore che guardi tangenzialmente all'orbita:



Durata impulso luminoso:

$$\Delta t = \frac{L}{\beta c} = \frac{2\Theta R}{\beta c} = \frac{2R}{\beta \gamma c} \ll T = \frac{2\pi R}{\beta c} \text{ se } \gamma \gg 1$$



Spettro di frequenze - II

La durata dell'impulso per l'osservatore tangenziale e':

$$\frac{L}{c} = t_2 - t_1$$

In termini dei tempi ritardati:

$$\begin{cases} t_2 = t_2' + \frac{R_2}{c} \\ t_1 = t_1' + \frac{R_1}{c} \end{cases} \rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t - \frac{R_1 - R_2}{c}$$

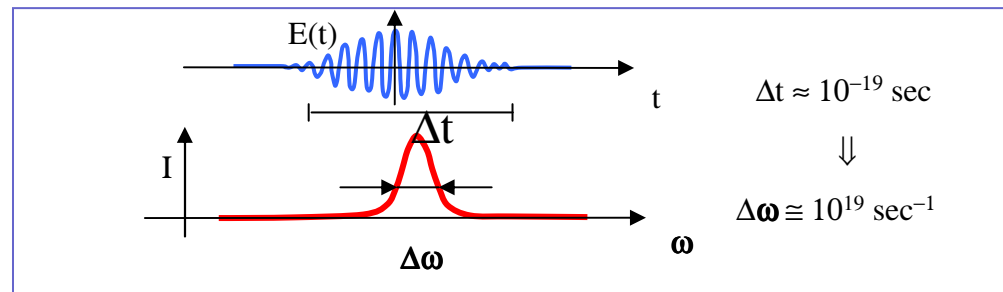
$$R_1 - R_2 \approx v\Delta t \rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \Delta t(1 - \beta)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta) \sim 2(1 - \beta), \beta \approx 1$$

$$\rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t(1 - \beta) \sim \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{2R}{\beta\gamma c} \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{R}{\beta\gamma^3 c} \quad \text{Intervallo di tempo di emissione}$$

Spettro di frequenze - III

Sviluppo in integrale di Fourier: spettro di frequenza della radiazione



Intervallo di frequenze emesse:

$$\begin{cases} \omega_{\min} \sim \omega_0 = \frac{\beta c}{R} \\ \omega_{\max} \sim \frac{\beta \gamma^3 c}{R} \end{cases}$$

$$\rightarrow E_c \sim \hbar \omega_{\max} \sim \frac{\gamma^3 \hbar c}{R} \quad \text{Energia critica}$$

Esempio: elettroni

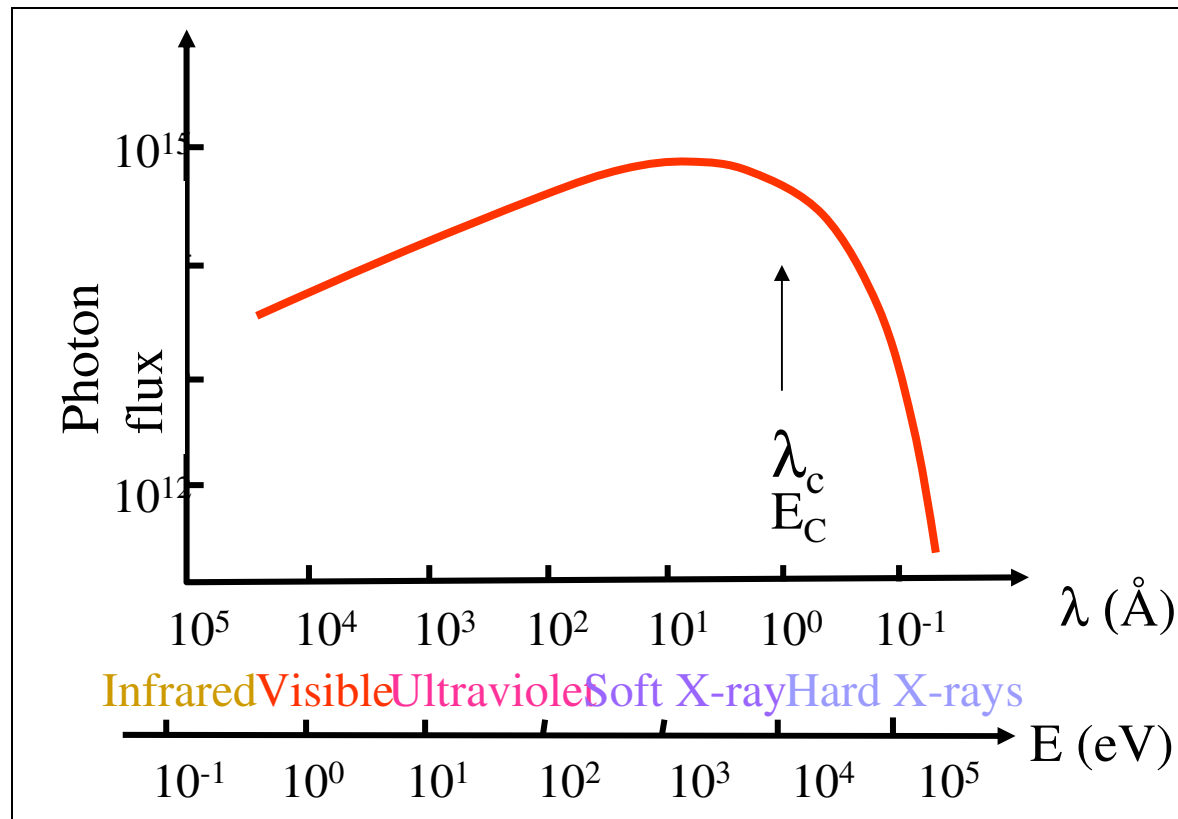
$$E = 1000 \text{ MeV}, mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

$$\rightarrow \gamma^3 = (E/mc^2)^3 \sim 8 \cdot 10^9$$

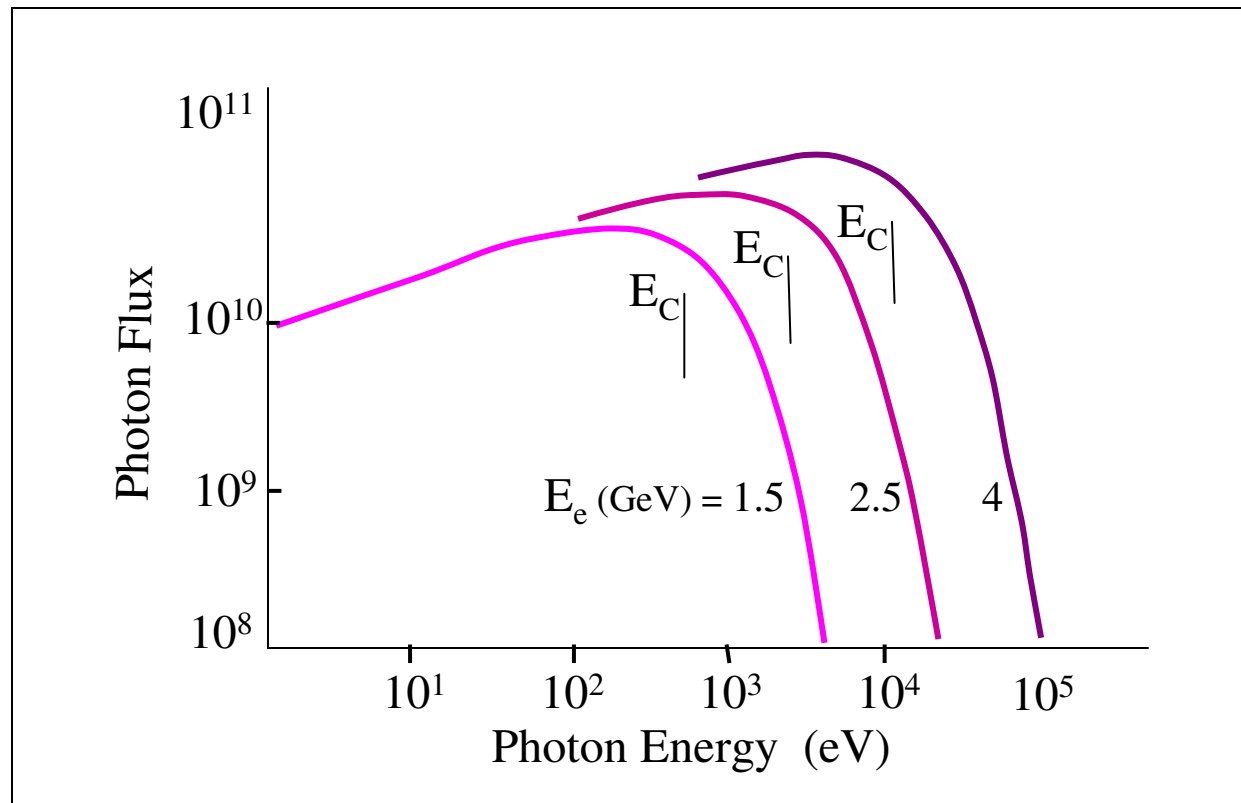
$$R = 5 \text{ m}$$

$$\rightarrow E_c \sim 400 \text{ eV} \quad \text{Raggi X soffici}$$

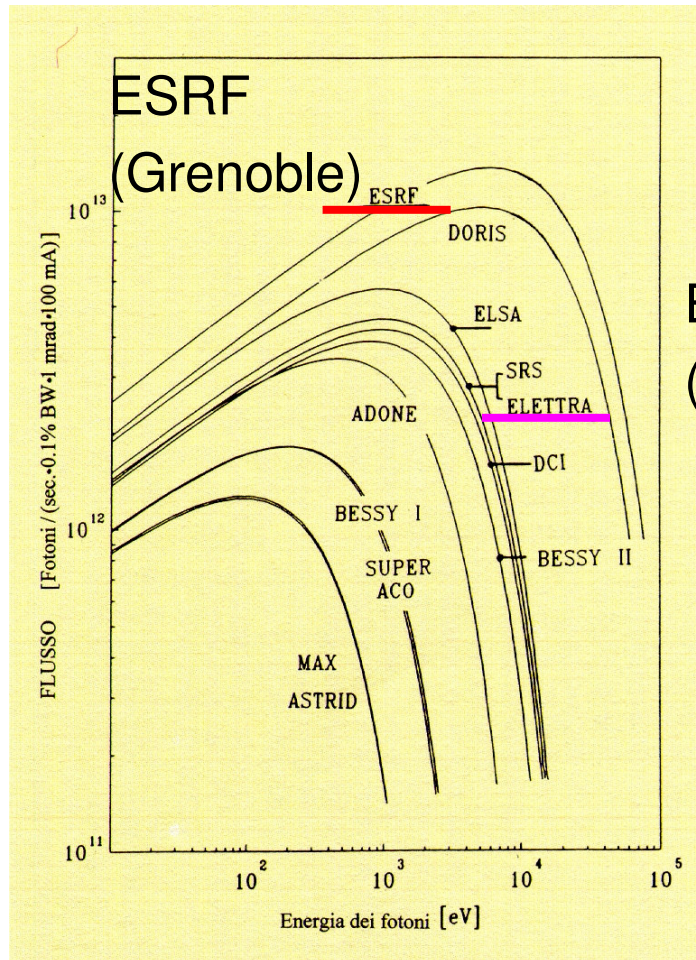
Spettro di frequenze - IV



Spettro per diverse energie

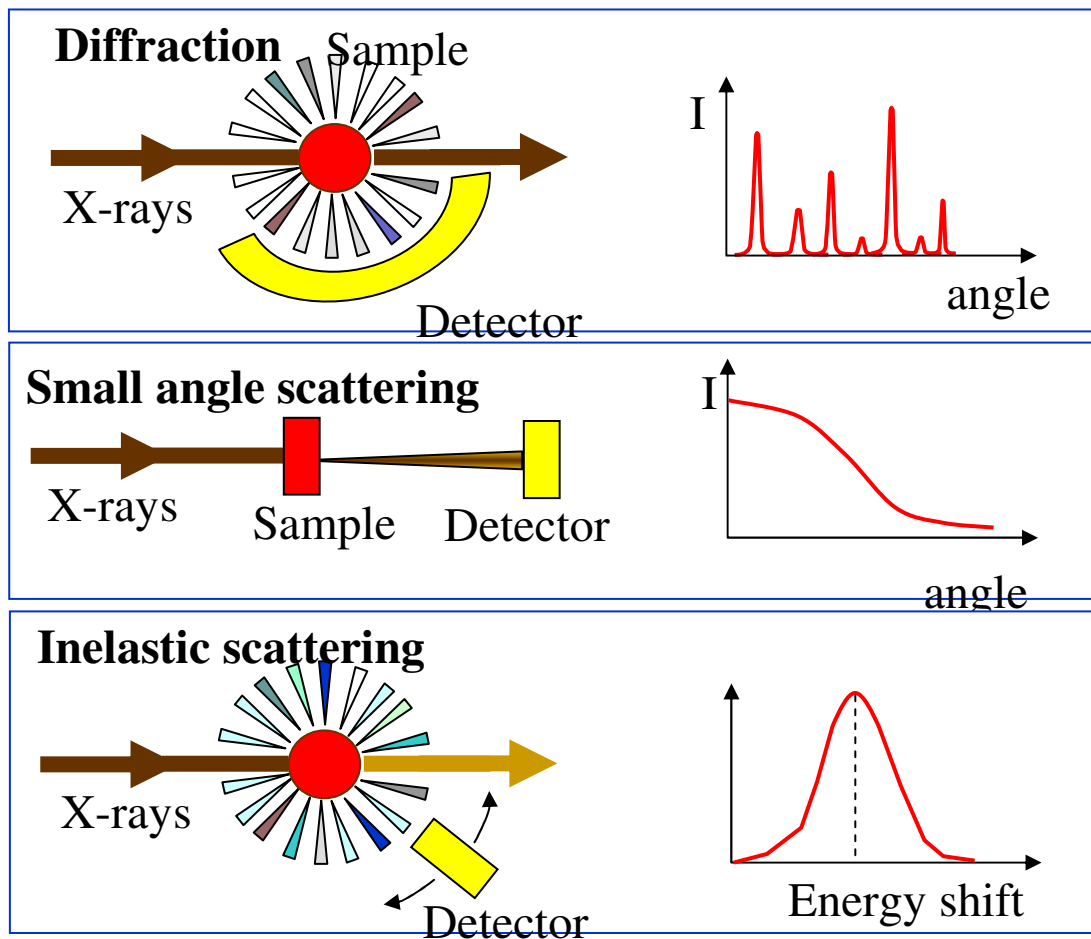


Flussi da diverse macchine



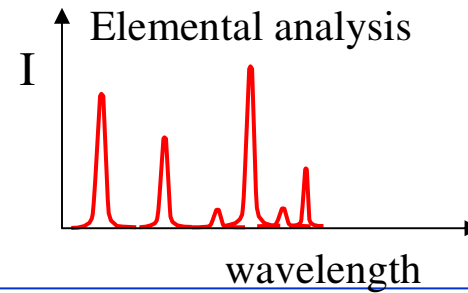
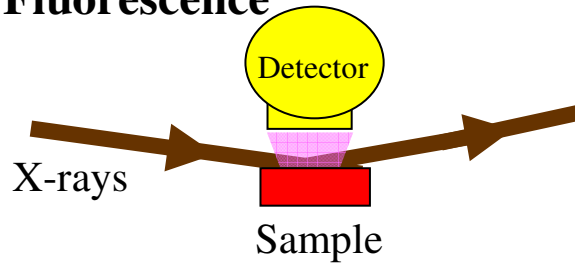
ELETTRA
(Trieste)

Modi d'uso - I

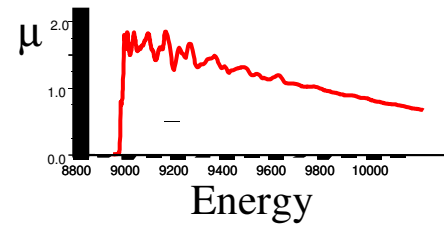
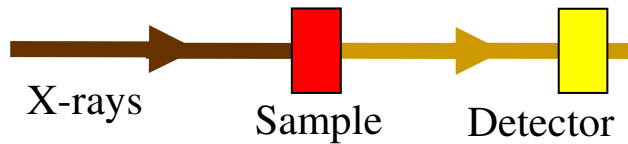


Modi d'uso - II

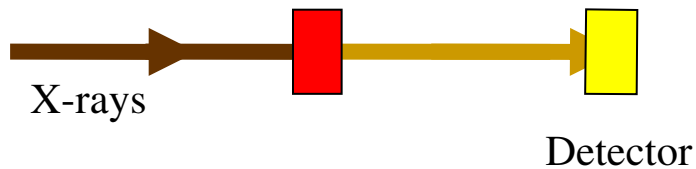
Fluorescence



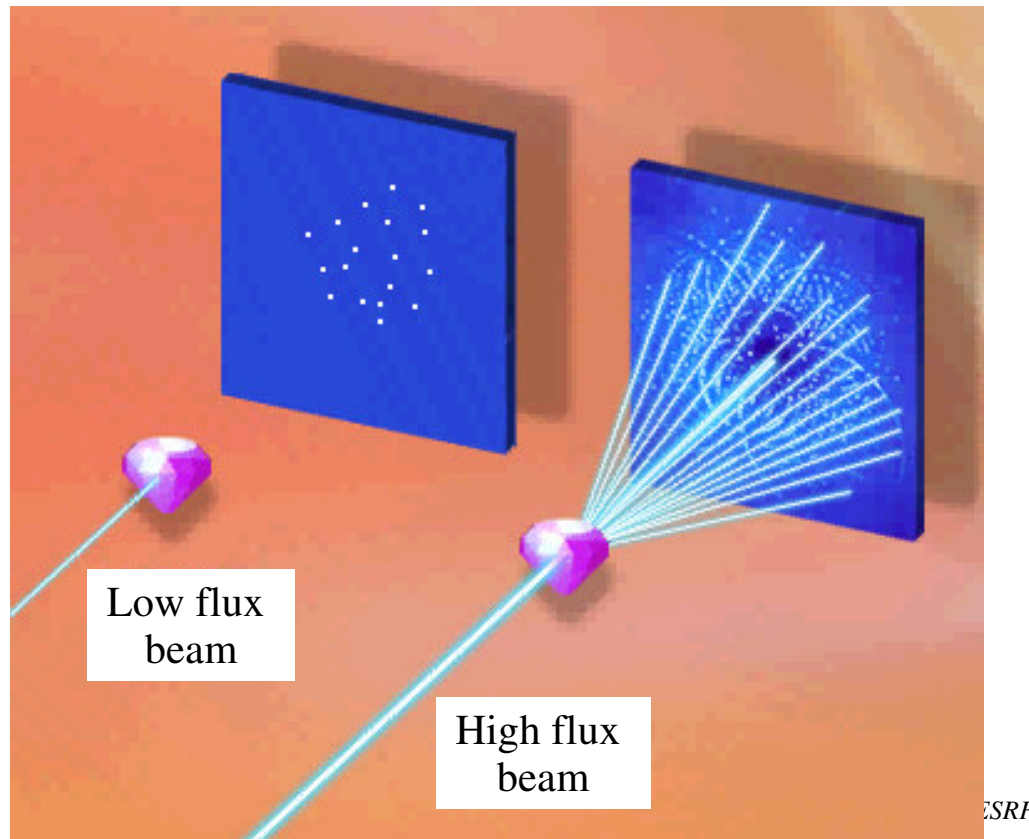
Absorption



Imaging

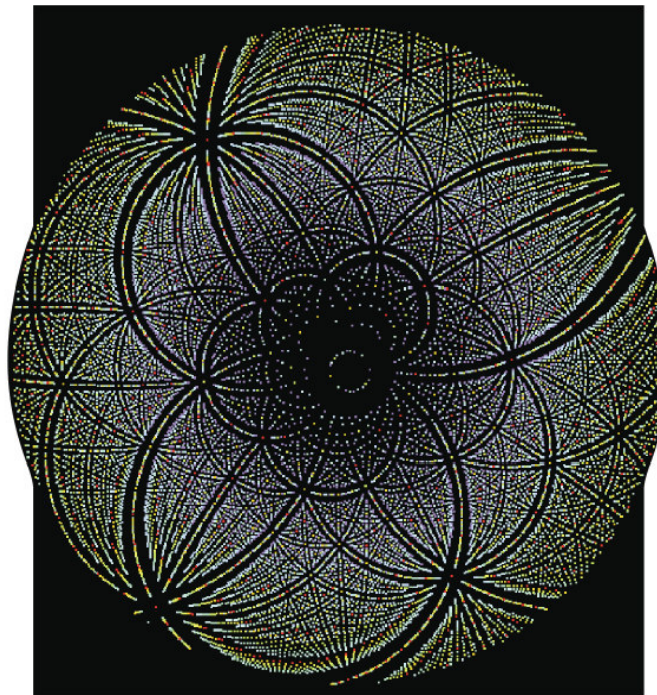


Laue Diffraction



Laue pattern di un cristallo

Isocitrate dehydrogenase

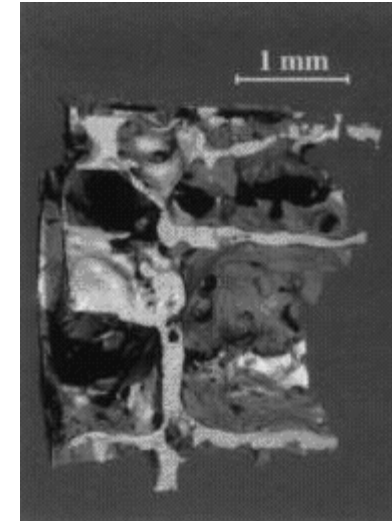
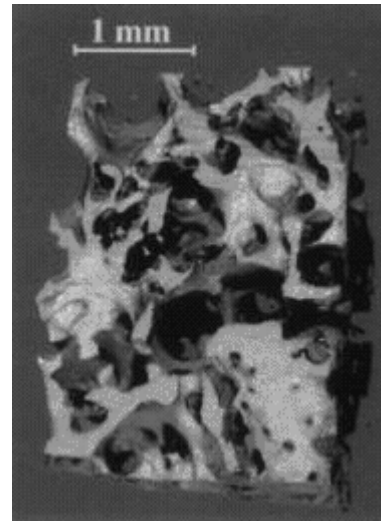
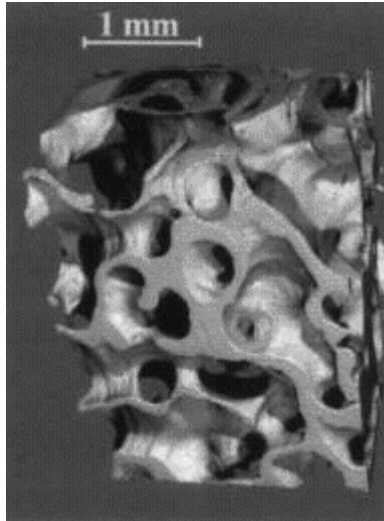


TIME-RESOLVED CRYSTALLOGRAPHY

NLSL Brookhaven

Time resolved crystallography: Exposure time: 10 ms

Micro-tomografia a raggi X



Microtomogram of iliac crest bone from a female patient undergoing haemodialysis. The three images are of biopsies taken at three ages, 24, 27 and 32 years. The severe loss of bone mass is apparent.

The ratios of bone volume to total volume fell from 29.6% to 23.7% between the ages of 24 and 32