

Onde, Radiazione e Relativita'

III - Dispersione nei dielettrici e nei conduttori

Dispersione

Evidenza che la propagazione dipende da 3 "costanti": ϵ , μ , σ .
In realt , nessuna delle 3   una costante: la dipendenza dalla frequenza   l'aspetto pi  interessante del problema.

In sintesi, la dipendenza di ϵ, μ dalla frequenza   dovuta alla variazione della velocit  di propagazione dell'onda con la frequenza

Questo   complessivamente non inaspettato alla luce della struttura microscopica della materia: ci sono elettroni (liberi o legati alle molecole) che possono scambiare energia con campi elettromagnetici esterni; il confronto fra la frequenza del campo esterno e quelle proprie di oscillazione (atomiche/molecolari) fissa le caratteristiche della propagazione, inclusa la velocit 

Dielettrici e conduttori

Enfasi su ε , σ : $\mu \sim \mu_0$, tranne che nei materiali ferromagnetici

Comportamento dispersivo diverso nei due casi:
Strutture microscopicamente diverse

Dielettrici: *elettroni legati, livelli energetici*

Transizioni fra stati discreti \rightarrow Assorbimento selettivo

Diseccitazione (radiativa o termica) \rightarrow Dissipazione

Conduttori: *elettroni 'liberi'*

Transizioni fra stati del continuo \rightarrow Assorbimento non selettivo

Diseccitazione (termica) \rightarrow Dissipazione

Entrambe le situazioni parzialmente descritte da modelli (semi)classici

Modello classico semplificato - I

Modello semplificato: elettrone legato elasticamente nell'atomo, o molecola. Forza di richiamo armonica:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Giustificazione: configurazione atomica stabile → elettrone in un minimo di potenziale. Sviluppo vicino al minimo:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

Ora: I termine si può porre = 0, II termine deve essere = 0 (forza = 0 in un minimo di U), III termine è quello di un oscillatore armonico

Modello classico semplificato - II

Equazione del moto per elettrone legato, con termine di smorzamento (p.es., dovuto a *radiazione*):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m \frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

con $E_{ext}(t)$ sinusoidale.

Cerchiamo soluzioni stazionarie, usando il solito formalismo degli esponenziali complessi:

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -i\omega x(t), \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

Modello classico semplificato - III

$$-x(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega x = -e \frac{E_0}{m}$$

$$x_0(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega x_0 = e \frac{E_0}{m}$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Si nota che:

- 1) La coordinata dell'elettrone e' è sfasata rispetto a E_0 (il coefficiente di E_0 è complesso); la fase varia da $-\pi$ a 0 al crescere della frequenza
- 2) L'ampiezza di oscillazione varia con ω , ed è max. per $\omega = \omega_0$

Modello classico semplificato - IV

Momento di dipolo indotto:

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

Se ci sono diverse classi di elettroni in ogni molecola, con f_j elettroni nella classe j -esima, e se ci sono N molecole/unita' di volume:

$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j\omega} \right) \mathbf{E}_0$$

Modello classico semplificato - V

Ricordando la definizione di suscettività' e costante dielettrica:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \left(\sum_j \frac{f_j e^2 / m}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j \omega} \right) \right]$$

che quindi si ritrova come quantita' complessa

Eq. delle onde nei dielettrici - I

Onde piane in un dielettrico dispersivo:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$-k^2 \mathbf{E} + \epsilon \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\rightarrow k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 \rightarrow k = \sqrt{\epsilon \mu_0} \omega$$

Numero d'onda complesso:

$$k = k_+ + ik_- \rightarrow E = E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$\alpha = 2k_- \quad \text{coefficiente di assorbimento}$$

$$v = \frac{\omega}{k_+} \quad \text{velocita'} \rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{ck_+}{\omega} \quad \text{indice di rifrazione}$$

Notare: il numero d'onda complesso e' dovuto al termine *dissipativo* nella forza

Eq. delle onde nei dielettrici - II

$$n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

$$\alpha = 2k_- \cong \frac{Ne^2 \omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Se $\omega < \omega_j$:

$$\frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + \left(\frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left(\frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{legge di Cauchy}$$

Eq. delle onde nei dielettrici - III

Si puo' definire un indice di rifrazione complesso, utile per trattare dielettrici assorbitivi

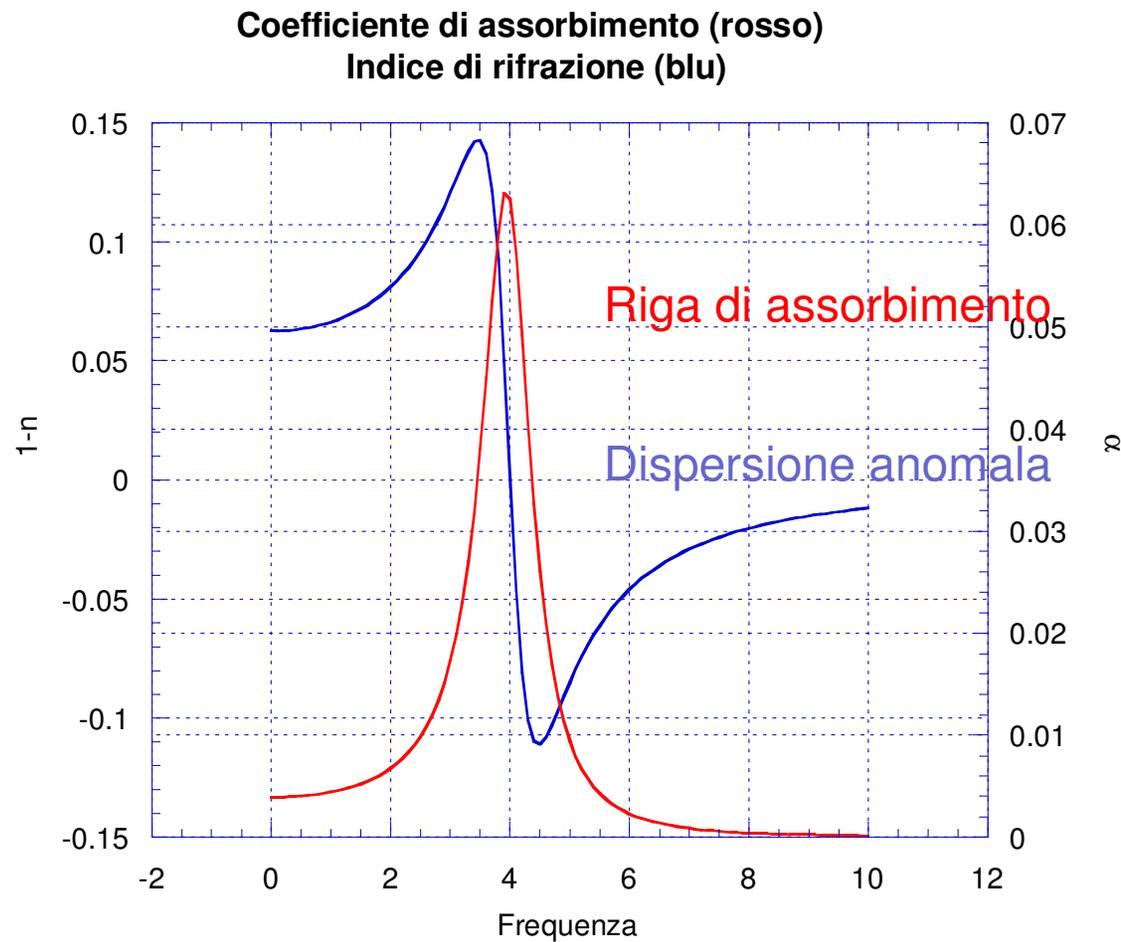
$$n = n_+ + in_-$$

$$n_+ = n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

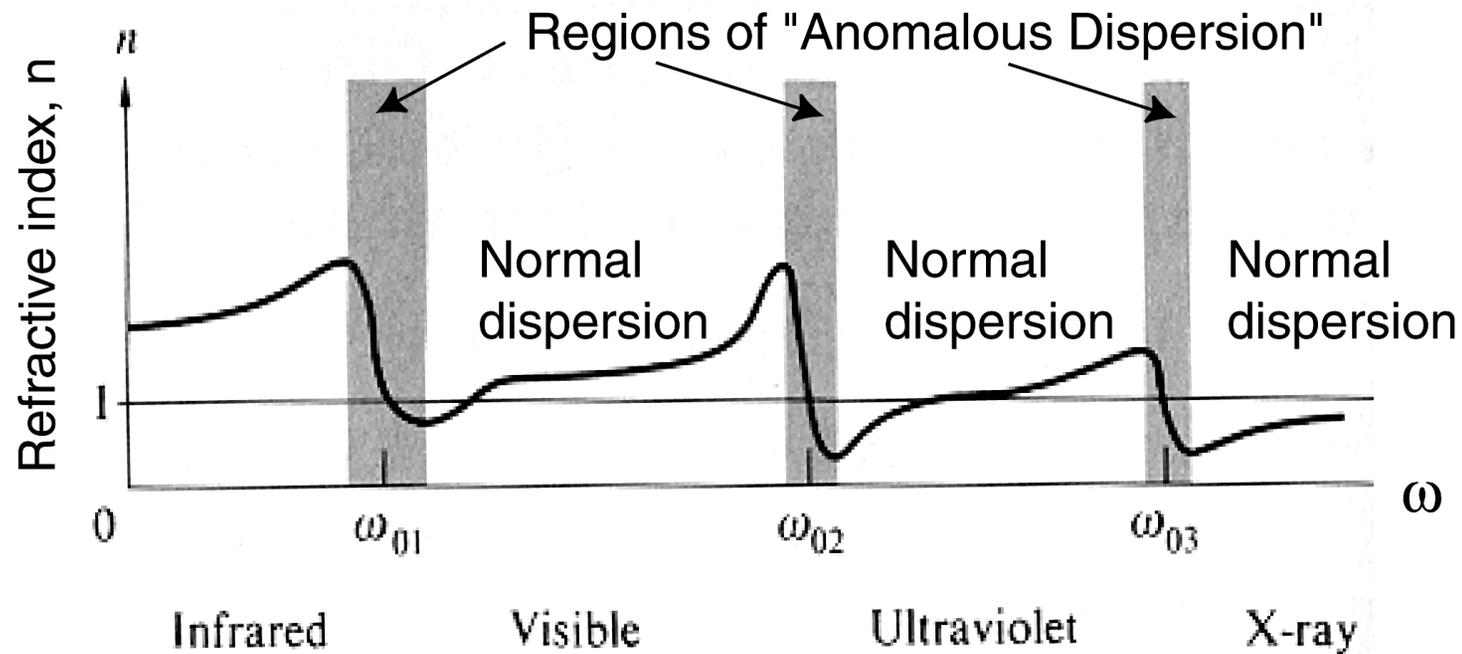
$$n_- = \frac{c\alpha}{2\omega} = \frac{ck_-}{\omega} \cong \frac{Ne^2\omega}{2m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Approssimazioni valide quando $n_+ \sim 1$, $n_- \ll 1$, p.es. nei gas

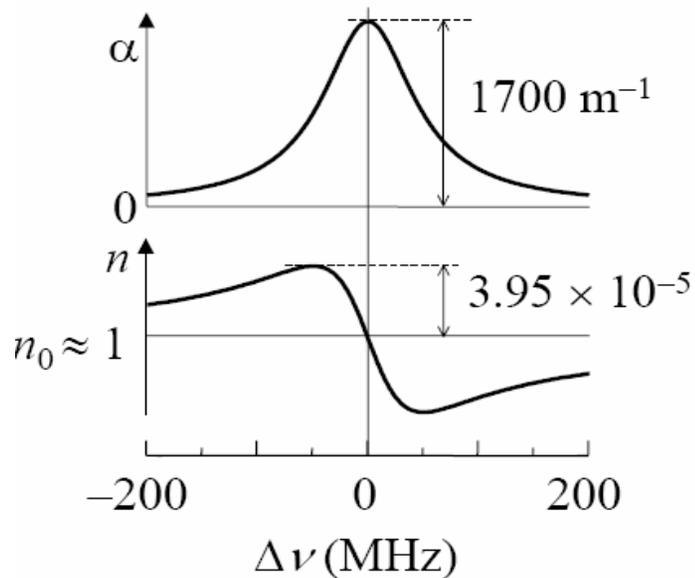
Dispersione: n e α per $\omega \sim \omega_0$



Andamento generico



Vapore



Lorentzian lineshape

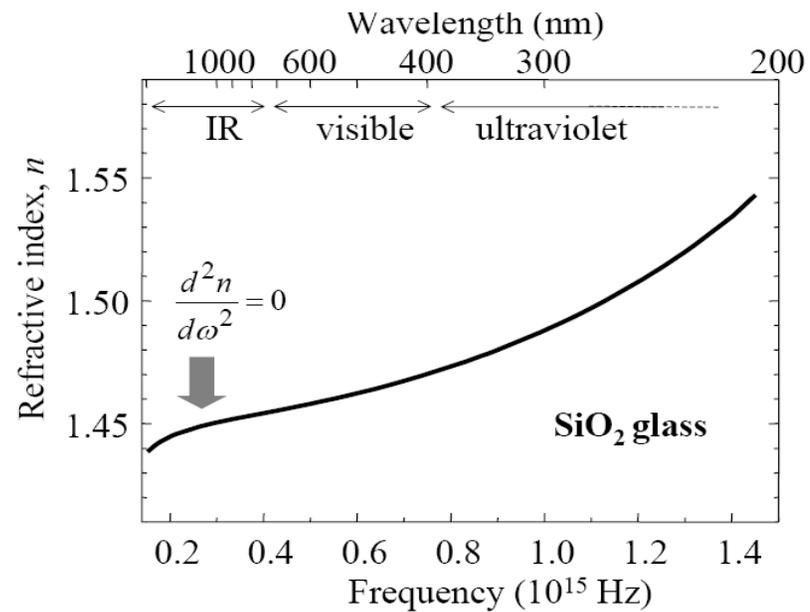
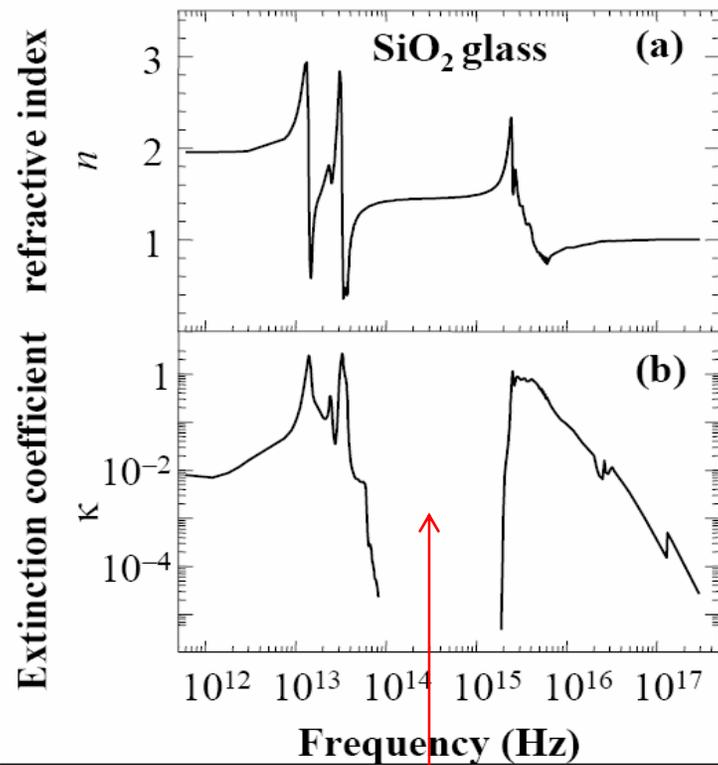
$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \frac{2\gamma^2}{4\Delta\omega^2 + \gamma^2}$$

$$n(\omega) = n_0 + \Delta n \frac{4\gamma\Delta\omega}{4\Delta\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$

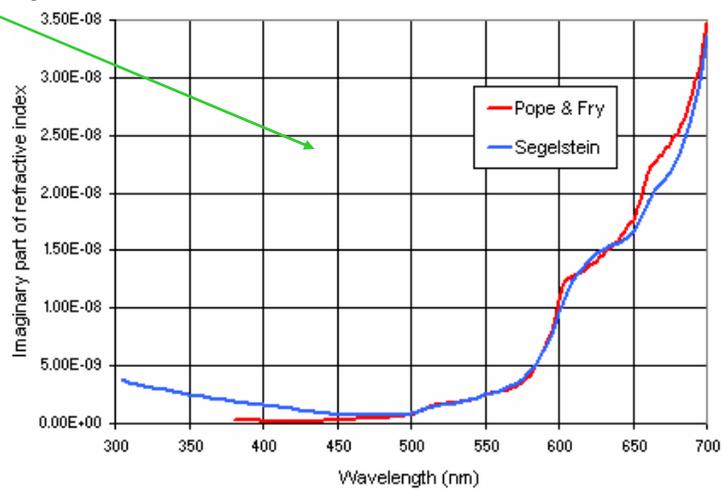
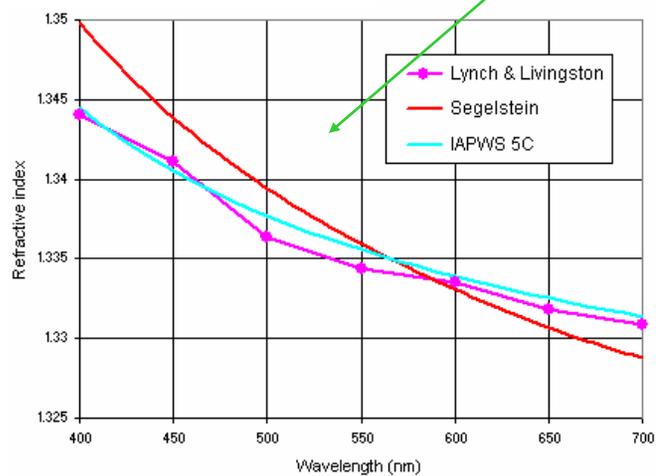
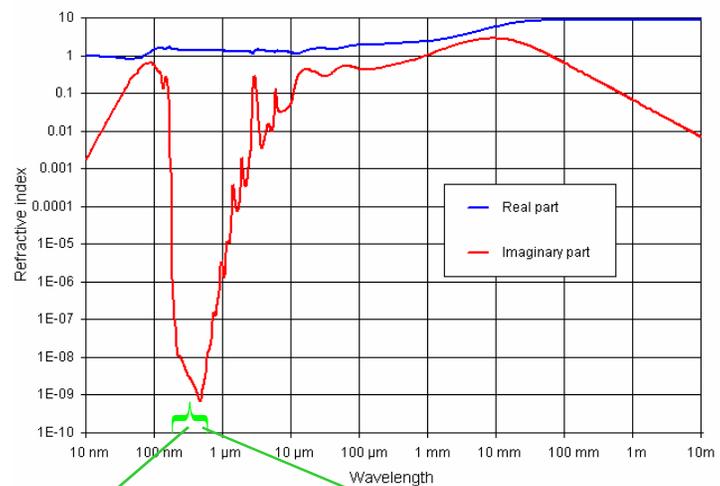
- sodium gas, $N = 1 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$ (low density $\Rightarrow n_0 \approx 1$)
- D_2 line at 589.0 nm, hyperfine component with FWHM = 100 MHz

Vetro

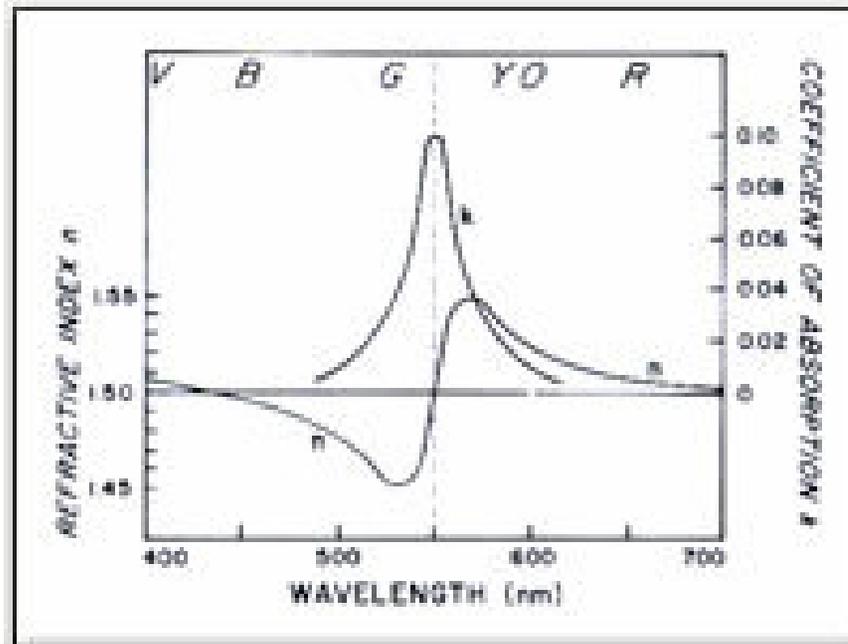


Finestra trasparente nel visibile

Acqua



Filtro violetto



NB: Plot in funzione di λ !
Forma della curva dispersiva rovesciata ...

Modello classico semplificato - I

Modello semplificato per un conduttore: elettroni liberi
Differenze rispetto ai dielettrici:

- 1) *Nessuna forza di richiamo → Nessuna frequenza propria*
- 2) *Generazione di corrente, invece che di polarizzazione*
- 3) *Termine dissipativo legato a perdite per collisioni col reticolo*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma m \frac{dx}{dt} - e E_{ext}(t)$$

$$\rightarrow -\omega^2 x = +i\gamma\omega x - e \frac{E_0}{m}$$

$$\omega^2 x_0 + i\gamma\omega x_0 = -e \frac{E_0}{m} \rightarrow x_0 = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

Modello classico semplificato - II

Densità di corrente generata:

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\frac{dx}{dt} = -i\omega x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{J} = Ne \frac{d\mathbf{x}}{dt} \rightarrow \mathbf{J} = \frac{Ne^2 i \omega}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \underbrace{\frac{Ne^2 i}{m(\omega + i\gamma)}}_{\sigma} \mathbf{E}$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma + i\omega}{\gamma^2 + \omega^2}$$

Generalizzazione della definizione di conduttività'
Significato: corrente e campo non sono in fase

Eq. delle onde nei conduttori - I

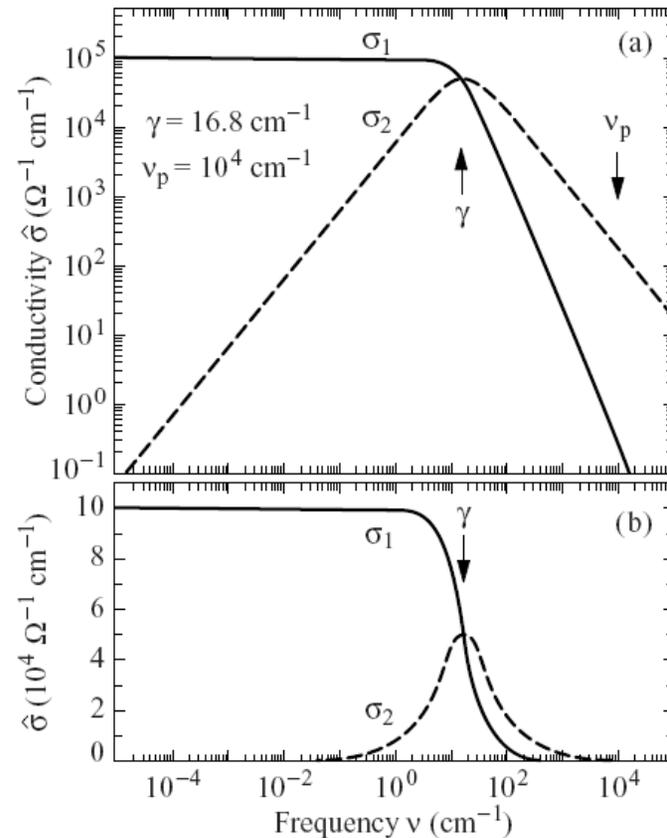
Conduttività complessa:
Modello di Drude

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu \frac{Ne^2/m}{-i\omega + \gamma}$$

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu \frac{Ne^2/m}{\omega^2 + \gamma^2} (+i\omega + \gamma)$$

$$\rightarrow k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + \frac{Ne^2/m}{\omega^2 + \gamma^2} (-\omega^2\mu + i\omega\mu\gamma)$$

$$\rightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \left(\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$



$$\sigma_1 = \text{Re}(\sigma), \sigma_2 = \text{Im}(\sigma)$$

Eq. delle onde nei conduttori - II

Si puo' definire un indice di rifrazione anche per i conduttori:

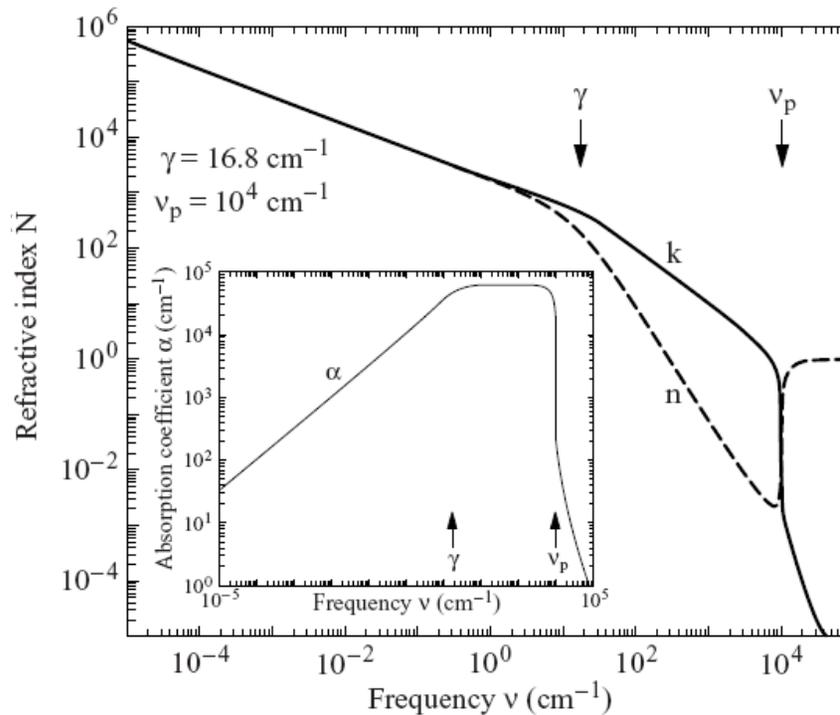
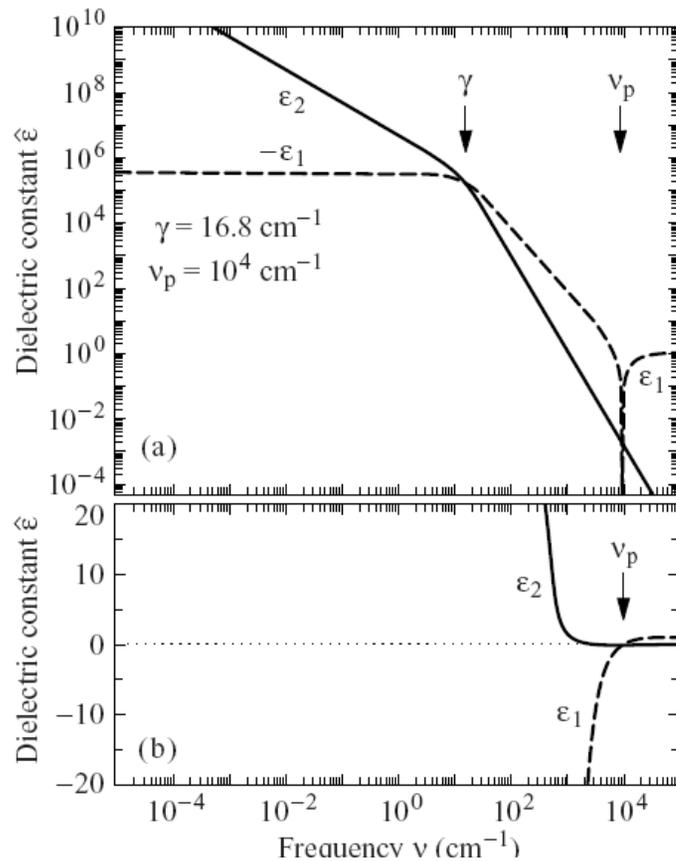
$$\frac{k^2}{\omega^2} = \left(\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \equiv c^2 n^2$$

$$n = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}}$$

$$n \equiv n' + in'' \rightarrow n^2 = (n' + in'')^2 = n'^2 - n''^2 + 2in'n'' \underset{n'' \ll n'}{\approx} n'^2 + 2in'n'' = n'(n' + 2in'')$$

$$\rightarrow \begin{cases} n' \approx \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}} \right) \\ n'' \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\frac{Ne^2}{mc} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}}{\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}}} \end{cases}$$

Eq. delle onde nei conduttori - III



$$\nu_p = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{m\epsilon}} \quad \text{Frequenza di plasma}$$

Le costanti ottiche dell'Argento

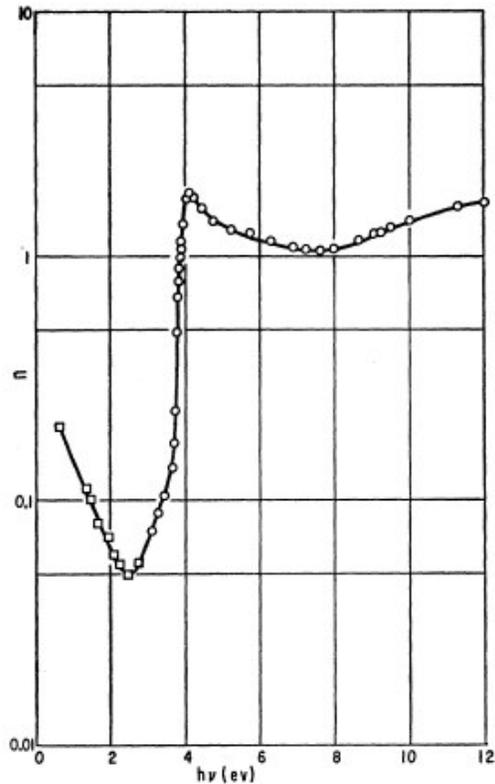


FIG. 2. Spectral dependence of the real part of the index of refraction of Ag. The values of Schulz are plotted below 3 eV (see work cited in footnote 2).

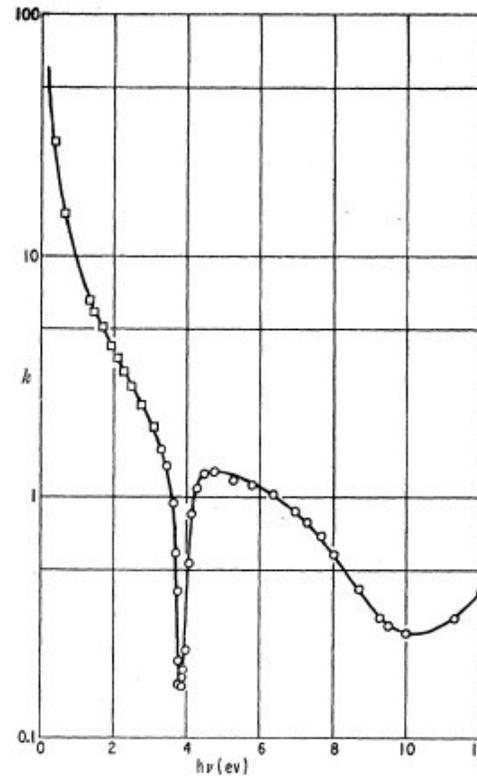
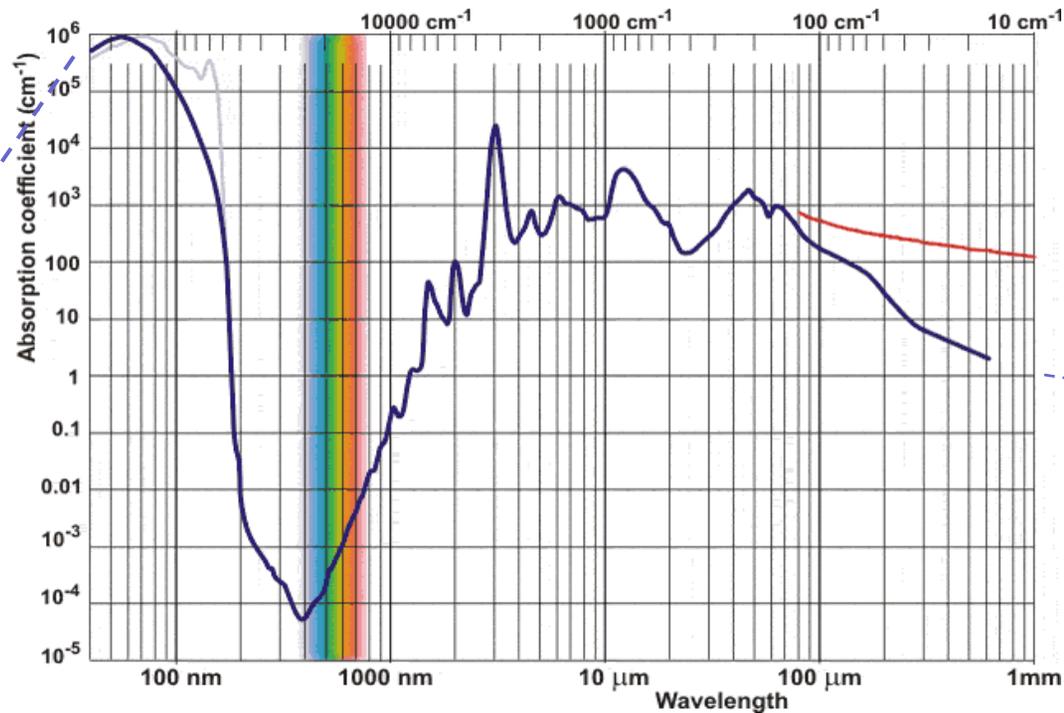


FIG. 3. Spectral dependence of the extinction coefficient (the imaginary part of the index of refraction) of Ag. The values of Schulz are plotted below 3 eV (see work cited in footnote 2).

Assorbimento H₂O: UV – IR, e piu'



Interazione campo
EM – materia
ad alta energia

Ionizzazione

Assorbimento
fotoelettrico

Finestra
visibile

Assorbimento
vibrazionale

Eccitazione

Riscaldamento

Interazione campo
EM - materia
a bassa energia

Propagazione nel plasma - I

Plasma: stato particolare della materia, in cui (normalmente ad alta T) elettroni e nuclei restano slegati: materia stellare, macchine a fusione
Situazione parzialmente simile nei conduttori.

→ *In un plasma si trovano molte cariche libere*

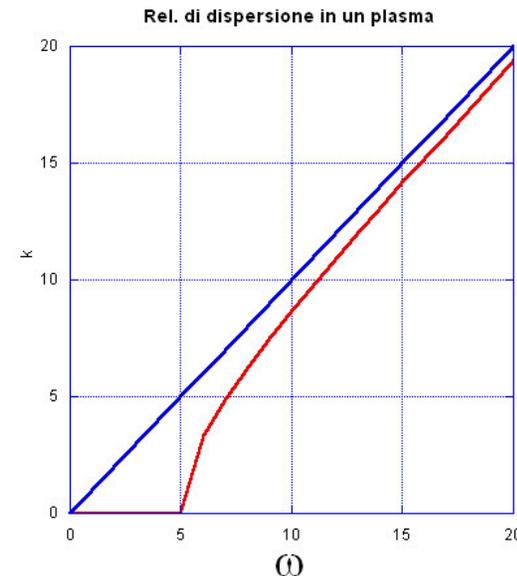
→ *Conduttività elevata*

In un plasma diluito, $\gamma \sim 0$, σ e' immag

$$\mu \cong \mu_0, \varepsilon \cong \varepsilon_0, \omega_p \equiv e \sqrt{\frac{N}{m\varepsilon_0}}$$

$$\rightarrow k^2 \cong \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

ω_p e' la *frequenza di plasma* del mezzo



Propagazione nel plasma - II

Onde con frequenza $> \omega_p$: numero d'onda reale
→ Propagazione regolare

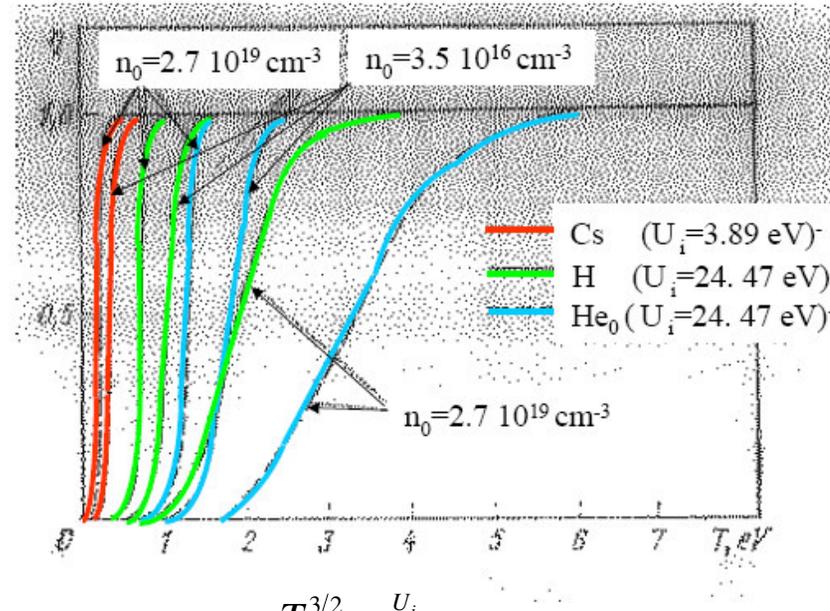
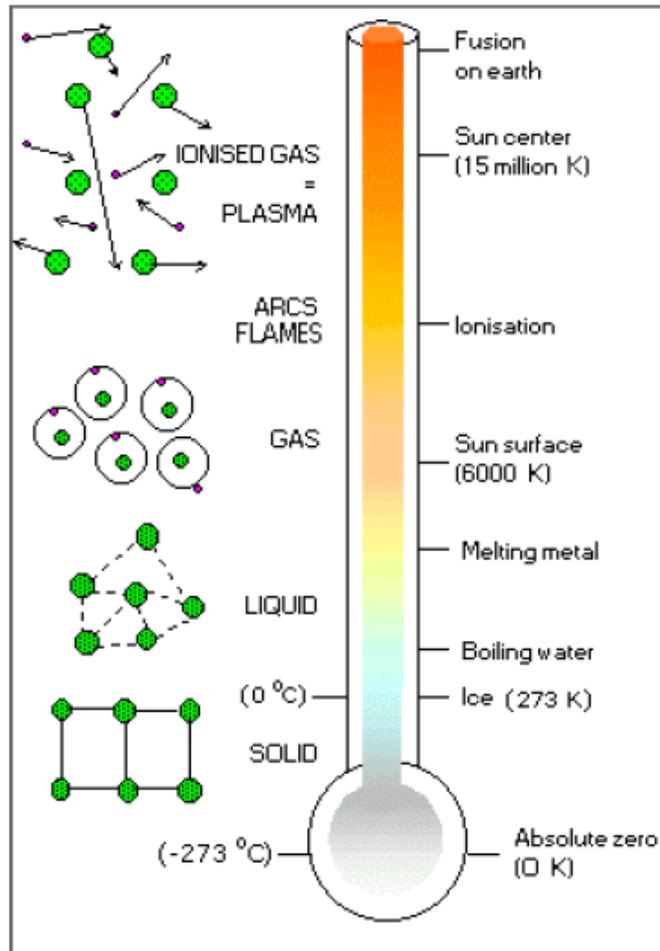
$$v = \frac{\omega}{k} = c \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Onde con frequenza $< \omega_p$: numero d'onda complesso
→ Attenuazione con lunghezza caratteristica

$$d = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

Propagazione nel plasma - III



$$\eta = \frac{n_i}{n_n} = K \frac{T^{3/2}}{n_n} e^{-\frac{U_i}{kT}}$$

Aria a 300 K: $U_i = 14.5 \text{ eV}$

$$\rightarrow \frac{n_i}{n_n} = 10^{-122} !$$

Propagazione nel plasma - IV

Ionizzazione:

Urto: onda e.m. + atomo neutro → ione + elettrone

Ricombinazione:

Urto: elettrone + ione → atomo neutro

$$\frac{dn_i}{dt} = \sigma_i n_i v_i$$

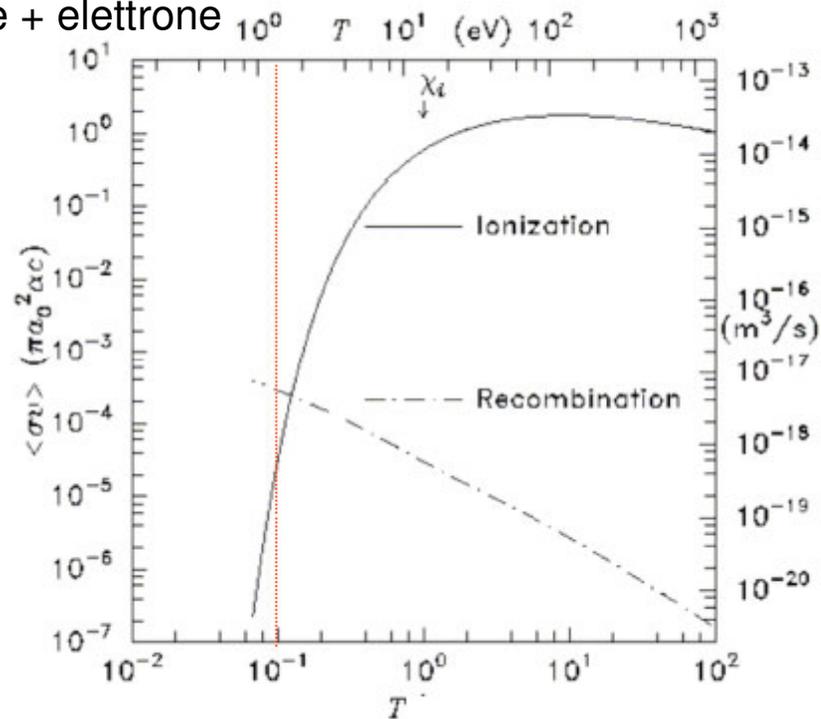
$$\frac{dn_r}{dt} = \sigma_r n_r v_r$$

σ : sez. d'urto
 v : vel. media

??
 Misura della probabilita' individuale di collisione

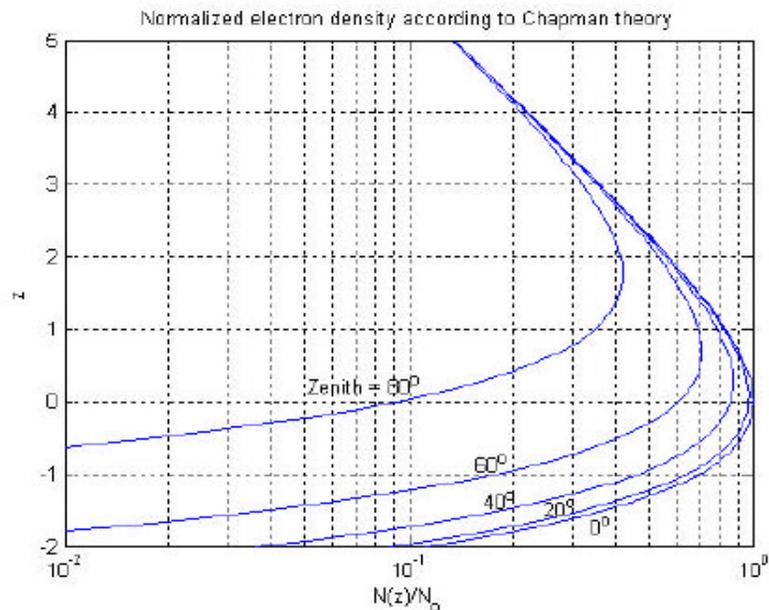
Equilibrio:

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{dn_r}{dt} \rightarrow \frac{n_i}{n_r} = \frac{\sigma_r v_r}{\sigma_i v_i}$$

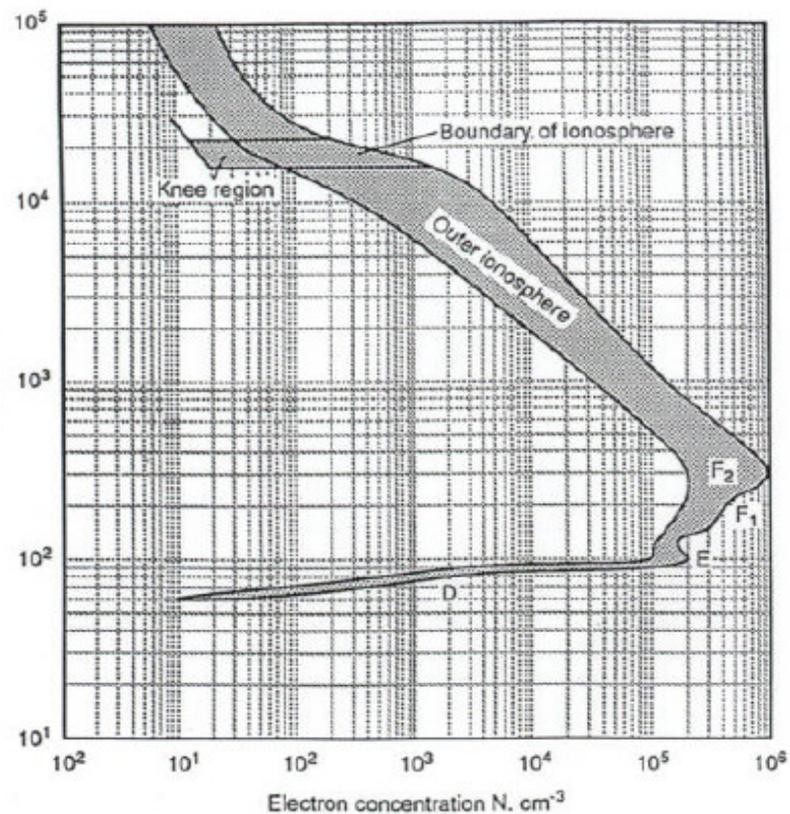


Propagazione nel plasma - V

Atmosfera: Densità di elettroni liberi vs altezza



$\rightarrow \omega_p \propto \sqrt{N_e}$ variabile con l'altezza



Propagazione nel plasma - VI

Propagazione delle onde radio nella ionosfera:
Onde ad alta frequenza riflesse a qualche altezza

$$k \cong \frac{1}{c} \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)}$$

→ $\begin{cases} \omega < \omega_p & \text{no propagazione} \\ \omega > \omega_p & \text{propagazione} \\ \omega = \omega_p & \text{riflessione} \end{cases}$

Trasmissione a grande distanza

