

Onde, Radiazione e Relativita'

II – Onde nei dielettrici e nei conduttori

Onde nei dielettrici

Leggi delle riflessione e rifrazione

Formule di Fresnel

Riflessione totale

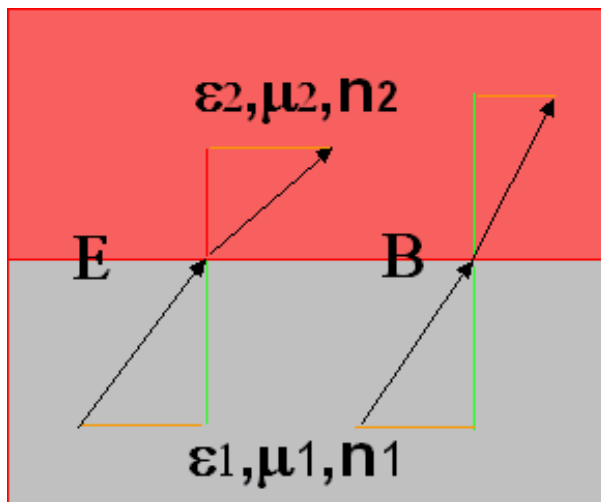
Polarizzazione per riflessione

Condizioni al contorno

Sulla frontiera fra due mezzi valgono sempre le relazioni:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad \mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel}$$



Le condizioni derivano da

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

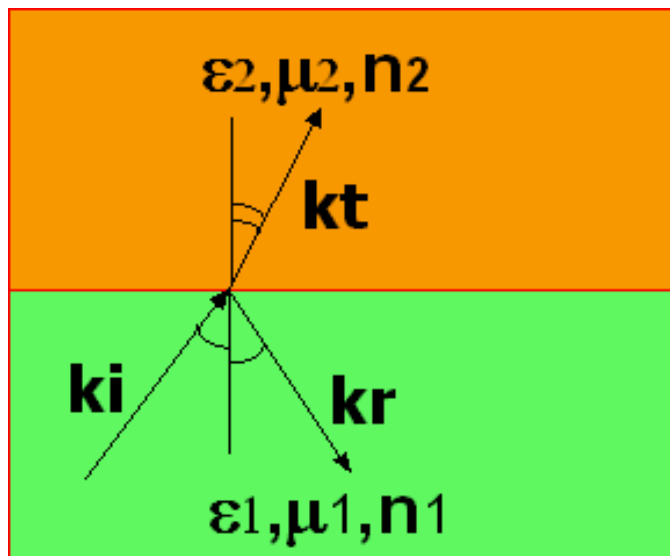
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

*applicate a linee e volumi chiusi
che attraversano la superficie*

Riflessione e trasmissione - I

Si applicano le condizioni al contorno alla situazione descritta in figura



Risultati

3 vettori d'onda complanari

$$\theta_i = \theta_r$$
$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

Componenti:

$$\epsilon_1 (\mathbf{E}_{0I} + \mathbf{E}_{0R})_x = \epsilon_2 (\mathbf{E}_{0T})_x$$

$$(\mathbf{E}_{0I} + \mathbf{E}_{0R})_{y,z} = (\mathbf{E}_{0T})_{y,z}$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{B}_{0I} + \mathbf{B}_{0R})_{y,z} = \frac{1}{\mu_2} (\mathbf{B}_{0T})_{y,z}$$

$$(\mathbf{B}_{0I} + \mathbf{B}_{0R})_x = (\mathbf{B}_{0T})_x$$

Riflessione e trasmissione - II

Le conseguenze sono diverse per i 2 casi

(i) Polarizzazione nel piano di incidenza

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa sono

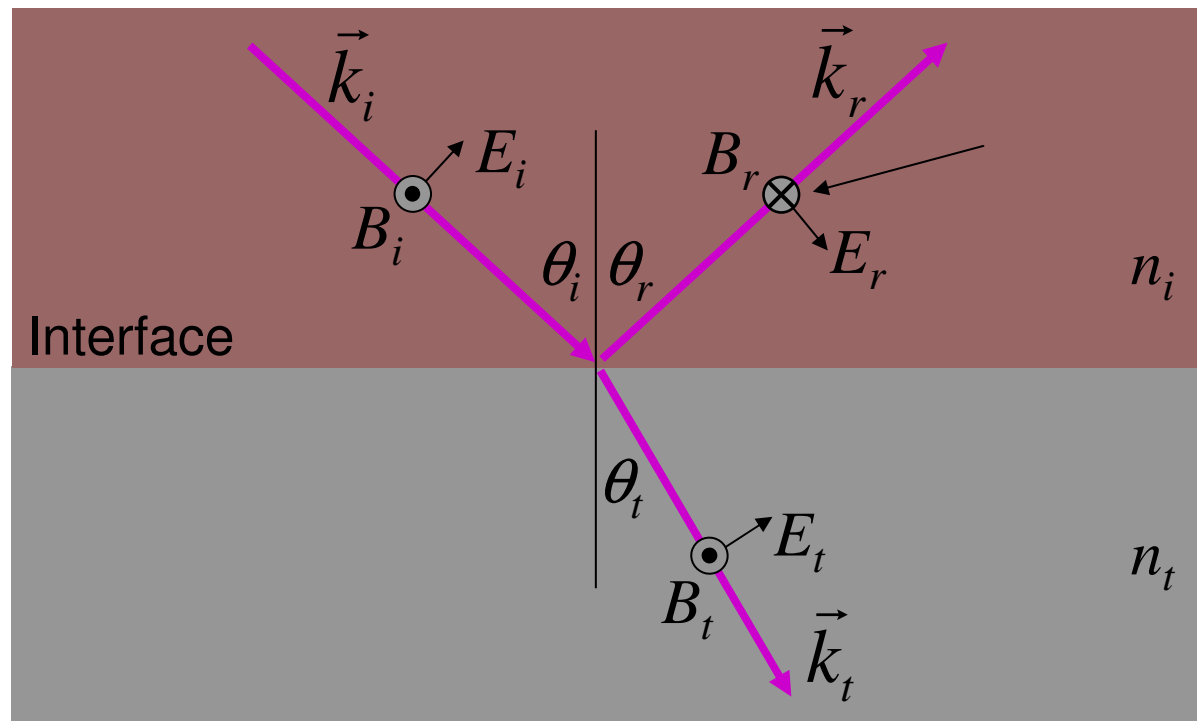
$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

(ii) Polarizzazione ortogonale al piano di incidenza

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa sono

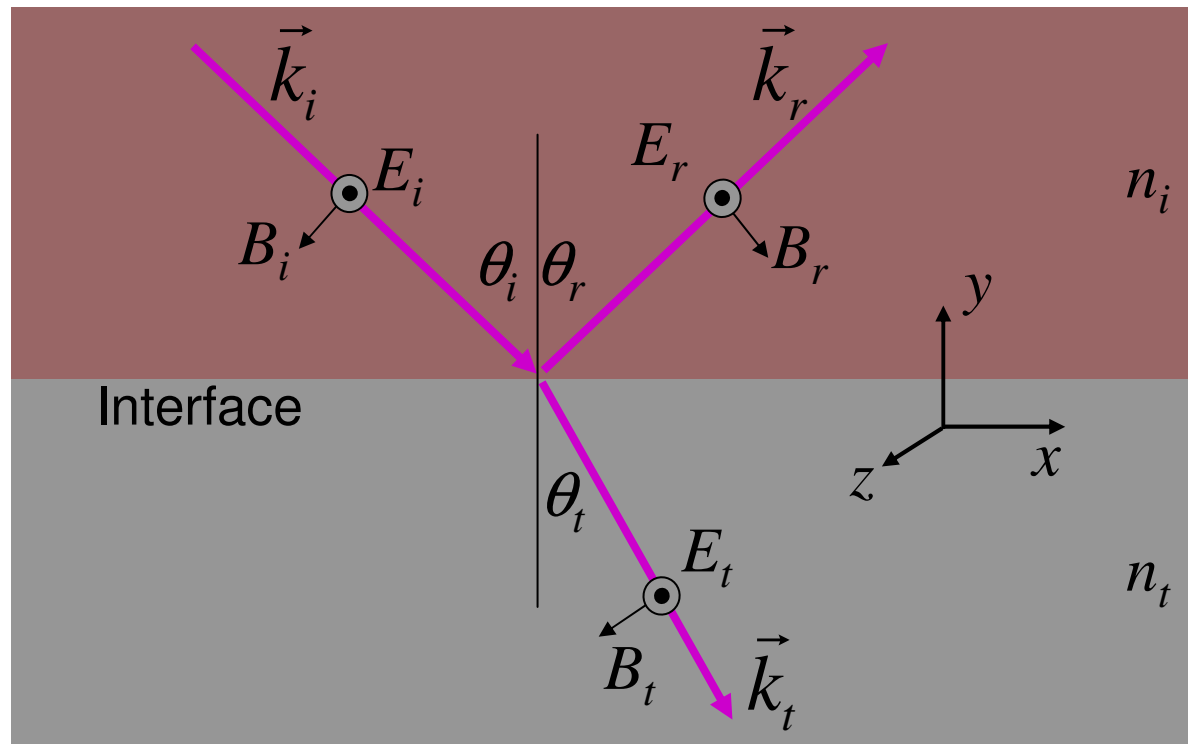
$$E_{0R} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Riflessione e trasmissione - III



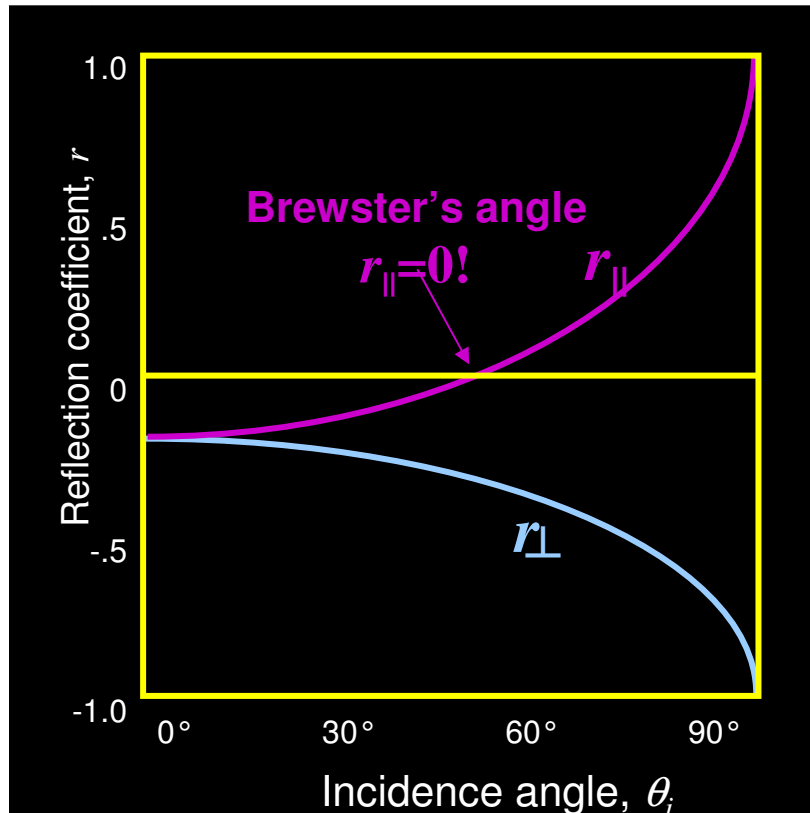
$E \parallel$ al piano di incidenza

Riflessione e trasmissione - IV

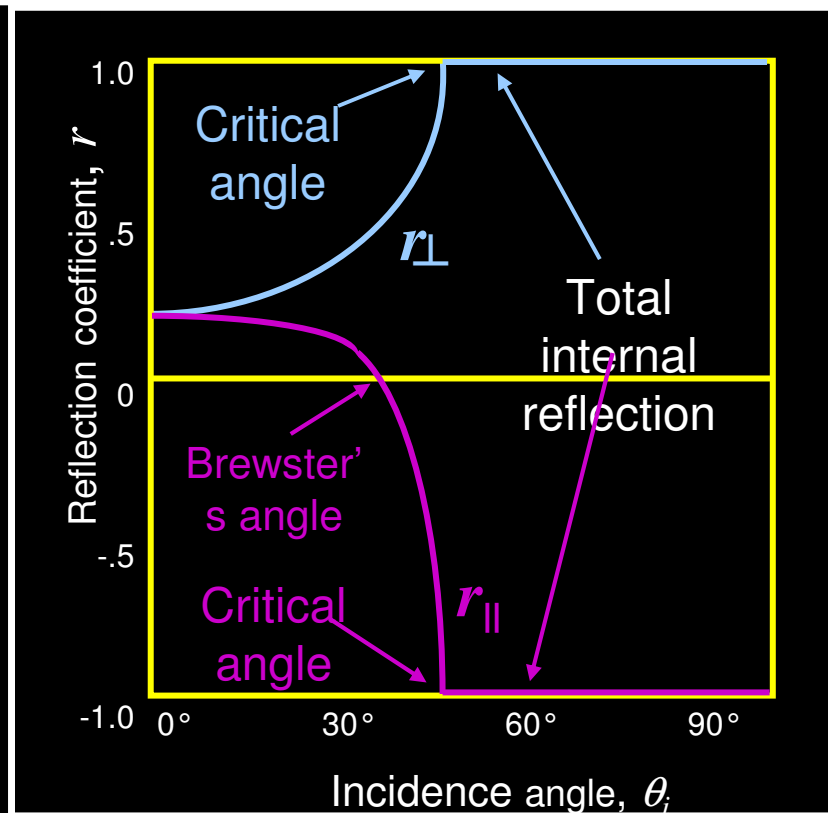


$\mathbf{E} \perp$ al piano di incidenza

Riflessione e trasmissione - V



Aria-Vetro



Vetro-Aria

Riflessione e trasmissione - VI

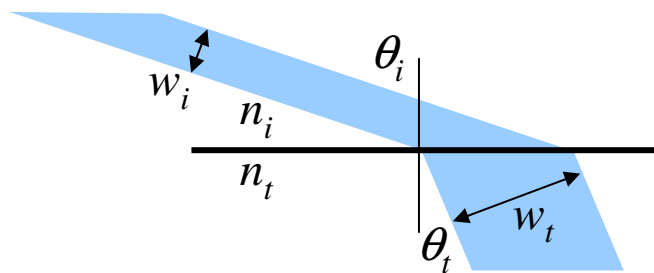
Formule di Fresnel per i coefficienti di riflessione e trasmissione, riferiti alle *intensità*:

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 ; R_{\perp} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

$$T_{\parallel} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} ; T_{\perp} = \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$$

Si osservi:

a)



$$Area_{i,r,t} \propto w_{i,r,t}$$

b)

$$U = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right), v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, B = \frac{E}{v}$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon \left(E^2 + \frac{B^2}{\epsilon\mu} \right) = \frac{1}{2} \epsilon (E^2 + v^2 B^2) = \epsilon E^2$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2} Uv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 v = \frac{1}{2} n^2 E^2 \frac{c}{n} = \frac{1}{2} ncE^2$$

Riflessione e trasmissione - VII

Infatti:

$$R = \frac{I_{rifl} A_r}{I_{incid} A_i} = \frac{\frac{1}{2} c n_1 |E_r|^2 A_r}{\frac{1}{2} c n_1 |E_i|^2 A_i}, \quad A_{i,r,t} \text{ aree sottese in incidenza, riflessione, trasmissione}$$

$$A_r = A_i \rightarrow R = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

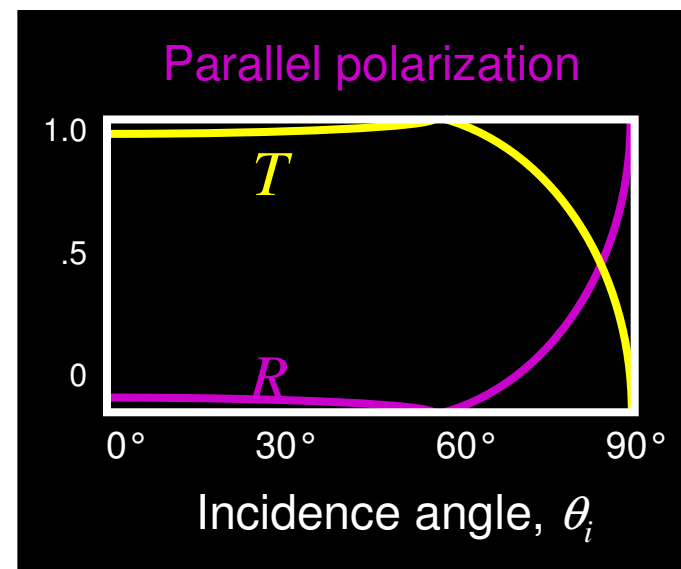
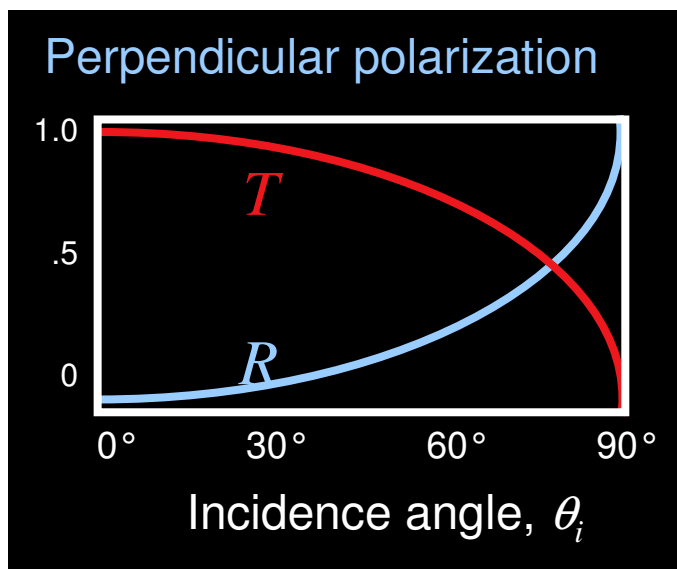
$$\begin{cases} A_i = A \cos \theta_i \\ A_t = A \cos \theta_t \end{cases} \rightarrow T = \frac{I_{tras} A_t}{I_{incid} A_i} = \frac{\frac{1}{2} c n_2 |E_t|^2 A_t}{\frac{1}{2} c n_1 |E_i|^2 A_i} = \frac{n_2}{\underbrace{n_1}_{=\beta}} \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 \frac{\cos \theta_t}{\underbrace{\cos \theta_i}_{\alpha}} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

$$R = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

$$T = \frac{\underbrace{n_2}_{=\beta}}{\underbrace{n_1}_{\alpha}} \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta} \right)^2 \frac{\cos \theta_t}{\underbrace{\cos \theta_i}_{\alpha}} = \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$$

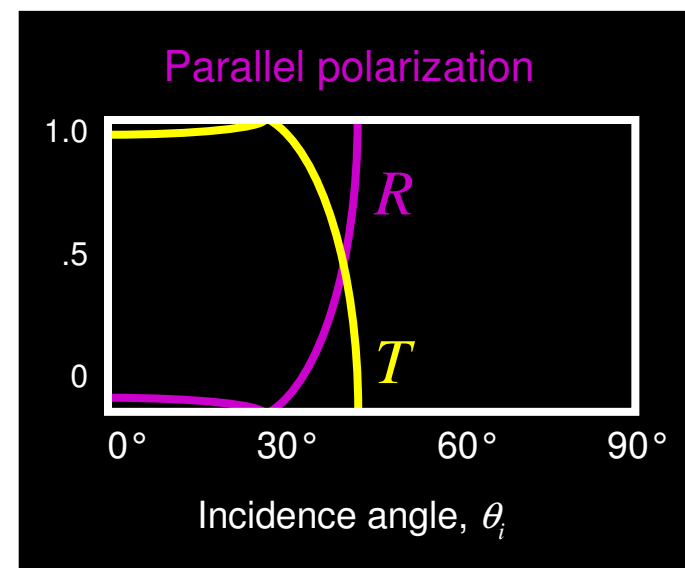
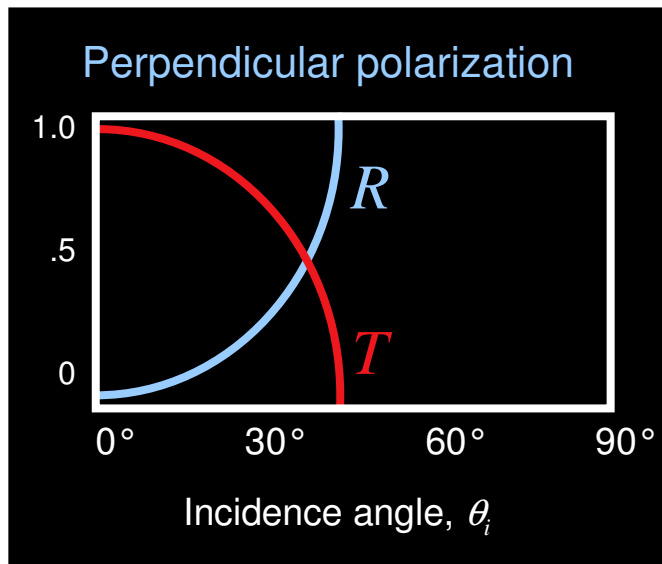
Riflessione e trasmissione - VIII

Coeff. di riflessione e trasmissione, riferiti alle *intensita'*
Aria - Vetro



Riflessione e trasmissione - IX

Coeff. di riflessione e trasmissione, riferiti alle *intensita'*
Vetro - Aria



Riflessione e trasmissione - X

Per incidenza normale:

$$\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$$

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Per aria ($n \sim 1$) - vetro ($n \sim 1.5$), o vetro – aria:

$$R = 0.04$$

$$T = 0.96$$

Riflessione totale

Onda incidente da mezzo piu' denso a uno meno denso:

$$n_1 > n_2, \sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \rightarrow \theta_T = \frac{\pi}{2} \text{ per } \theta_I < \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{\text{lim}} \rightarrow \theta_{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Poiche' $\theta_T < \pi/2$, se $\theta_I > \theta_{\text{lim}}$ solo onda riflessa

Osservazione: come interpretare questo fisicamente?

$\sin \theta_T > 1 \rightarrow \theta_T$ e' complesso

$$\cos \theta_T = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = \pm i \sqrt{\sin^2 \theta_T - 1} = \pm i \sqrt{\sin^2 \left[\arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \right) \right] - 1}$$

$\cos \theta_T$ compare nell'esponenziale complesso che descrive

$\mathbf{E}_T \rightarrow$ *onda evanescente* lungo la superficie di separazione

Onda evanescente - I

$\sin(\theta_t) > 1 \rightarrow \theta_t$ non esiste \rightarrow non si puo' calcolare r_{\perp}

Tuttavia, ignorando formalmente il problema:

$$\cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)}$$

$$\rightarrow \cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2(\theta_i)} = \text{immaginario}$$

Ridefiniamo coerentemente R :

$$r_{\perp} = \frac{a - bi}{a + bi}$$

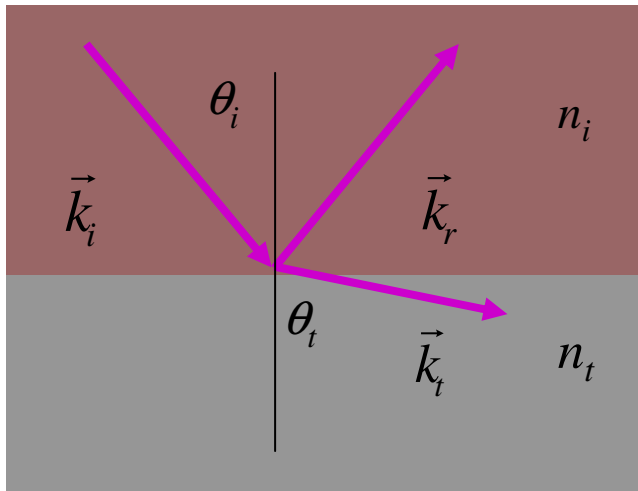
$$\rightarrow R \equiv r_{\perp} r_{\perp}^* = \left(\frac{a - bi}{a + bi}\right) \left(\frac{a + bi}{a - bi}\right) = 1$$

Quindi:

Solo onda riflessa: l'onda evanescente non trasporta energia

Onda evanescente - II

L'onda evanescente:



$\mathbf{k}_t = k_x \hat{\mathbf{i}} + k_y \hat{\mathbf{j}}$ vettore d'onda nel mezzo 2

$$\begin{cases} k_x = k_t \sin \theta_t & \parallel \text{ alla superficie} \\ k_y = k_t \cos \theta_t & \perp \text{ alla superficie} \end{cases}$$

$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1$ reale Segno +,
altrimenti divergenza

$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm i\alpha$ immaginario

$$\rightarrow E = E_0 e^{-\alpha k_t y} e^{i(k_x x - \omega t)}$$

Si propaga lungo la superficie di separazione fra i 2 mezzi
Si attenua esponenzialmente nel secondo mezzo

Polarizzazione per riflessione - I

Riprendendo l'espressione per il campo riflesso con polarizzazione nel piano di incidenza:

$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Si osserva che

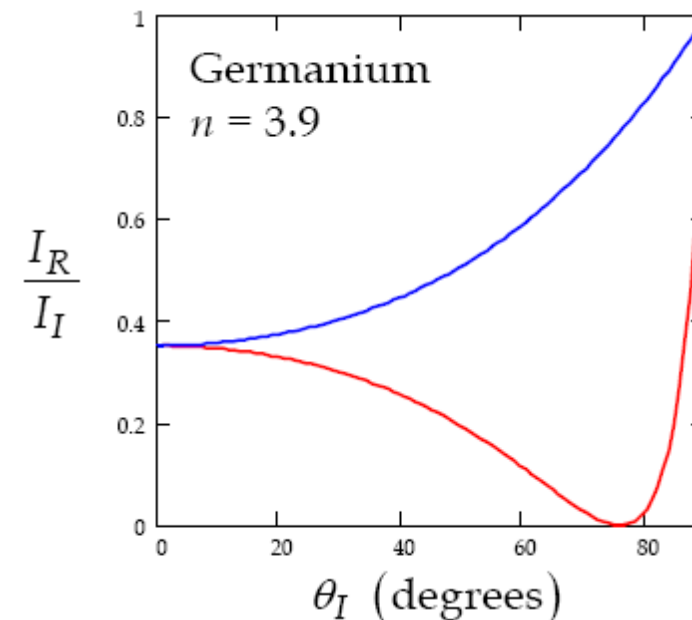
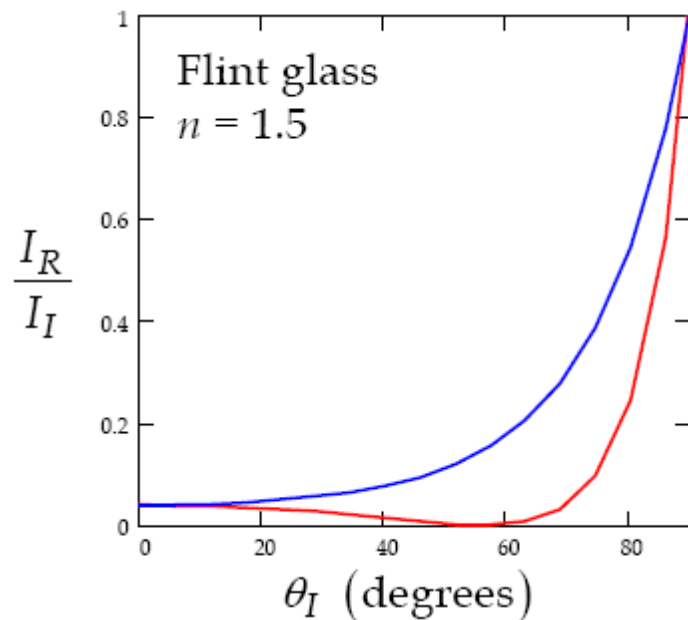
$$E_{0R} = 0 \text{ quando } \alpha = \beta \rightarrow \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2 \sin \theta_I}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_I} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \tan \theta_I^B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Angolo di Brewster
Quando $\theta_I = \theta^B$, l'onda riflessa non ha comp. nel piano di incidenza
Quindi:

l'onda e' *polarizzata*

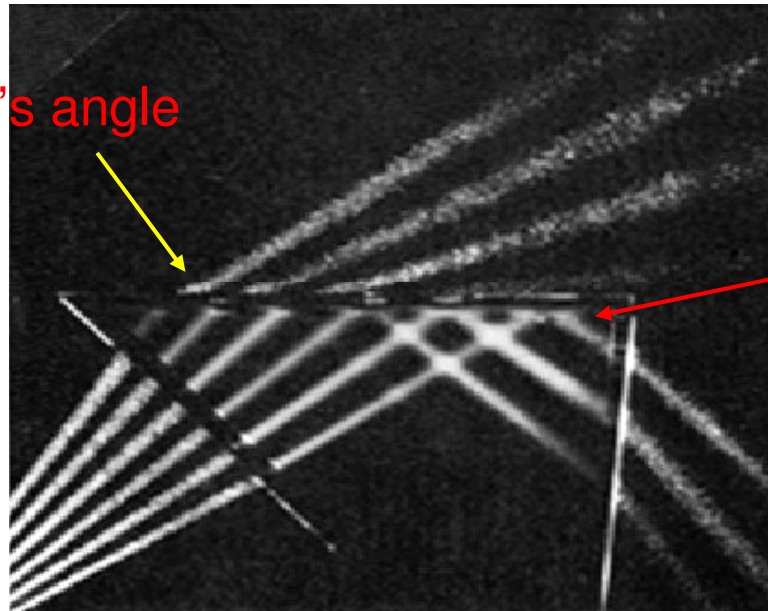
Polarizzazione per riflessione - II



- E perpendicular to plane of incidence
- E parallel to plane of incidence

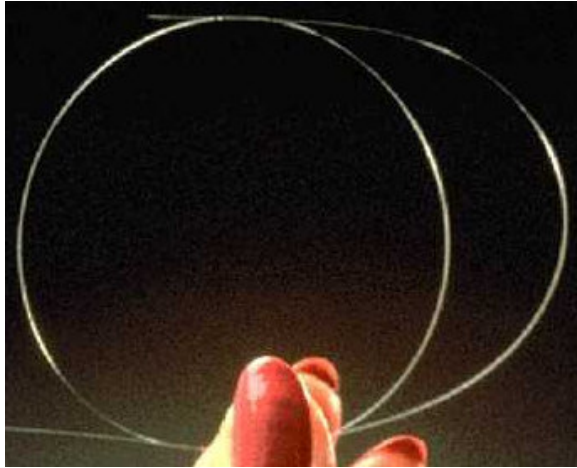
Angoli caratteristici...

Brewster's angle

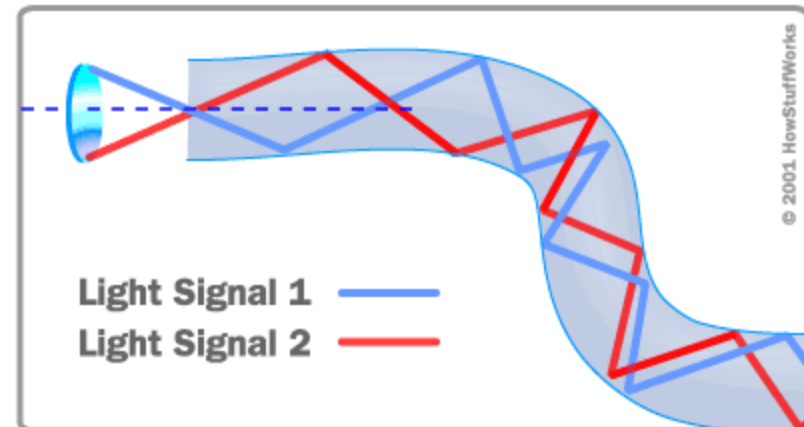
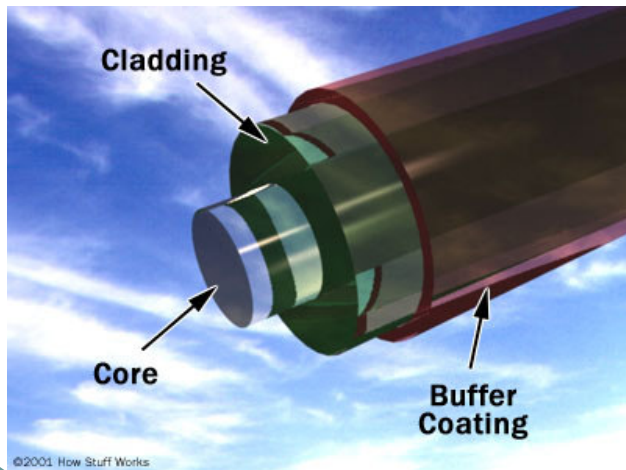


Total Internal Reflection

Fibre ottiche



$$n_{core} > n_{cladding}$$



Onde nei conduttori

Numero d'onda complesso

Propagazione e attenuazione

Riflessione e trasmissione

Eq. di Maxwell nei conduttori - I

Legge fondamentale nei conduttori:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{Legge di Ohm microscopica}$$

Riscrittura eq. di Maxwell per conduttori:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eq. di Maxwell nei conduttori - II

Eq. di continuita' per la carica:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sigma(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho \rightarrow \rho(t) = \rho(0)e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}$$

La costante di tempo ϵ/σ e' normalmente molto piccola: dopo un transiente (di cui ci disinteressiamo) la carica libera va a zero. Quindi:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \underbrace{\mu\sigma\mathbf{E}}_{\text{termine aggiuntivo}} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eq. delle onde nei conduttori – I

Solito trucco di prendere il rotore del rotore: viene

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Soluzione: per onde piane, soliti esponenziali complessi:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}, \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}, \Delta \mathbf{E} = (ik)^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$$

Eq. delle onde nei conduttori – II

$$\rightarrow -k^2 \mathbf{E} + (\mu \epsilon \omega^2 + i \omega \mu \sigma) \mathbf{E} = 0$$

$$\rightarrow k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \omega \mu \sigma$$

Il numero d'onda (o vettore d'onda) ha una parte immaginaria

$$k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \omega \mu \sigma \rightarrow k = k_+ + i k_-$$

$$\rightarrow \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i[k_+ + i k_-]x} e^{-i \omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

Quindi l'onda piana si *attenua* nel propagarsi dentro il conduttore.

Eq. delle onde nei conduttori - III

Espressione del numero d'onda per la propagazione nei conduttori:

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma$$

Assumendo σ reale e costante:

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)$$

$$1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} e^{i\theta}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\theta/2} \rightarrow k = \sqrt{\mu\epsilon\omega} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 \right]^{1/4} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

Eq. delle onde nei conduttori - IV

Lunghezza di attenuazione:

$$\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 \mp \cos \theta}{2}}$$

$$\rightarrow k_+ = \sqrt{\mu \epsilon \omega} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 \right]^{1/4} \cos \frac{\theta}{2}, k_- = \sqrt{\mu \epsilon \omega} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 \right]^{1/4} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \frac{k_{\pm}}{\omega} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} \pm 1 \right]^{1/2}$$

$$k_- = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \rightarrow d = \frac{1}{k_-} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\epsilon \mu}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]^{-1/2}$$

$$d = \frac{1}{k_-} \approx \lambda = \frac{2\pi}{k_+} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad \text{buoni conduttori}$$

Eq. delle onde nei conduttori – V

Lunghezza di attenuazione e lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_+}, n = \frac{ck_+}{\omega}$$

$$d = \frac{1}{k_-}$$

Comportamenti diversi per *buoni* e *cattivi* conduttori

$$\text{Cattivi: } \sigma \ll \omega\varepsilon \rightarrow \begin{cases} k_+ \cong \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \\ k_- \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{cases} \quad \text{Buoni: } \sigma \gg \omega\varepsilon \rightarrow \begin{cases} k_+ \cong k_- \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \\ k_- \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \end{cases}$$

In termini di lunghezze caratteristiche:

$$d = \frac{1}{k_-} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \lambda = \frac{2\pi}{k_+} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$d = \frac{1}{k_-} \approx \lambda = \frac{2\pi}{k_+} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

Eq. delle onde nei conduttori – VI

Campo elettromagnetico: \mathbf{E} oscilla nel piano (x,y)

$$\mathbf{E}(x,t) = \hat{\mathbf{y}}E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}(x,t) = \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{k}{\omega} \right) E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$= \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{|k| e^{i\varphi}}{\omega} \right) E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$|k| = \sqrt{k_+^2 + k_-^2} = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{k_-}{k_+} \right)$$

Eq. delle onde nei conduttori - VII

Si osserva che **E** e **B** non oscillano in fase; **B** ha un ritardo di fase ϕ

Conseguenze:

- Densita' di energia quasi tutta magnetica
- Densita' di energia decresce lungo il percorso dell'onda
- Il conduttore viene scaldato dall'onda

Riflessione e trasmissione - I

L'applicazione delle condizioni al contorno per \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{H} alla superficie di separazione fra 2 mezzi e' piu' laboriosa quando si e' in presenza di conduttori.

Nel caso piu' interessante dielettrico-conduttore, ci si attende in linea di principio presenza di carica e corrente superficiali alla separazione fra i due mezzi :

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_{1\perp} - \varepsilon_2 \mathbf{E}_{2\perp} = \sigma \quad \mathbf{E}_{1\parallel} - \mathbf{E}_{2\parallel} = 0$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel} = \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Riflessione e trasmissione - II

Ma: sia σ , sia \mathbf{j} devono essere nulli (perché E_{\perp} è nullo da entrambi i lati; e perché ci vorrebbe un campo infinito per avere una corrente superficiale finita), si trovano le solite espressioni per le polarizzazioni parallela e ortogonale al piano di incidenza

$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$E_{0R} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

dove però adesso β è un numero complesso

Riflessione e trasmissione - III

Per un conduttore ideale, $\sigma \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$ e si ha

$$E_{0R} = -E_{0I}, \quad E_{0T} = 0$$

quindi l'onda e' totalmente riflessa, con sfasamento di π

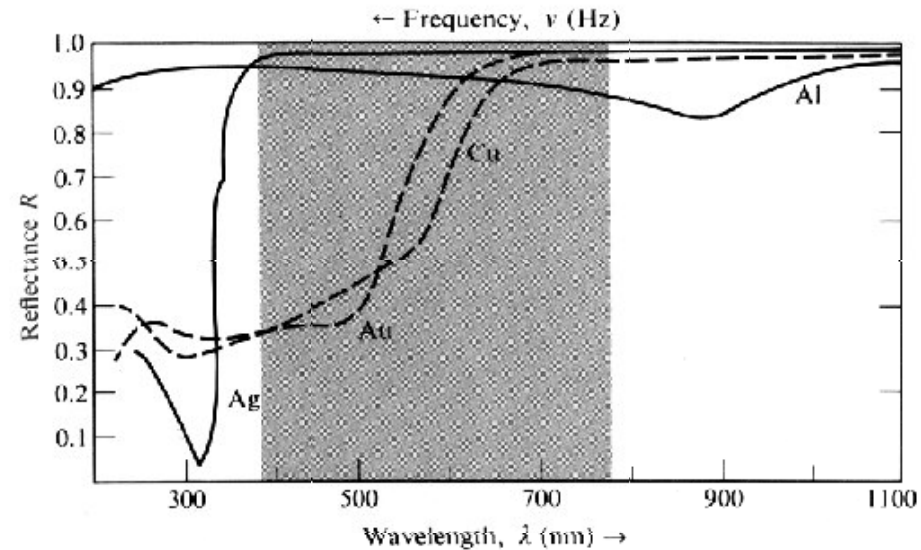
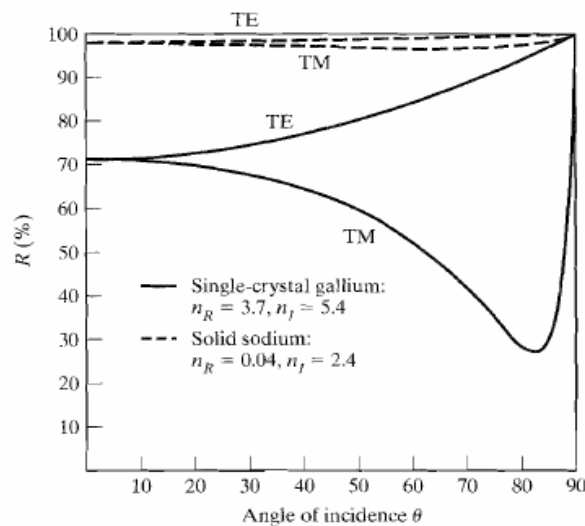
Se abbiamo un conduttore reale, σ e' grande ma $< \infty$, e β e' grande in modulo; quindi, sviluppando in serie di potenze di $1/\beta$:

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} \cong -\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cong \frac{2}{\beta} - 1$$

$$\rightarrow R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \cong \left(\frac{2}{\beta} - 1\right)^2 \cong 1 - \sqrt{8 \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma}}$$

*Il coefficiente di riflessione dipende dalla frequenza...
→ Colore dei metalli*

Esempi: Riflettanza dei metalli



Generalizzazione di R al caso di indice di rifrazione complesso:

$$R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \rightarrow R = \frac{(n-1)(n^* - 1)}{(n+1)(n^* + 1)} \quad \text{per incidenza normale}$$