

# Onde, Radiazione e Relativita'

## III - Dispersione nei dielettrici e nei conduttori

# Dispersione

Evidenza che la propagazione dipende da 3 "costanti":  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ .  
In realt , nessuna delle 3   una costante: la dipendenza dalla frequenza   l'aspetto pi  interessante del problema.

*In sintesi, la dipendenza di  $\epsilon, \mu$  dalla frequenza   dovuta alla variazione della velocit  di propagazione dell'onda con la frequenza*

Questo   complessivamente non inaspettato alla luce della struttura microscopica della materia: ci sono elettroni (liberi o legati alle molecole) che possono scambiare energia con campi elettromagnetici esterni; il confronto fra la frequenza del campo esterno e quelle proprie di oscillazione (atomiche/molecolari) fissa le caratteristiche della propagazione, inclusa la velocit 

# Dielettrici e conduttori

Enfasi su  $\varepsilon, \sigma$ :  $\mu \sim \mu_0$ , tranne che nei materiali ferromagnetici

Comportamento dispersivo diverso nei due casi:  
Strutture microscopicamente diverse

Dielettrici: *elettroni legati, livelli energetici*

Transizioni fra stati discreti  $\rightarrow$  Assorbimento selettivo

Diseccitazione (radiativa o termica)  $\rightarrow$  Dissipazione

Conduttori: *elettroni 'liberi'*

Transizioni fra stati del continuo  $\rightarrow$  Assorbimento non selettivo

Diseccitazione (termica)  $\rightarrow$  Dissipazione

Entrambe le situazioni parzialmente descritte da modelli (semi)classici

# Modello classico semplificato - I

Modello semplificato: elettrone legato elasticamente nell'atomo, o molecola. Forza di richiamo armonica:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

*Giustificazione:* configurazione atomica stabile → elettrone in un minimo di potenziale. Sviluppo vicino al minimo:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

Ora: I termine si può porre = 0, II termine deve essere = 0 (forza = 0 in un minimo di  $U$ ), III termine è quello di un oscillatore armonico

# Modello classico semplificato - II

Equazione del moto per elettrone legato, con termine di smorzamento (p.es., dovuto a *radiazione*):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m \frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

con  $E_{ext}(t)$  sinusoidale.

Cerchiamo soluzioni stazionarie, usando il solito formalismo degli esponenziali complessi:

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -i\omega x(t), \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

# Modello classico semplificato - III

$$-x(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega x = -e \frac{E_0}{m}$$

$$x_0(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega x_0 = e \frac{E_0}{m}$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Si nota che:

- 1) La coordinata dell'elettrone  $e'$  è sfasata rispetto a  $E_0$  (il coefficiente di  $E_0$  è complesso); la fase varia da  $-\pi$  a 0 al crescere della frequenza
- 2) L'ampiezza di oscillazione varia con  $\omega$ , ed è max. per  $\omega = \omega_0$

# Modello classico semplificato - IV

Momento di dipolo indotto:

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

Se ci sono diverse classi di elettroni in ogni molecola, con  $f_j$  elettroni nella classe  $j$ -esima, e se ci sono  $N$  molecole/unita' di volume:

$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \left( \sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j\omega} \right) \mathbf{E}_0$$

# Modello classico semplificato - V

Ricordando la definizione di suscettività' e costante dielettrica:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \left( \sum_j \frac{f_j e^2 / m}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j \omega} \right) \right]$$

che quindi si ritrova come quantita' complessa

# Eq. delle onde nei dielettrici - I

Onde piane in un dielettrico dispersivo:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$-k^2 \mathbf{E} + \epsilon \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\rightarrow k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 \rightarrow k = \sqrt{\epsilon \mu_0} \omega$$

Numero d'onda complesso:

$$k = k_+ + ik_- \rightarrow E = E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$\alpha = 2k_- \quad \text{coefficiente di assorbimento}$$

$$v = \frac{\omega}{k_+} \quad \text{velocita'} \rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{ck_+}{\omega} \quad \text{indice di rifrazione}$$

Notare: il numero d'onda complesso e' dovuto al termine *dissipativo* nella forza

# Eq. delle onde nei dielettrici - II

$$n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

$$\alpha = 2k_- \cong \frac{Ne^2 \omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Se  $\omega < \omega_j$ :

$$\frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + \left( \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left( \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{legge di Cauchy}$$

# Eq. delle onde nei dielettrici - III

Si puo' definire un indice di rifrazione complesso, utile per trattare dielettrici assorbitivi

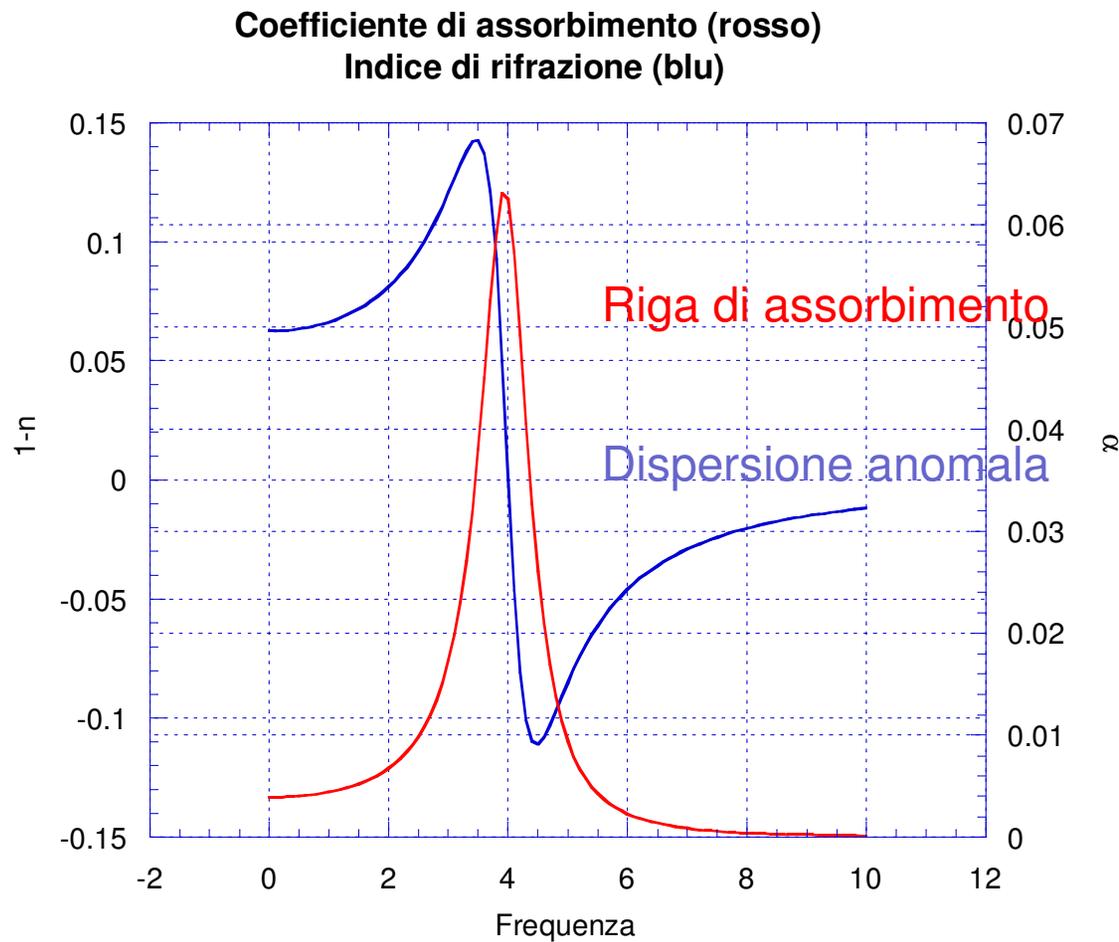
$$n = n_+ + in_-$$

$$n_+ = n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

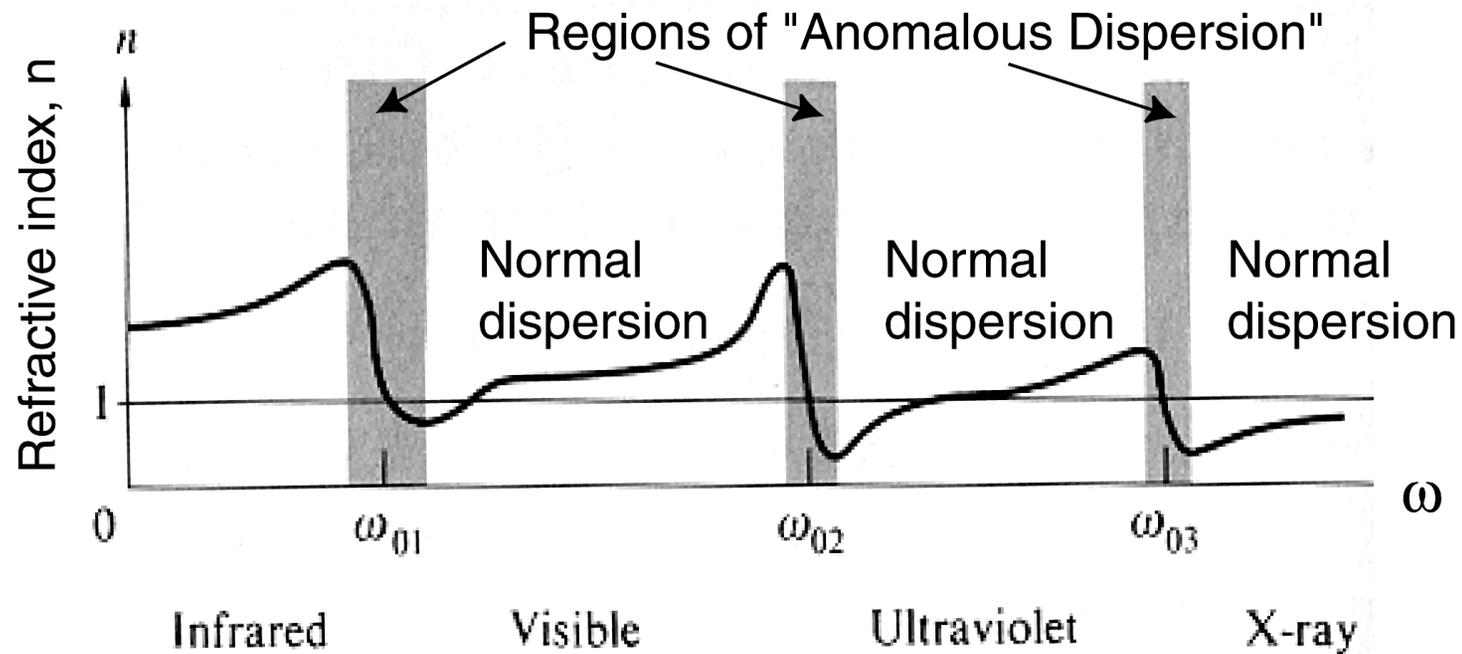
$$n_- = \frac{c\alpha}{2\omega} = \frac{ck_-}{\omega} \cong \frac{Ne^2\omega}{2m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Approssimazioni valide quando  $n_+ \sim 1$ ,  $n_- \ll 1$ , p.es. nei gas

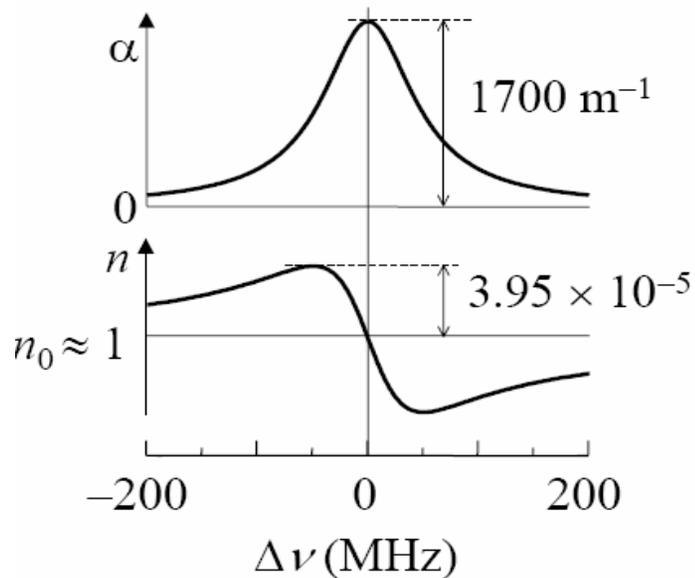
# Dispersione: $n$ e $\alpha$ per $\omega \sim \omega_0$



# Andamento generico



# Vapore



## Lorentzian lineshape

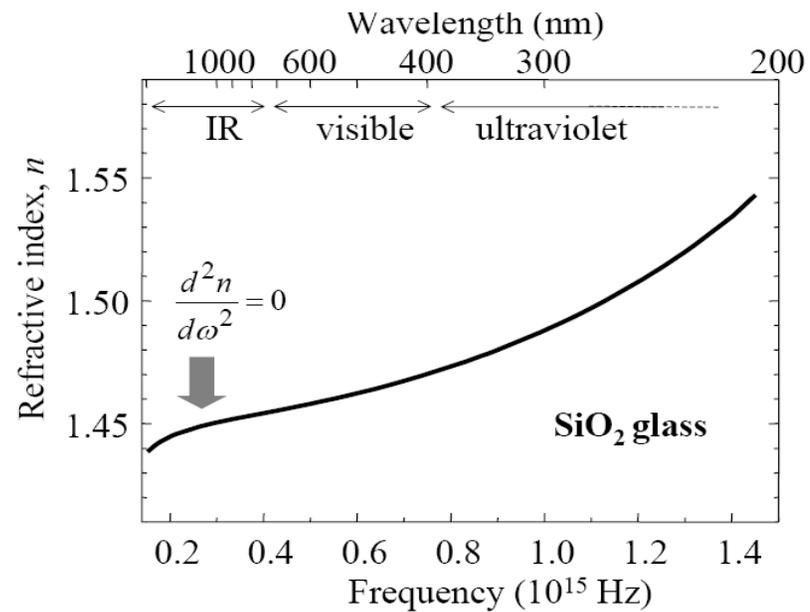
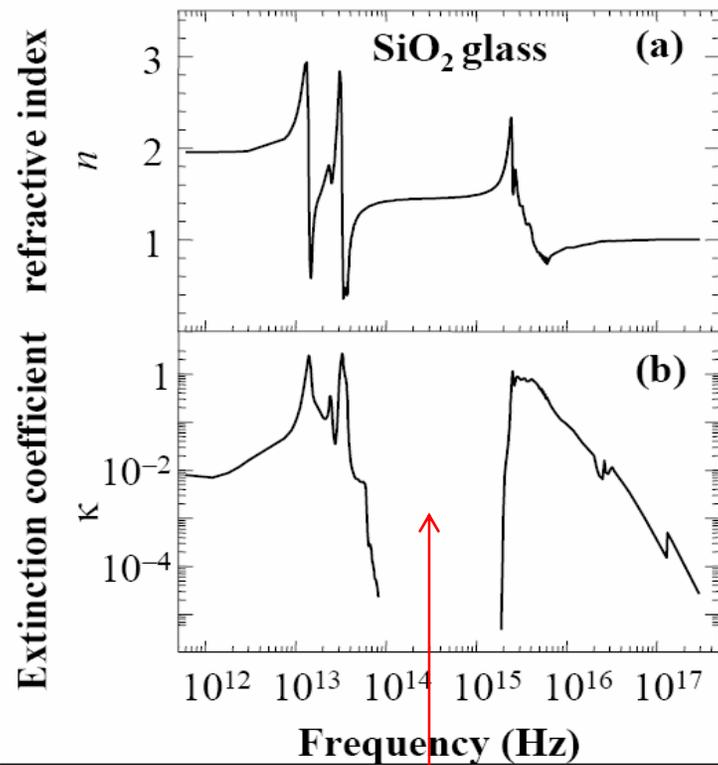
$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \frac{2\gamma^2}{4\Delta\omega^2 + \gamma^2}$$

$$n(\omega) = n_0 + \Delta n \frac{4\gamma\Delta\omega}{4\Delta\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$

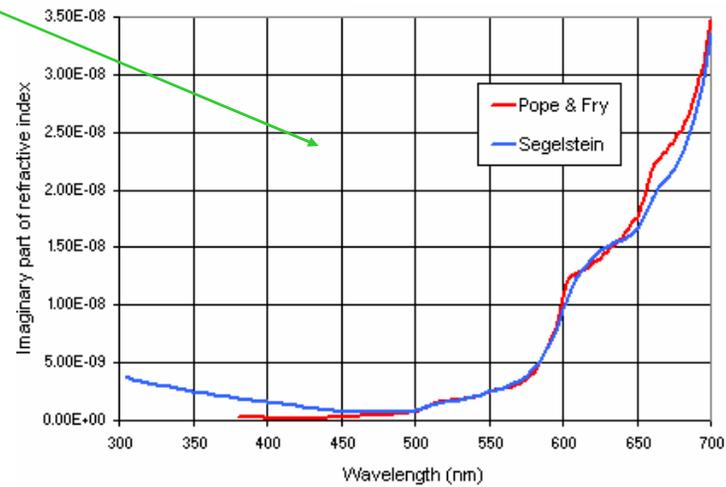
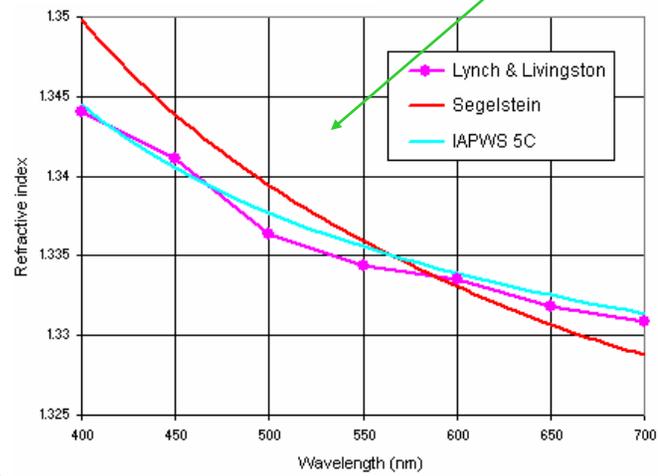
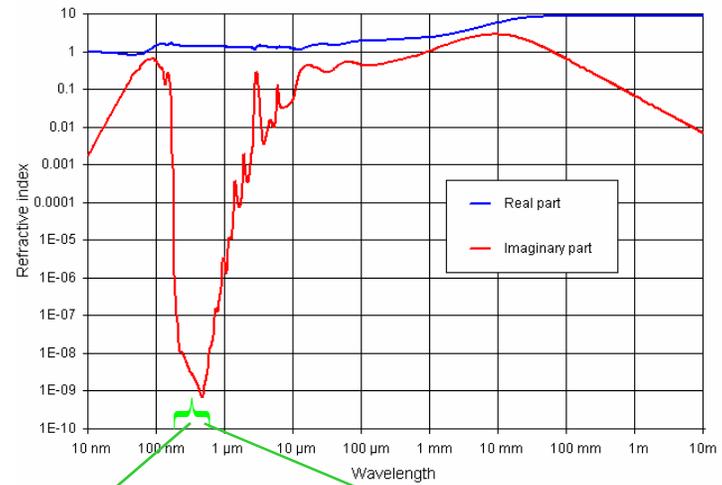
- sodium gas,  $N = 1 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$  (low density  $\Rightarrow n_0 \approx 1$ )
- $D_2$  line at 589.0 nm, hyperfine component with FWHM = 100 MHz

# Vetro

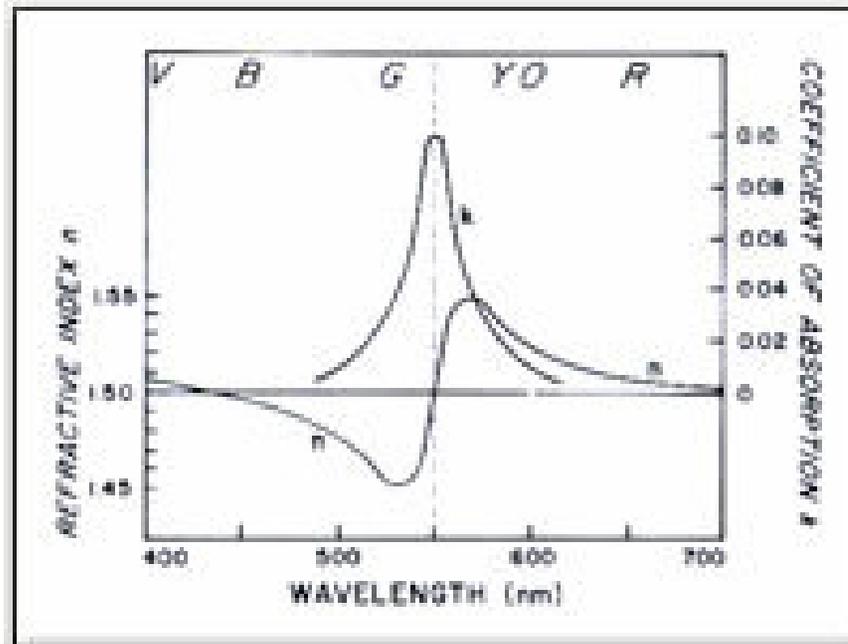


Finestra trasparente nel visibile

# Acqua



# Filtro violetto



NB: Plot in funzione di  $\lambda$  !  
Forma della curva dispersiva rovesciata ...

# Modello classico semplificato - I

Modello semplificato per un conduttore: elettroni liberi  
Differenze rispetto ai dielettrici:

- 1) *Nessuna forza di richiamo → Nessuna frequenza propria*
- 2) *Generazione di corrente, invece che di polarizzazione*
- 3) *Termine dissipativo legato a perdite per collisioni col reticolo*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma m \frac{dx}{dt} - e E_{ext}(t)$$

$$\rightarrow -\omega^2 x = +i\gamma\omega x - e \frac{E_0}{m}$$

$$\omega^2 x_0 + i\gamma\omega x_0 = -e \frac{E_0}{m} \rightarrow x_0 = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

# Modello classico semplificato - II

Densità di corrente generata:

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\frac{dx}{dt} = -i\omega x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{J} = Ne \frac{d\mathbf{x}}{dt} \rightarrow \mathbf{J} = \frac{Ne^2 i \omega}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \underbrace{\frac{Ne^2 i}{m(\omega + i\gamma)}}_{\sigma} \mathbf{E}$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma + i\omega}{\gamma^2 + \omega^2}$$

Generalizzazione della definizione di conduttività'  
Significato: corrente e campo non sono in fase

# Eq. delle onde nei conduttori - I

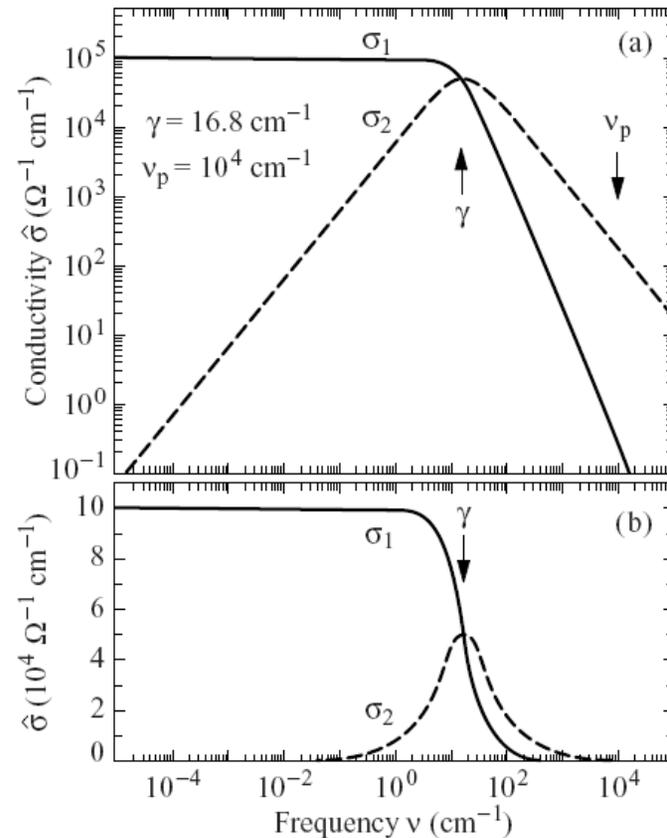
Conduttività complessa:  
Modello di Drude

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu \frac{Ne^2/m}{-i\omega + \gamma}$$

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu \frac{Ne^2/m}{\omega^2 + \gamma^2} (+i\omega + \gamma)$$

$$\rightarrow k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + \frac{Ne^2/m}{\omega^2 + \gamma^2} (-\omega^2\mu + i\omega\mu\gamma)$$

$$\rightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \left( \epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$



$$\sigma_1 = \text{Re}(\sigma), \sigma_2 = \text{Im}(\sigma)$$

# Eq. delle onde nei conduttori - II

Si puo' definire un indice di rifrazione anche per i conduttori:

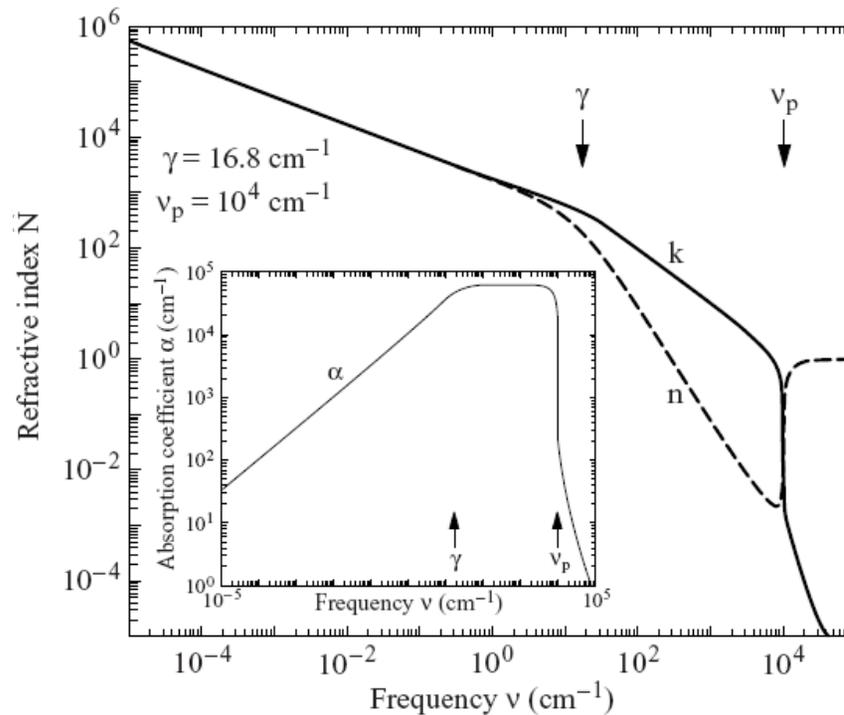
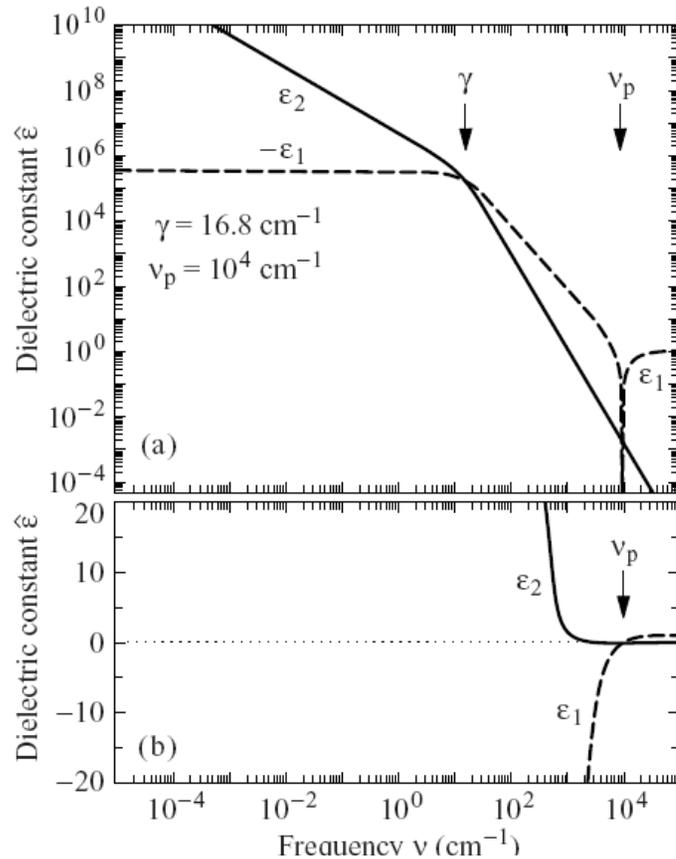
$$\frac{k^2}{\omega^2} = \left( \epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \equiv c^2 n^2$$

$$n = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}}$$

$$n \equiv n' + in'' \rightarrow n^2 = (n' + in'')^2 = n'^2 - n''^2 + 2in'n'' \underset{n'' \ll n'}{\approx} n'^2 + 2in'n'' = n'(n' + 2in'')$$

$$\rightarrow \begin{cases} n' \approx \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \left( \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}} \right) \\ n'' \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\frac{Ne^2}{mc} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}}{\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}}} \end{cases}$$

# Eq. delle onde nei conduttori - III



$$\nu_p = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{m\epsilon}} \quad \text{Frequenza di plasma}$$

# Le costanti ottiche dell'Argento

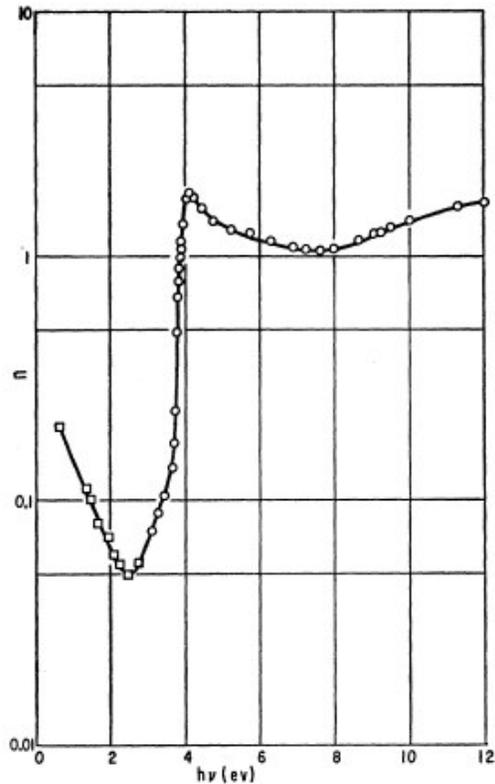


FIG. 2. Spectral dependence of the real part of the index of refraction of Ag. The values of Schulz are plotted below 3 eV (see work cited in footnote 2).

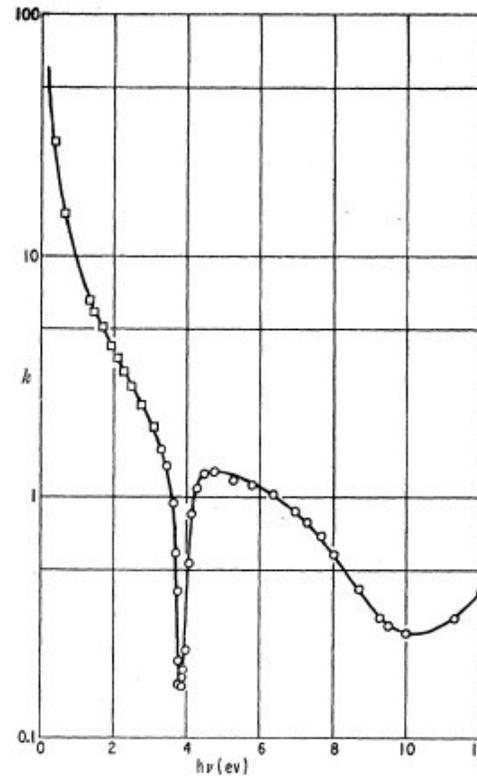


FIG. 3. Spectral dependence of the extinction coefficient (the imaginary part of the index of refraction) of Ag. The values of Schulz are plotted below 3 eV (see work cited in footnote 2).