

Onde, Radiazione e Relativita'

VI – Radiazione di multipolo

Campi elettromagnetici variabili

Campi associati a cariche mobili → variabili
Diverse zone spaziali interessate

- Vicino alle sorgenti: **zona vicina**
Prevalenza campi statici
- Intermedia: **zona di transizione**
Prevalenza campi di induzione
- Lontano dalle sorgenti: **zona d'onda**
Prevalenza campi di radiazione

Confronto fra *dimensione sorgente*, λ , *distanza*

Campi di radiazione

Termini nell'espressione di \mathbf{E}, \mathbf{B} che danno contributo al *flusso di energia* a $r \rightarrow \infty$

Perche' questo possa avvenire, occorre che l'andamento del termine di \mathbf{E}, \mathbf{B} sia $\propto 1/r$, e non piu' rapido. Infatti:

$$d\Phi(\text{energia}) = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} r^2 d\Omega$$

Se $\mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow 0$ come $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \dots$ allora $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \rightarrow 0$ come $\frac{1}{r^4}, \frac{1}{r^6}, \dots$

$$\rightarrow d\Phi(\text{energia}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Interesse a calcolare i potenziali, dai quali si ricavano i campi

Potenziali ritardati

Ricordiamo il risultato finale per le espressioni di ϕ, \mathbf{A} :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c} \quad \text{tempo ritardato}$$

Significato:

I potenziali in un dato punto, ad un dato istante risultano dai contributi 'coulombiani' (in senso lato..) di tutti gli elementi di carica e corrente, ognuno preso all' *istante ritardato* appropriato alla sua distanza

Un'osservazione centrale

L'espressione di \mathbf{E} in termini dei potenziali si puo' semplificare per il termine di radiazione. Infatti:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\varphi(t) = \varphi[t(\mathbf{r})] \rightarrow \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \nabla_r(t)$$

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \rightarrow t = t_0 + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \approx t_0 + \frac{|\mathbf{r}|}{c}, r \gg r' \text{ Zona di radiazione}$$

$$\rightarrow \nabla_r(t) \approx \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \rightarrow \nabla\varphi \approx \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

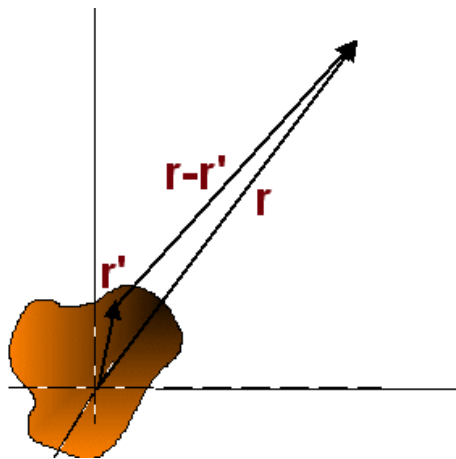
$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla\varphi \approx \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \text{Gauge di Lorentz}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_{rad} \approx -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

\mathbf{E}_{rad} dipende approssimativamente dal solo potenziale vettore, come \mathbf{B}

Sviluppo in serie - I

Consideriamo una regione spaziale nella quale si trovi una data distribuzione di carica. Si puo' scrivere:



$$\begin{aligned} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \cong \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \\ &= r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}} = r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) \\ \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Senso della cosa:

termini successivi nel fattore 'coulombiano' sono via via trascurabili nella misura in cui le differenze fra i vari elementi di corrente sono piccole rispetto al fattore preso rispetto all'origine, ossia $d \ll r$

Sviluppo in serie - II

Sviluppo in serie di Taylor al I ordine attorno a t_0 della densità di corrente (approssimata per grandi distanze):

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \cong \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{t_0} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} + \dots$$

Senso della cosa:

1. *Le differenze nel tempo ritardato fra i vari elementi di corrente sono piccole rispetto al tempo ritardato medio*
2. *La scala temporale della variazione di ogni elemento di corrente è piccola rispetto al rapporto d/c*

Potenziale vettore - I

Sostituendo nell'espressione del potenziale vettore, si ottiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial \mathbf{j}(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} + \dots \right) dv'$$

A risulta come somma di infiniti termini, che derivano dal prodotto dei due sviluppi in serie indicati:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right) \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \right)^2 + \dots \right) = \\ & = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \\ & + \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \\ & + \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Potenziale vettore - II

Se si e' interessati ai soli campi di radiazione, dominanti per $\left| \frac{\mathbf{r}'}{r} \right| \ll 1$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \ll \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \text{ se } \left| \frac{\mathbf{r}'}{r} \right| \ll 1$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} = \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \ll \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \text{ se } \left| \frac{\mathbf{r}'}{r} \right| \ll 1$$

etc

Quindi, per la zona d'onda:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0}$$

~~$$+ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}$$~~

$$+ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}$$

~~$$+ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}$$~~

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)^2$$

+ ...

Potenziale vettore - III

Sviluppo in serie nell'approssimazione di cui sopra:

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2 + \dots \right] d^3 \mathbf{r}'$$

Quanti termini tenere nello sviluppo?

Supponiamo che la dipendenza di \mathbf{j} da t sia sinusoidale:

$$\mathbf{j}(t) = \mathbf{a} \sin \omega t$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{a} \omega \cos \omega t, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} = -\mathbf{a} \omega^2 \sin \omega t, \dots$$

$$\rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \approx \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{1}{c} \mathbf{a} \omega \cos \omega t = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{1}{c} \mathbf{a} \frac{2\pi c}{\lambda} \cos \omega t$$

$$\rightarrow \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \right| \leq 2\pi |\mathbf{j}(t)| \left| \frac{\mathbf{r}'}{\lambda} \right| \ll |\mathbf{j}(t)| \quad \text{se} \quad \left| \frac{\mathbf{r}'}{\lambda} \right| \ll 1$$

Interpretazione fisica

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}'$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \Big|_{t=t_0}$$

termine di *dipolo elettrico*

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \int (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}' \equiv \mathbf{A}_2^{M1} + \mathbf{A}_2^{E2}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_2^{M1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \times \mathbf{r}$$

termine di *dipolo magnetico*

$$\rightarrow \mathbf{A}_2^{E2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{6} \frac{1}{c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0}$$

termine di *quadrupolo elettrico*

I multipoli

In generale, il peso relativo dei termini successivi dello sviluppo in serie e' via via decrescente, ed essi possono essere trascurati

Se per qualche ragione un termine e' nullo (di solito per motivi di simmetria), allora i termini successivi devono essere considerati

Le caratteristiche (distribuzione angolare, polarizzazione, etc) della radiazione dei diversi multipoli sono diverse

Dipolo elettrico

Interpretazione di \mathbf{A}_1 :
Manipolazioni vettoriali mostrano che

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}' = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{r}' \left[\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} \right] d^3\mathbf{r}'$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \underbrace{\int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}'}_{\mathbf{p}(t_0)}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \Big|_{t=t_0} d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Big|_{t=t_0}$$

Il termine successivo

Interpretazione di \mathbf{A}_2 :

Manipolazioni vettoriali (estreme!) mostrano che

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \int (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} d^3 \mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \int \left[\underbrace{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) \mathbf{r}'}_{\text{contr. a } \mathbf{A}_2^{E2}} + \underbrace{\left(\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) \times \hat{\mathbf{r}}}_{\text{contr. a } \mathbf{A}_2^{M1}} \right] d^3 \mathbf{r}' \end{aligned}$$

Dipolo magnetico

$$\int \left(\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) d^3 \mathbf{r}' = \frac{d}{dt} \int \underbrace{(\mathbf{r}' \times \mathbf{j})}_{\mathbf{m}(t)} d^3 \mathbf{r}' \Big|_{t=t_0} = \frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_2^{M1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} \times \hat{\mathbf{r}}$$

Si noti:

$\frac{d\mathbf{m}}{dt}$: legato a variazioni della corrente, se l'area resta costante

Quadrupolo elettrico - I

Qualche manipolazione sul termine 'fratello' di quello di dipolo magnetico:

$$\int \left[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) \mathbf{r}' \right] d^3 \mathbf{r}' = - \int (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \left(\nabla' \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

$$\rightarrow \int \left[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) \mathbf{r}' \right] d^3 \mathbf{r}' = \int (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \right) \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'$$

Quadrupolo elettrico - II

Nella zona di radiazione, fissare \mathbf{B} significa fissare \mathbf{E} : quindi modificare \mathbf{A} lasciando intatto \mathbf{B} e' lecito (questa e' di fatto una trasformazione di gauge..):

$$\mathbf{A}_2^{E2'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \int (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \right) \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_2^{E2} = \mathbf{A}_2^{E2'} - \underbrace{\frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \mathbf{r} \int r'^2 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \right) d^3 \mathbf{r}'}_{\mathbf{A}_{gauge}: \nabla \times \mathbf{A}_{gauge} = 0 \text{ OK}}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_2^{E2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \int \underbrace{(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' - r'^2 \hat{\mathbf{r}})}_{d^2 \mathbf{D} / dt^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{D}}{dt^2} \Big|_{t=t_0}$$

Quadrupolo elettrico - III

$$\mathbf{D} = \int \underbrace{(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' - r'^2 \hat{\mathbf{r}})}_{\mathbf{d}} \rho d^3 \mathbf{r}' \quad \text{quantita' vettoriale}$$

Componenti dell'integrando:

$$\left\{ \begin{aligned} d_x : & \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') x' - r'^2 \hat{x} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' = \left[3(xx' + yy' + zz') x' - r'^2 \hat{x} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' \\ & = \left[3(\hat{x}x'x' + \hat{y}y'x' + \hat{z}z'x') - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \hat{x} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' \\ d_y : & \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') y' - r'^2 \hat{y} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' = \left[3(xx' + yy' + zz') y' - r'^2 \hat{y} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' \\ & = \left[3(\hat{x}x'y' + \hat{y}y'y' + \hat{z}z'y') - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \hat{y} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' \\ d_z : & \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') z' - r'^2 \hat{z} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' = \left[3(xx' + yy' + zz') z' - r'^2 \hat{z} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' \\ & = \left[3(\hat{x}x'z' + \hat{y}y'z' + \hat{z}z'z') - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \hat{z} \right] \rho d^3 \mathbf{r}' \end{aligned} \right.$$

Quadrupolo elettrico - IV

Definendo, per una carica puntiforme nella posizione generica \mathbf{r}' :

$$q_{ij} = 3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}, x_i' = x', y', z', i = x, y, z$$

$$\rightarrow d_i = \sum_{j=x}^z q_{ij} \hat{x}_j$$

δ di Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, i, j = 1..3$$

\rightarrow Vettore \mathbf{d} : funzione lineare del vettore \mathbf{r}

$\rightarrow \mathbf{d} = \vec{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}$ definizione della quantita' $\vec{\mathbf{q}}$, estensione dell' idea di vettore

Quantita' tensoriale: 9 componenti cartesiane q_{ij}

Prodotti delle componenti di 2 vettori, o di 1 vettore con se stesso

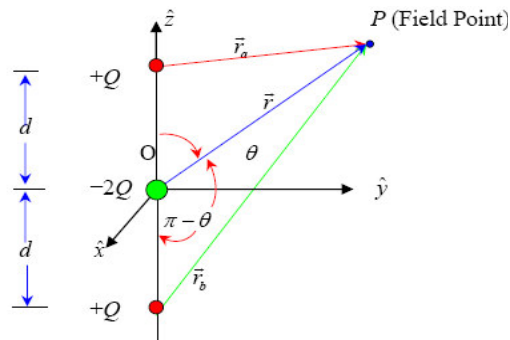
$q_{ij} = q_{ji}$ tensore simmetrico, 6 componenti indipendenti

$d_i = \sum_{j=x}^z q_{ij} x_j$: estensione della definizione di prodotto interno

Quadrupolo elettrico - V

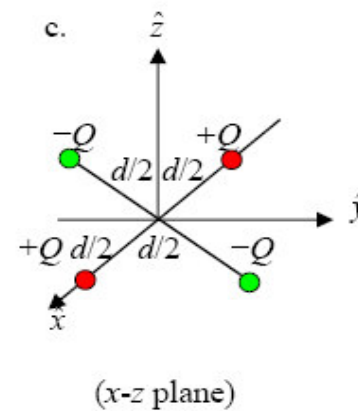
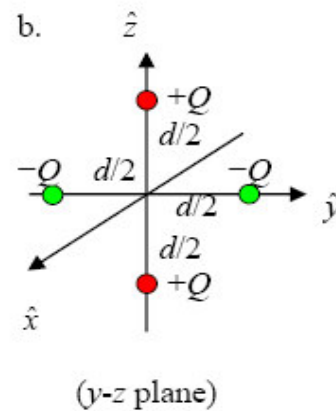
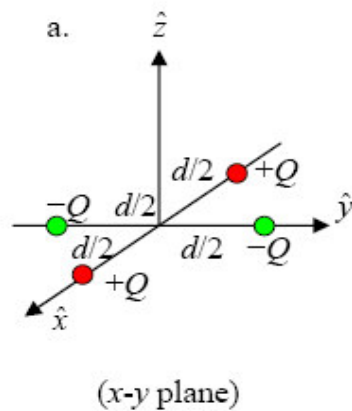
Quadrupoli costruiti con distribuzioni discrete di carica

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\text{cariche}}} q_k \left(3x_i^{(k)} x_j^{(k)} - r^{(k)2} \delta_{ij} \right) \text{ momento di quadrupolo}$$



Quadrupolo lineare

Quadrupoli piani



Quadrupolo elettrico - VI

Per distribuzioni continue:

$$Q_{ij} = \int (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \text{ momento di quadrupolo}$$

Assumendo la densita' volumetrica normalizzata a carica totale unitaria:

$$Q_{xx} = \int (3x'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int (2x'^2 - y'^2 - z'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \text{ etc}$$

$$\rightarrow Q_{xx} = 2\langle x'^2 \rangle - \langle y'^2 \rangle - \langle z'^2 \rangle$$

$$Q_{yy} = 2\langle y'^2 \rangle - \langle x'^2 \rangle - \langle z'^2 \rangle$$

$$Q_{zz} = 2\langle z'^2 \rangle - \langle x'^2 \rangle - \langle y'^2 \rangle$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 3\langle x' y' \rangle$$

$$Q_{yz} = Q_{zy} = 3\langle y' z' \rangle$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = 3\langle x' z' \rangle$$

Quadrupolo elettrico - VII

Se l'origine e' scelta nel baricentro della carica:

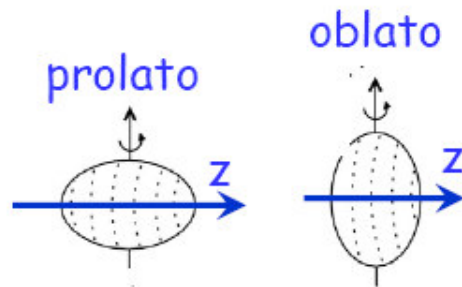
Le componenti misurano la deviazione della distribuzione di carica dalla simmetria sferica

Esempio:

$$Q_{zz} = \int [2z'^2 - (x'^2 + y'^2)] \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

$$Q_{zz} > 0$$

$$Q_{zz} < 0$$



Quadrupolo elettrico - VIII

Quindi: Prodotto tensoriale di \mathbf{r}' con se stesso δ di Kronecker come tensore

$$\mathbf{D} = \int \underbrace{(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}' - r'^2 \hat{\mathbf{r}})}_{\mathbf{d}} \rho d^3 \mathbf{r}' = \int \underbrace{(3(\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{r}} - r'^2 \vec{\delta} \cdot \hat{\mathbf{r}})}_{\mathbf{d}} \rho d^3 \mathbf{r}' = \int \vec{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rho d^3 \mathbf{r}' = \left(\underbrace{\int \vec{\mathbf{q}} \rho d^3 \mathbf{r}'}_{\vec{\mathbf{Q}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$\vec{\mathbf{Q}}$: Momento di quadrupolo del sistema di cariche

$$\rightarrow \mathbf{A}_2^{E2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \int \underbrace{(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}' - r'^2 \hat{\mathbf{r}})}_{d^2 \mathbf{D} / dt^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} d^3 \mathbf{r}'$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{D}}{dt^2} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \frac{d^2 \vec{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{dt^2} \Big|_{t=t_0}$$

I campi E e B : dipolo elettrico

Siamo interessati alla zona d'onda, nella quale i soli contributi che contano sono quelli $\propto 1/r$.

Tenendo solo questi termini, si vede che i campi E e B che sopravvivono all'infinito sono:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d^2 \mathbf{p}(t_0)}{dt^2} \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{d^2 \mathbf{p}(t_0)}{dt^2} \right] \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \left| \frac{d^2 \mathbf{p}(t_0)}{dt^2} \right| \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{p}(t_0)}{dt^2} \right] \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi c} \left| \frac{d^2 \mathbf{p}(t_0)}{dt^2} \right| \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

dove la II espressione si ottiene scegliendo l'asse z lungo l'accelerazione del dipolo

Vettore di Poynting e potenza

Si calcola direttamente:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{p}(t_0)}{\partial t^2} \right|^2 \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}$$

E nel solito modo si calcola la potenza irradiata:

$$P = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{p}(t_0)}{\partial t^2} \right|^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{p}(t_0)}{\partial t^2} \right|^2$$

*NB: i termini $\propto 1/r^2$, $1/r^3$, ... non contribuiscono a P
→OK trascurarli!*

nella quale come si vede compare l'accelerazione al quadrato

Intensita' primi multipoli

Radiazione di dipolo:

Elettrico: E1

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\epsilon_0}{c^3} \left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} \right\|_{t=t_0}^2 \sin^2 \theta$$

$$I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} \right\|_{t=t_0}^2$$

Magnetico: M1

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^2 \frac{\epsilon_0}{c^3} \left\| \frac{d^2\boldsymbol{\mu}}{dt^2} \right\|_{t=t_0}^2 \sin^2 \theta$$

$$I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{3c^3} \left\| \frac{d^2\boldsymbol{\mu}}{dt^2} \right\|_{t=t_0}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(\frac{1}{c^2} \right) \left\| \frac{d^2\boldsymbol{\mu}}{dt^2} \right\|_{t=t_0}^2$$

Radiazione di quadripolo:

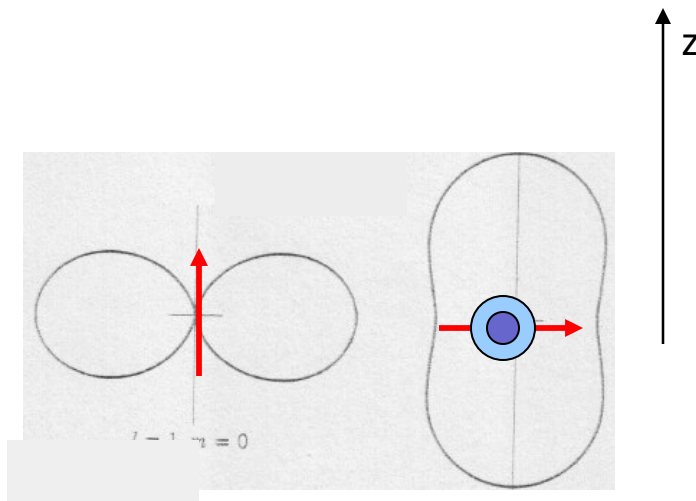
Elettrico: E2

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\epsilon_0}{c^3} \frac{1}{96\pi c^2} \left\| \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d^3\mathbf{D}}{dt^3} \right\|_{t=t_0}^2$$

$$I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(\frac{1}{120c^2} \right) \sum_{i,j=x}^z \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)^2$$

Pattern angolare dei primi multipoli

Esempi, non esaustivi:



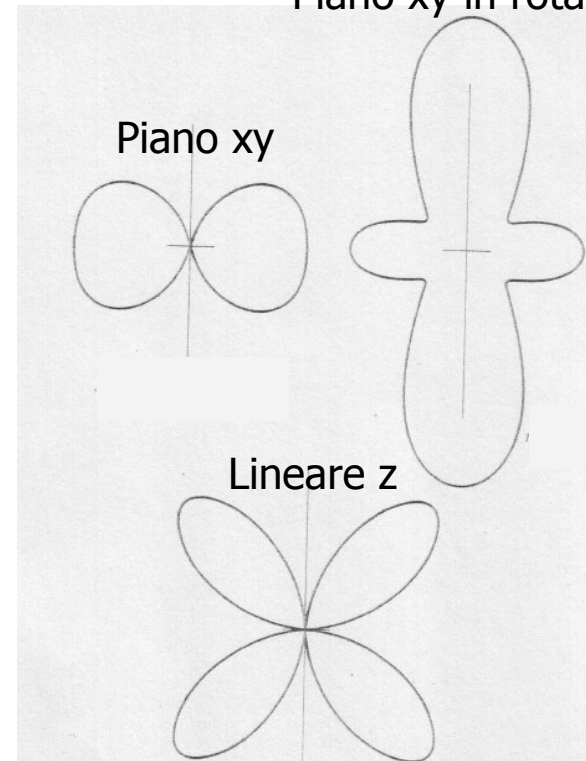
Singolo

2 dipoli ortogonali
e sfasati

Dipolo

(Grafici da Jackson, Classical Electrodynamics)

Piano xy in rotazione



Piano xy

Lineare z

Quadripoli

Multipoli elettrici/magnetici

E vs *M*:

Distribuzioni angolari: simili per multipoli dello stesso ordine

Intensita': $\left. \frac{I_M}{I_E} \right|_{\text{stesso ordine}} = A \frac{1}{c^2}$, *A* costante legata a rapporto grandezze

Polarizzazione: diversa (non approfondito)

Parita': opposta (non approfondito)

Ordine *m* vs ordine *m+1*:

$$\frac{I_{M(n+1)}}{I_{M(n)}} = \frac{I_{E(n+1)}}{I_{E(n)}} \sim \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2, \quad a \text{ dimensioni lineari, } \lambda \text{ lunghezza d'onda}$$