

Onde, Radiazione e Relativita'

V – Radiazione di dipolo

Dipoli elettrici - I

Definizione elementare di dipolo elettrico:
Definito per un sistema a carica totale *nulla*
2 cariche uguali e opposte, a distanza d

$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, \mathbf{d} posizione da carica -va a +va

$$\rightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{r}_i$$

Generalizzazione:

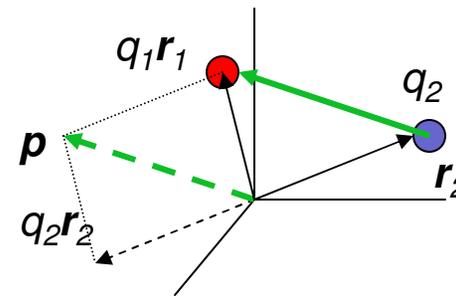
Definito per un sistema a carica totale *nulla* o *non nulla*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

Per distribuzioni continue:

Momento di dipolo elettrico di una distribuzione di carica

$$\mathbf{p} = \int_{\text{volume}} \mathbf{r} dq = \int_{\text{volume}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}$$



Dipoli elettrici - II

a) Sistema a carica totale nulla: \mathbf{p} indipendente da origine assi
Rispetto a rif. S' , con origine spostata di \mathbf{a} rispetto a S :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{p} - \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{a} = \mathbf{p} - \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=1}^N q_i}_{=0} = \mathbf{p}$$

b) Sistema a carica totale non nulla: \mathbf{p} dipendente da origine assi
Rispetto a rif. S' , con origine nel *centro di carica* \mathbf{r}_c :

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i q_i}{\sum_{i=1}^N q_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i q_i}{Q} \rightarrow \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) = 0$$

Sistema a carica $\neq 0$ piu' semplice: carica puntiforme a distanza \mathbf{r} dall'origine

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}$$

Dipoli elettrici - III

Dipolo ideale:

Definito solo dal valore di \mathbf{p} , non da d o q

Nessuna dimensione fisica:

Limite puntiforme di ogni dipolo reale

Analogo alla carica puntiforme, ma intrinsecamente differente:

Carica nulla, potenziale e campo diversi da 0

Pot. scalare e campo di un dipolo:

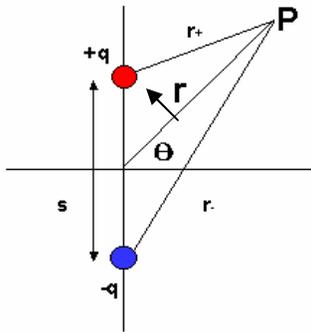
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\nabla[\varphi(\mathbf{r})] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right)$$

Se q e/o d variano nel tempo: \mathbf{p} *variabile*

Radiazione di dipolo elettrico - I

Modello di un dipolo: sfere conduttrici identiche, collegate da filo conduttore
 Carica su ogni sfera oscillante, corrente oscillante nel conduttore
 NB Modello semplificato di un circuito LC senza perdite resistive



$$\mathbf{p}(t) = q(t)\mathbf{s} = q_0 s \hat{\mathbf{k}} \cos \omega t$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 - rs \cos \theta + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + rs \cos \theta + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

Approssimazione di *zona d'onda*: 2 condizioni indipendenti

$$r \gg s$$

$$r \gg c/\omega = \lambda$$

$$r_{\pm} \cong r \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{s}{r} \cos \theta \right) \rightarrow \frac{1}{r_{\pm}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{s}{r} \cos \theta \right)$$

Radiazione di dipolo elettrico - II

Potenziale scalare in P :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0 \cos \omega(t - r_+/c)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega(t - r_-/c)}{r_-} \right]$$

NB Corrisponde alla soluzione dei pot. ritardati, ristretta al caso di 2 cariche puntiformi variabili con dipendenza da t armonica

Nell'approssimazione di zona d'onda, e assumendo inoltre:

$s \ll c/\omega \rightarrow \lambda \gg s$ app. di dipolo

$$\begin{aligned} \cos \omega(t - r_{\pm}/c) &= \cos \left[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right] \\ &= \cos \omega(t - r/c) \cos \left(\frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right) \mp \sin \omega(t - r/c) \sin \left(\frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right) \\ &\cong \cos \omega(t - r/c) \mp \frac{\omega s}{2c} \cos \theta \sin \omega(t - r/c) \end{aligned}$$

Radiazione di dipolo elettrico - III

Il potenziale scalare si scrive:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) + \frac{1}{r} \cos \omega(t - r/c) \right]$$

Osservazioni:

- 1) Il II termine va come $1/r^2 \rightarrow$ analogo al caso statico
- 2) Il I termine va come $1/r$

Nella zona d'onda e in app. di dipolo (v. prima per le condizioni):

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \cong \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) \right]$$

Radiazione di dipolo elettrico - IV

Per il potenziale vettore si procede in maniera simile, e si trova

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \omega t \quad \text{corrente istantanea nel filo}$$

Pot. ritardato nel gauge di Lorentz:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad \text{Contributo elementare ad } \mathbf{A} \text{ (el. di corrente } \mathbf{j}d^3r)$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol. filo}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol. filo}} \frac{\overbrace{j(\mathbf{r}', t - r/c)}^{i(z', t - r/c)} dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{lungh. filo}} \frac{i(z', t - r/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{k}} dz' \approx -\frac{\mu_0}{4\pi r} q_0 s \omega \sin \omega(t - r/c) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \hat{\mathbf{k}} \sin \omega(t - r/c) \quad \text{Pot. vettore ritardato (zona d'onda, app. di dipolo)}$$

Radiazione di dipolo elettrico - V

Dai potenziali si trovano i campi **E** e **B**:

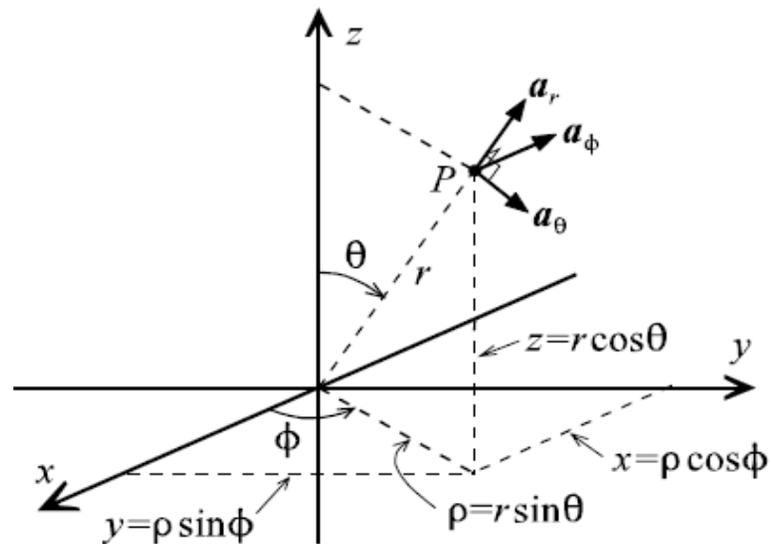
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos\omega(t-r/c) \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos\omega(t-r/c) \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

\mathbf{a}_θ e \mathbf{a}_ϕ sono i *versori sferici*

Versori sferici

\mathbf{a}_r || al raggio vettore
 \mathbf{a}_θ || al meridiano
 \mathbf{a}_ϕ || al parallelo (!)



Dipoli magnetici

Definizione elementare di dipolo magnetico:
Spira di area A percorsa da corrente I

$$\mathbf{m} = IA\hat{\mathbf{n}}$$

Generalizzazione:
Momento di dipolo magnetico di una distribuzione di corrente

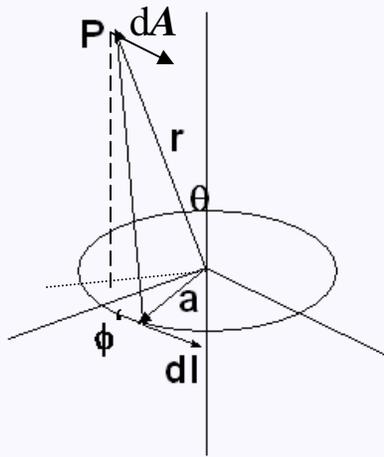
$$\mathbf{m} = \int_{\text{volume}} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

Situazione analoga a quella dei momenti di dipolo elettrico

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right)$$

Radiazione di dipolo magnetico - I



$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

$$\mathbf{m}(t) = \pi a^2 I(t) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\rightarrow \mathbf{m}(t) = m_0 \hat{\mathbf{k}} \cos \omega t$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{a}}_\phi \parallel d\mathbf{l}$$

Spira (scarica), corrente oscillante:

$$\begin{cases} \phi \equiv 0 \\ d\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol. spira}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' =$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} a \int_{\text{angolo giro}} \frac{i(\phi, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\phi')|/c) \hat{\mathbf{a}}_\phi(\phi')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\phi')|} d\phi'$$

Radiazione di dipolo magnetico - II

Con la geometria della figura:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \pi a^2 \hat{\mathbf{a}}_\phi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega \left(t - \left(|\mathbf{r} - a \hat{\mathbf{a}}_r(\phi')| \right) / c \right)}{|\mathbf{r} - a \hat{\mathbf{a}}_r(\phi')|} \cdot \cos(\phi' - \phi) d\phi'$$

Procedendo come nel caso precedente, con le solite approssimazioni:

- 1) $r \gg a$
 - 2) $r \gg c/\omega = \lambda$
 - 3) $a \ll c/\omega = \lambda$
- } Zona d'onda
App. di dipolo

si trova per il potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \omega(t - r/c) \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

Radiazione di dipolo magnetico - III

Si ottengono i campi:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

Osservazioni:

Stesso andamento con r

Stesso andamento con θ

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}/c$$

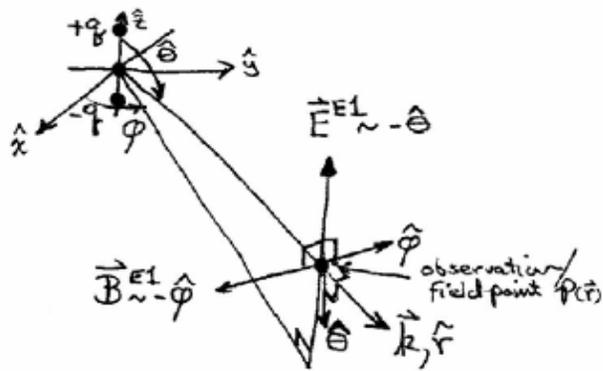
In fase

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$$

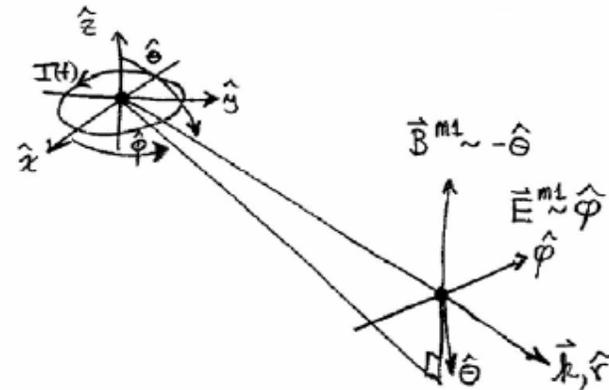
Rapp. Vettoriale di E, B

Polarization of
E(1) Electric Dipole Radiation:

⊥ to

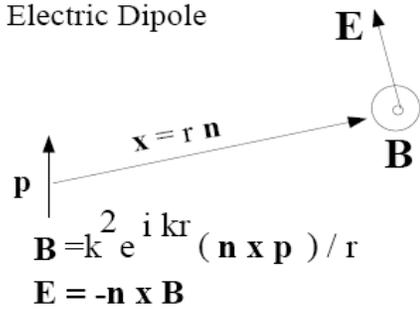


Polarization of
M(1) Magnetic Dipole Radiation:

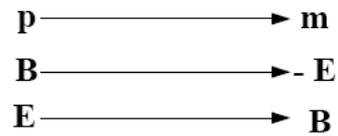
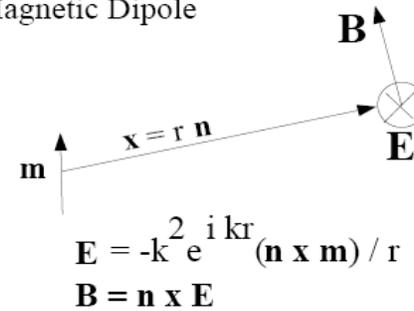


Dipolo vs. dipolo

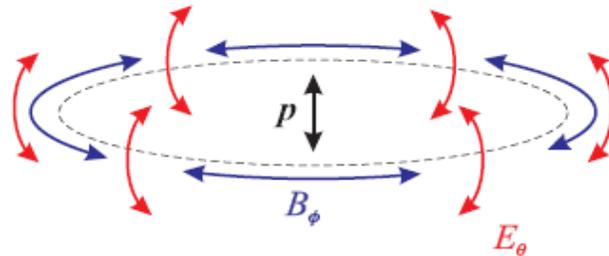
Electric Dipole



Magnetic Dipole

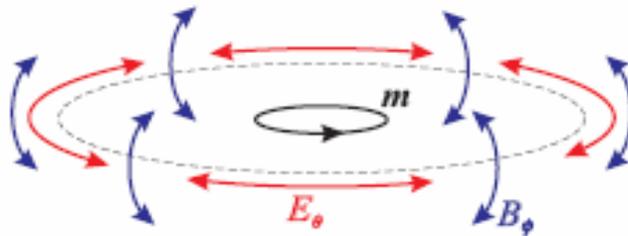


Campi di dipolo

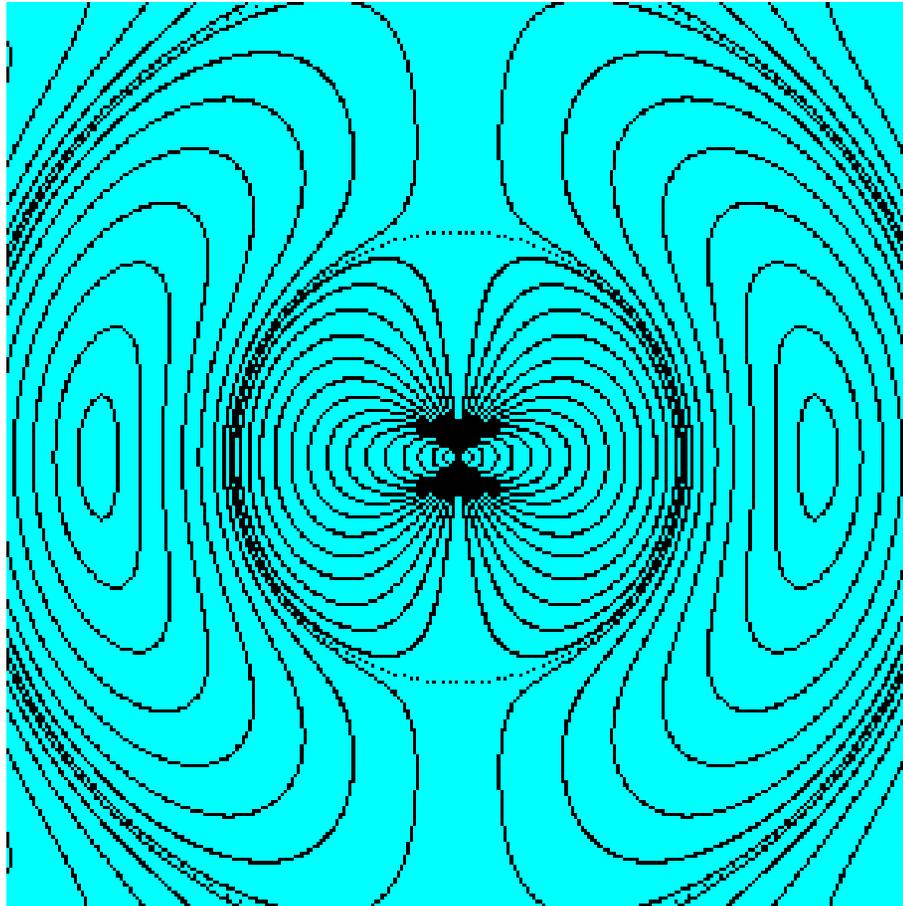


In entrambi i casi:

$$\begin{aligned} E &\perp B \\ S &\parallel r \end{aligned}$$



Campo E di un dipolo oscillante



Onde sferiche

Il campo di un dipolo elettrico/magnetico oscillante, nella zona d'onda, ha la componente elettrica e quella magnetica con le seguenti caratteristiche:

- o \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali fra loro
- o \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali al versore \mathbf{a}_r
- o \mathbf{E} e \mathbf{B} sono in fase
- o \mathbf{E} e \mathbf{B} si propagano con velocità c
- o $\mathbf{B} = \mathbf{E}/c$
- o \mathbf{E} e \mathbf{B} si attenuano come $1/r$

Queste sono le caratteristiche di un'onda elettromagnetica; si tratta di un' *onda sferica*, che si propaga in tutte le direzioni

Dipolo elettrico: Flusso di energia

Calcoliamo il vettore di Poynting per il campo di dipolo elettrico:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \right]^2 \hat{\mathbf{r}}$$

Media su un periodo:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Integrale sull'angolo solido (= potenza totale irraggiata):

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}$$

Dipolo magnetico: Flusso di energia

Procedendo come per il dipolo elettrico:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \right]^2 \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^5}$$

Rapporto fra potenze per dip. elettrico e magnetico:

$$\frac{P_{magn}}{P_{elett}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{m_0}{p_0} \right)^2$$

Potenza totale irraggiata: p vs m

Per dipoli della stessa dimensione, pilotati dalla stessa corrente:

$$\frac{dp}{dt} = a \frac{dq}{dt} = aI = a\omega q_0 \cos \omega t = p_0 \omega \cos \omega t$$

$$\rightarrow p_0 = \frac{aI_0}{\omega}$$

$$m = \pi a^2 I_0 \cos \omega t$$

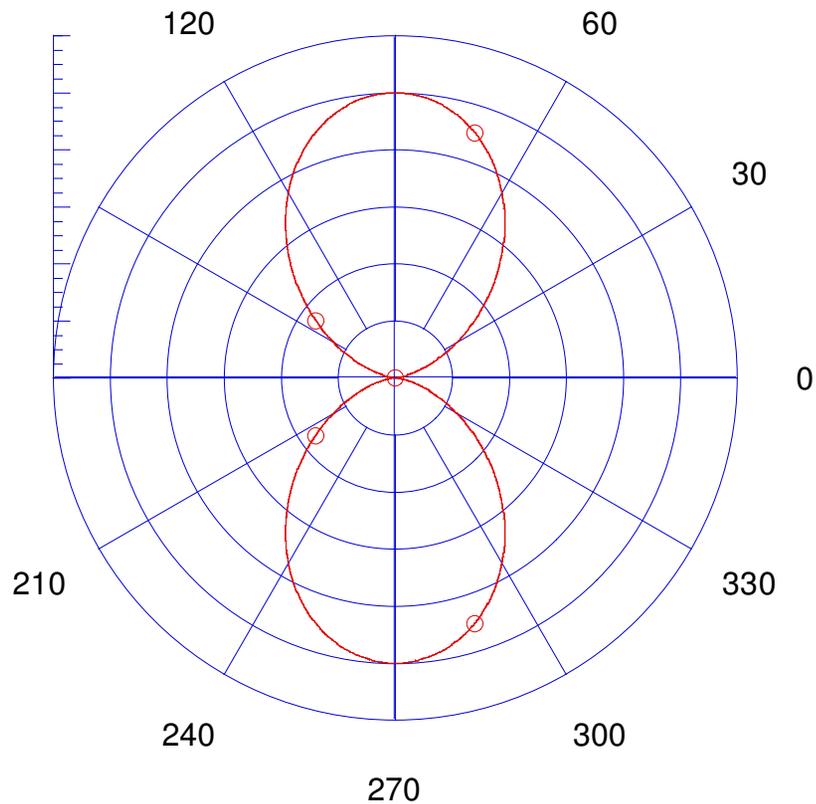
$$\rightarrow m_0 = \pi a^2 I_0$$

Dipoli piccoli:
M molto meno efficienti di E

$$\rightarrow \frac{P_{magn}}{P_{elett}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{m_0}{p_0} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\pi a^2 I_0}{\frac{aI_0}{\omega}} \right]^2 = \frac{\pi^2 a^2 \omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 a^2 4\pi^2 \nu^2}{c^2} = \frac{4\pi^4 a^2}{\lambda^2} = \pi^2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2$$

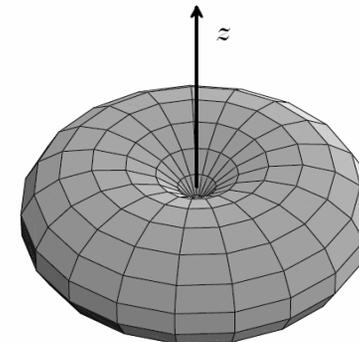
Dipolo el/mag: $\langle S \rangle$ vs. angolo

Intensita' vs. angolo
Campo di radiazione di un dipolo elettrico oscillante



L'asse del dipolo e' a 0 gradi
Intensita' max. a 90 gradi
Simmetria assiale

Nello spazio, la figura sembra
una "ciambella" senza buco

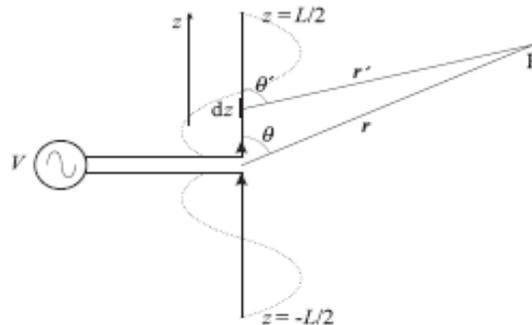


Antenne - I

Dipolo elettrico, magnetico: esempi ideali di *antenne trasmittenti*

Antenne reali: condizione $d \ll \lambda$ non soddisfatta

Esempio: Antenna $\lambda/2$



Dipendenza da z e t separata:
Per ogni z , stesso andamento con t

Lunghezza totale = $\lambda/2$

Correnti *stazionarie* nei due segmenti

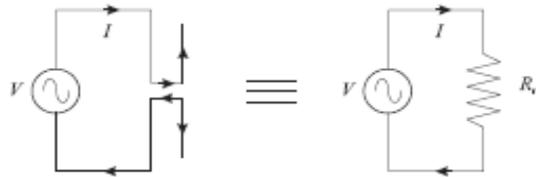
La corrente non e' la stessa in tutti i punti del filo:
occorre sovrapporre i potenziali di ogni segmento
infinitesimo

Risultato dei calcoli: Vettore di Poynting (media temporale)

$$\langle |S| \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi r^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

Antenne - II

Antenne come elementi di circuito



Resistenza di radiazione:

$$P = R_{rad} I^2 = \frac{V^2}{R_{rad}} \rightarrow R_{rad} = \frac{P}{I^2}$$

Dipolo Hertziano:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{\mu_0}{12\pi} \frac{\omega^4}{c} \frac{l^2 2 \langle I^2 \rangle}{\omega^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 \langle I^2 \rangle l^2}{6\pi c} \rightarrow R_{rad} = \frac{\mu_0 \omega^2 l^2}{6\pi c} = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

Antenna $\lambda/2$:

$$R_{rad} = 73.1 \Omega$$