Onde, Radiazione e Relativita'

IV – Potenziali elettromagnetici

Eq. di Maxwell

Equazioni di Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

E’ possibile e utile introdurre due nuove funzioni di *(**r**,t)* che rendono piu’ semplice la risoluzione delle equazioni: i potenziali scalare e vettore, ϕ e ***A***

Potenziale elettrostatico

Proprieta' fondamentale del campo elettrico *per il caso statico:*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0 \text{ per campi statici}$$

Proprieta' generale del rotore:

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0$$

(Proprieta' derivate seconde miste..)

Quindi un campo elettrostatico si puo' sempre scrivere come

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \;\; \varphi = \varphi(\mathbf{r}) \text{ funzione scalare di } (x, y, z)$$

ϕ si chiama *potenziale elettrostatico*, ed e' definito a meno di una costante

Potenziale vettore

Proprieta' fondamentale del campo magnetico:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Proprieta' generale della divergenza:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{V} \right) \equiv 0$$

Quindi un campo magnetico si puo' sempre scrivere come:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \ \mathbf{A} \text{ funzione vettoriale di } (x, y, z)$$

A si chiama *potenziale vettore*, ed e' definito a meno del gradiente di una funzione qualsiasi (perche' il rotore di un gradiente e' identicamente nullo)

Potenziali e gauge

ϕ e $\boldsymbol{A}$ definiti a meno di

una costante
una funzione di $\boldsymbol{r}$

$\rightarrow$ Possibile richiedere che ϕ ed $\boldsymbol{A}$ soddisfino condizioni extra

Condizioni extra chiamate *condizioni di gauge*
(nome con origini lontane..)

Non ovvio trovare quali condizioni di gauge sono compatibili con le equazioni di Maxwell

ϕ ed *A*

Sempre vero:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \to \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = 0$$

$$\to \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Quindi l'argomento del rotore si puo' scrivere come il gradiente di una funzione scalare:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \to \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Significato dei potenziali

Quindi:

E dipende da due potenziali: ϕ = pot. scalare, ***A*** = pot. vettore
NB ϕ non e' il pot. elettrostatico, che e' indipendente da *t*, anche se coincide con esso per i casi statici

B dipende dal solo pot. vettore

Se si trovano le equazioni per ϕ,***A***, dalle loro soluzioni si possono poi ricavare ***E,B***

Per trovare le soluzioni occorre *fissare il gauge* (un po' come decidere il sistema di riferimento…)

Le equazioni per ϕ ed *A*

Dalla I e IV equazione di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla^2 \varphi + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \varphi)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\nabla \varphi)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Gauge di Coulomb e di Lorentz

Le equazioni per ϕ ed ***A*** si possono semplificare e separare fissando il gauge.
Scelta del gauge: equivalente a fissare il riferimento

Varie scelte possibili, fra le altre:

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ gauge di Coulomb

oppure

$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ gauge di Loren(t)z

Si puo' dimostrare che ciascuna di queste condizioni aggiuntive e' compatibile con le eq. di Maxwell

Gauge di Coulomb - I

Condizione di gauge:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Le equazioni per ϕ e per $\boldsymbol{A}$ diventano:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \to \varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} - \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j}_t$$

??

Si puo' fare vedere che nella II equazione il termine con $\partial\phi/\partial\tau$ si combina con $\boldsymbol{j}$, lasciando a secondo membro solo la parte *trasversale* della densita' di corrente

NB Trasversale rispetto a cosa? Mah..

Gauge di Coulomb - II

Utilizzando l'eq. di continuita':

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

$$\rightarrow \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} - \nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla\left(\int \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'\right)$$

Essendo un gradiente, ha ***rot*** nullo

Gauge di Coulomb - III

Teorema di Helmholtz

Un campo vettoriale e' definito quando sono definiti il suo rotore e la sua divergenza

Segue:

Ogni campo vettoriale si puo scrivere come la somma di una parte a rotore nullo e di una parte a divergenza nulla

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} \\ \nabla \times \boldsymbol{C} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_l + \boldsymbol{j}_t \\ \nabla \times \boldsymbol{j}_l = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{j}_t = 0 \end{array}\right.$$

Gauge di Coulomb - IV

Origine dei nomi:
Trasformate di Fourier

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{k})e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}\rightarrow 0=\nabla\times\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{r})=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{r})\rightarrow\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{r})\parallel\boldsymbol{k}\\[2ex]\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{k})e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{k}\rightarrow 0=\nabla\cdot\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{r})=i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{r})\rightarrow\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{r})\perp\boldsymbol{k}\end{cases}$$

Per il pot. vettore di un’onda, ***k*** e’ il vettore d’onda (direz. propagazione)

Gauge di Coulomb - V

Inoltre:

$$\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\int \frac{\nabla\cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\right)$$

$$\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\int \frac{\nabla\times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\right)$$

$$\rightarrow \Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\int \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\right) = -\mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\boldsymbol{j}_l(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0\boldsymbol{j}_t$$

Nel gauge di Coulomb, il potenziale scalare e’ determinato (in modo istantaneo: idea controintuitiva, ma non illogica) dalla sola densita’ *istantanea* di carica; il potenziale vettore dalla sola parte trasversale della densita’ *ritardata* di corrente (v. dopo)

Gauge di Coulomb - VI

In assenza di cariche e correnti:

$$\begin{cases} \varphi \equiv 0 \\ \Delta \boldsymbol{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \boldsymbol{A} \text{ onda (p.es. piana)} \end{cases}$$

Origine dell’altro nome:
Gauge *radiazione*

Notevole: in questo caso, i campi ***E*** e ***B*** dipendono dal solo potenziale vettore!

Coerente con cio’ che gia’ sappiamo:
Si tratta dei campi di un’onda elettromagnetica, che sono legati dalla relazione:

$$\boldsymbol{E} = c\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{B}$$

Siccome ***B*** e’ *sempre* determinato dal solo ***A***, in questo caso anche ***E*** e’ completamente determinato da ***A***

Equazione di Poisson

Nel caso statico, le equazioni per i potenziali nel gauge di Coulomb diventano *equazioni di Poisson*:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$$

Equazioni diff. alle derivate parziali, non omogenee
Integrale generale:

Int. generale omogenea associata + Int. particolare non omogenea

Soluzione eq. di Poisson - I

Carica *unitaria*, puntiforme, in $\boldsymbol{r}'$ $\rightarrow$ $\rho_G(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$

Sol. eq. di Poisson per questo caso: *funzione di Green*

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \rightarrow \nabla^2 G = -\frac{\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0}$$

Laplaciano della distanza inversa, integrato su un volume V:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \right) d^3\boldsymbol{r} = \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{u} \right) d^3\boldsymbol{u} = \int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{u} \right) \right] d^3\boldsymbol{u}$$

Teo. della divergenza, su sfera *S* di raggio *R* che delimita *V*

$$\int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{u} \right) \right] d^3\boldsymbol{u} = \int_S \left[\nabla \left(\frac{1}{u} \right) \right] \cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{u} \right) \hat{\boldsymbol{u}} \right] \cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \left(-\frac{1}{u^2} \right) \hat{\boldsymbol{u}} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Soluzione eq. di Poisson - II

$$\int_S \left(-\frac{1}{u^2}\right)\hat{\boldsymbol{u}}\cdot d\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi R^2}{u^2}$$

$$\lim_{R\to 0}\int_S \left(-\frac{1}{u^2}\right)\hat{\boldsymbol{u}}\cdot d\boldsymbol{A} = \begin{cases} 0 & \text{se } u \neq R \\ -4\pi & \text{se } u = R \end{cases}$$

$$\rightarrow \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \equiv -4\pi\rho_G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 4\pi\varepsilon_0\nabla^2 G$$

$$\rightarrow G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Il potenziale Coulombiano e' la funzione di Green dell'eq. di Poisson

Soluzione eq. di Poisson - III

Potenziale per densita' generica ρ:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'$$

Importanza della funzione di Green

Infatti:

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) = \nabla^2\left[\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \underbrace{\nabla^2}_{\substack{\text{der. rispetto} \\ \text{a } \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}' = \text{cost}}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'$$

$$\rightarrow \nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}' = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \quad \text{OK}$$

Gauge di Lorentz - I

Applicando la condizione di Lorentz

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

le equazioni per i potenziali diventano:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

ossia *equazioni d'onda inomogenee*

Gauge di Lorentz - II

Si osservi come nel caso statico i due gauges coincidano…

Le soluzioni delle eq. statiche (Poisson) sono quindi le stesse, sia nel gauge di Coulomb, sia nel gauge di Lorentz

Metodo della funzione di Green:

Analogo al caso statico

Come tener conto della dipendenza temporale dei potenziali?

Passaggio dal dominio del tempo a quello della frequenza

$\rightarrow$ Sviluppo in integrale di Fourier

Eq. delle onde non omogenea - I

Sviluppo in integrale di Fourier della soluzione e del termine noto:

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

Inserendo nell'equazione:

$$\int\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}d\omega=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$\rightarrow\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{\rho(\boldsymbol{r},\omega)}{\varepsilon_0}$$

Eq. di Helmholtz non omogenea

Eq. delle onde non omogenea - II

Metodo delle funzioni di Green:

$$\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)G(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0}$$

G a simmetria sferica, dipendente solo da $\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\equiv u$

$$\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)G(u,\omega)=\underbrace{\frac{1}{u}\frac{d^2(uG)}{du^2}}_{\substack{\Delta \text{ in coord.sferiche} \\ \text{Indip. dagli angoli}}}+\frac{\omega^2}{c^2}G=0,\quad u>0$$

Eq. dei moti armonici; soluzione per *r>0*:

$$G(u,\omega)=\frac{1}{u}\left(c_1e^{i\omega u/c}+c_2e^{-i\omega u/c}\right),\quad u>0$$

Eq. delle onde non omogenea - III

Per ottenere i potenziali nel dominio del tempo:

Passaggio dalle trasformate alle funzioni di *t*

Antitrasformata di Fourier della soluzione

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},\omega)e^{+i\omega t}d\omega=\int e^{+i\omega t}d\omega\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\hat{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)d^3\boldsymbol{r}'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\int\left(c_1e^{i\omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c}+c_2e^{-i\omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c}\right)e^{+i\omega t}\hat{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\underbrace{\int\left(c_1e^{+i\omega(t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}+c_2e^{-i\omega(-t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}\right)\hat{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)d\omega}_{c_1\rho(\boldsymbol{r}',t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)+c_2\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}$$

Potenziali ritardati - I

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\left(c_1\rho\left(\boldsymbol{r}',t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)+c_2\rho\left(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)\right)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\left(c_1\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)+c_2\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)\right)$$

Potenziali <u>anticipati</u> e <u>ritardati</u>

I potenziali anticipati non si considerano perche' violano il principio di causalita': l'effetto comparirebbe prima della causa

NB: Questione in realta' piu' complicata di quel che appare..

Potenziali ritardati - II

Modo di interpretare la soluzione: poiche' le onde e.m viaggiano nel vuoto a velocita' *c*, bastera' sostituire nella soluzione statica $\rho(\mathbf{r}')$ con $\rho(\mathbf{r}',t_r)$, essendo il tempo ritardato $t_r = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(r',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dr'$$

$$\mathbf{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(r',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dr'$$

Quindi, il valore del potenziale in un dato punto a un dato istante dipende dalla densita' in tutti gli altri punti, a istanti tanto piu' antichi quanto piu' i punti-sorgente sono distanti dal punto-campo