Onde, Radiazione e Relativita'

VII – Campi e radiazione da una carica puntiforme

Equazioni d'onda inomogenee

Per i potenziali sappiamo che, nel gauge di Lorentz, valgono le equazioni d'onda inomogenee (termine noto):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}$$

con le soluzioni "stile Poisson" viste a suo tempo.

Ci interessa cercare soluzioni a queste equazioni nel caso particolare in cui ρ e $\boldsymbol{j}$ siano quelle corrispondenti ad una carica puntiforme (un 'elettrone' classico…) in moto qualsiasi

Carica puntiforme - I

Se q e' statica, ossia se la sua posizione e' indipendente da t:

$$\rho(\mathbf{r}')\,dv' = q\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r_0})$$

$$\rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r_0})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

Estensione al continuo della δ di Kronecker: δ di Dirac

$$\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r_0}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_{\text{Volume che include } \mathbf{r}_0} \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r_0})\,dv' = 1$$

Non una funzione in senso rigoroso

Carica puntiforme - II

Se q e' in moto, allora avremo in generale:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

dove t_r e' il tempo ritardato $t_r = t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$.

La difficolta' nel calcolo di ϕ ed $\boldsymbol{A}$ sta nel fatto che t_r non e' un tempo fisso, ma, fissati $\boldsymbol{r}$ e t, dipende da $\boldsymbol{r}'$.
Si noti che <u>tutti</u> gli istanti precedenti a t concorrono a determinare il potenziale all'istante t, a seconda della distanza da $\boldsymbol{r}$ del volumetto dv'.

Carica puntiforme - III

Nel caso che ci interessa le densita' di carica e corrente si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}\rho(\mathbf{r},t) &= q\delta\left[\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)\right]\\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= q\mathbf{v}(t)\,\delta\left[\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)\right]\end{aligned}\right\}\mathbf{x}(t)\ \text{ traiettoria del punto}$$

il che porta alla seguente espressione per i potenziali:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t_r)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{q\mathbf{v}(t_r)\,\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}\left(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c\right)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

Carica puntiforme - IV

L'espressione trovata e' difficile da integrare, perche' $t_r = t - (|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/c$, in cui $\mathbf{r}'$ dipende da t: occorre cioe' conoscere la traiettoria della carica istante per istante. Per semplificare le cose, si ricorre ad un artificio, che sembra una apparente complicazione: si cambia l'integrando in

$$\frac{q\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t_r)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \to \frac{q\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(t'-t_r)$$

aggiungendo ovviamente un'integrazione su t'.

Questo equivale a integrare sull'intera traiettoria, restringendo l'integrale di volume allo sviluppo della traiettoria nell'intervallo temporale $(-\infty,+\infty)$, selezionando punto per punto l'istante t' appropriato

Carica puntiforme - V

Infatti:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')\right]\delta(t'-t_r)\,dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dt'\int\frac{q\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left[\mathbf{r}'-\mathbf{x}(t')\right]\delta(t'-t_r)dv'$$

$$\to\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|}\delta(t'-t_r)$$

$$\to\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\frac{\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|}\delta(t'-t_r)$$

Carica puntiforme - VI

Proprieta' della δ:

$$\delta\left[f(x)\right]=\sum_{i=1}^{n_{zeri}}\frac{\delta(x-x_i)}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i}},\{x_i\}=\text{insieme degli zeri di } f$$

Nel ns caso, chiamato *t** lo zero dell'argomento:

$$f(t')=t'-\left(t-\left|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}(t')}{c}\right|\right)$$

$$\delta\left[t'-\left(t-\left|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}(t')}{c}\right|\right)\right]=\frac{\delta[t'-t^*]}{\left.\frac{\partial f}{\partial t'}\right|_{t'=t^*}}$$

Carica puntiforme - VII

Il denominatore si calcola con la regola della derivata di una funzione composta per il tramite di piu' variabili (in questo caso, *t* e' una funzione di *t'* tramite ***x****(t')* ...):

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt'}$$

$$\frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial t'}} = \frac{1}{1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \cdot \dfrac{d\mathbf{x}}{dt'}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')}{c\left|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')\right|} \cdot \mathbf{v}\left(t'\right)\Big|_{t'=t_r}}$$

Carica puntiforme - VIII

Introducendo i vettori

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')\right|}$$

Versore della direzione punto-campo→punto-carica a t ritardato

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \equiv \boldsymbol{\beta} c$$

Velocita' della carica al tempo ritardato

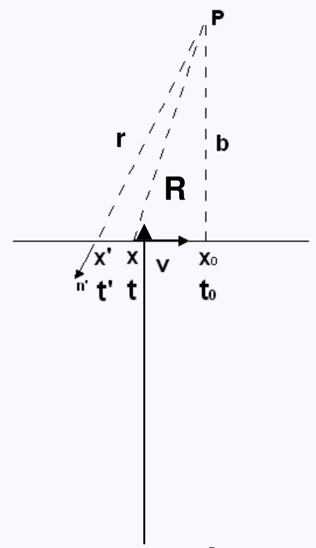
si trova l'espressione finale dei potenziali di Lienard-Wiechert :

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)\left|\mathbf{r} - \mathbf{x}\right|}\Bigg|_{t'=t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{\left(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)\left|\mathbf{r} - \mathbf{x}\right|}\Bigg|_{t'=t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')\right|/c}$$

Moto uniforme - I

Si trova in questo caso per i potenziali:



Questo e' Θ

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{\left(c^2t-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}\right)^2-\left(c^2-\mathrm{v}^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}$$

$$\varphi(\mathbf{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\sin^2\Theta}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}}{\sqrt{\left(c^2t-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}\right)^2-\left(c^2-\mathrm{v}^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\mathbf{v}}{R\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\sin^2\Theta}}$$

$\mathbf{r}$ = posizione al tempo ritardato - pos. punto di osservazione

$\mathbf{R}$ = posizione al tempo attuale - pos. punto di osservazione

Moto uniforme -II

Dai potenziali si ricavano i campi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta\right)\right]^{3/2}};\quad \begin{cases} \Theta = 0,\pi \rightarrow E = E_{Coul}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) < E_{Coul} \\ \Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow E = \frac{E_{Coul}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > E_{Coul} \end{cases}$$

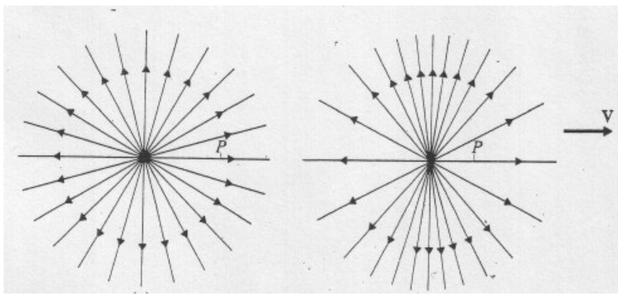
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E};\quad \begin{cases} \Theta = 0,\pi \rightarrow B = B_{B-S}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) < B_{B-S} \\ \Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow B = \frac{B_{B-S}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > B_{B-S} \end{cases}$$

E radiale, ***B*** alla Biot-Savart

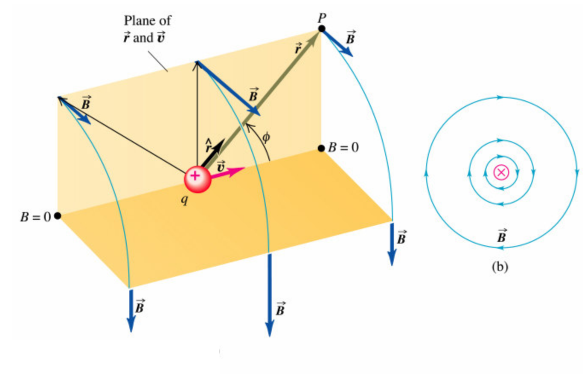
Le linee di ***E*** sono radiali ma *non* isotrope: piu' fitte a $\pi/2$, piu' rade a $0,\pi$
Le linee di ***B*** sono cerchi $\perp$ e concentrici a ***v***, con densita' come sopra

Moto uniforme - III

Campo ***E***



Campo ***B***



Modo di intendere la cosa: ad un dato istante, si ‘fotografa’ la particella in movimento insieme alle sue linee di campo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta\right)\right]^{3/2}} \underset{v\to 0}{\to} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{Coulomb}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E} \underset{v\to 0}{\to} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{Biot-Savart}$$

Moto accelerato - Campi

Le espressioni per i potenziali di Lienard-Wiechert trovate prima sono generali; tuttavia per ricavare i campi le cose sono piu' complicate quando la carica e' accelerata.
Il risultato, al termine di calcoli lunghi, e' il seguente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(r-\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^3}\left\{\underbrace{\left(\mathbf{r}-r\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}_{\text{parte convettiva, o di velocita'}}+\underbrace{\frac{1}{c^2}\mathbf{r}\times\left[\left(\mathbf{r}-r\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]}_{\text{parte radiativa, o di accelerazione}}\right\}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{E}$$

Parte convettiva: come quella di una carica in moto uniforme
Parte radiativa: nuova

Il campo di radiazione

Nelle espressioni trovate prima, come atteso:

un termine $\propto 1/r^2 \rightarrow$ *non conta* nella zona d'onda *campo di velocita'*
un termine $\propto 1/r \rightarrow$ *conta* nella zona d'onda *campo di accelerazione*

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]}{c^2 \left(1 - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^3} \propto \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr} \mathbf{r} \times \mathbf{E}_{rad} \propto \frac{1}{r}$$

Vettore di Poynting

Nel limite non relativistico *v/c→0*, le formule precedenti si scrivono:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{rad}$$

Il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{E}_{rad}\times\mathbf{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left|\mathbf{E}_{rad}\right|^2\hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Potenza irraggiata - I

La potenza irraggiata per unita' di angolo solido si trova nel solito modo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{S}|\, r^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2\, r^2 = \frac{\mu_0 q^2}{64\pi^3 \varepsilon_0^2} \left| \hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right|^2$$

Questo si puo' scrivere, essendo Θ l'angolo fra accelerazione e direzione di propagazione:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{64\pi^3 \varepsilon_0^2} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \Theta$$

Potenza irraggiata - II

La formula precedente mostra una totale rassomiglianza con quella per la radiazione di un dipolo (v. seguito):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \sin^2\theta \rightarrow \text{mom. di dipolo equivalente } p_0 = aq/\omega^2$$

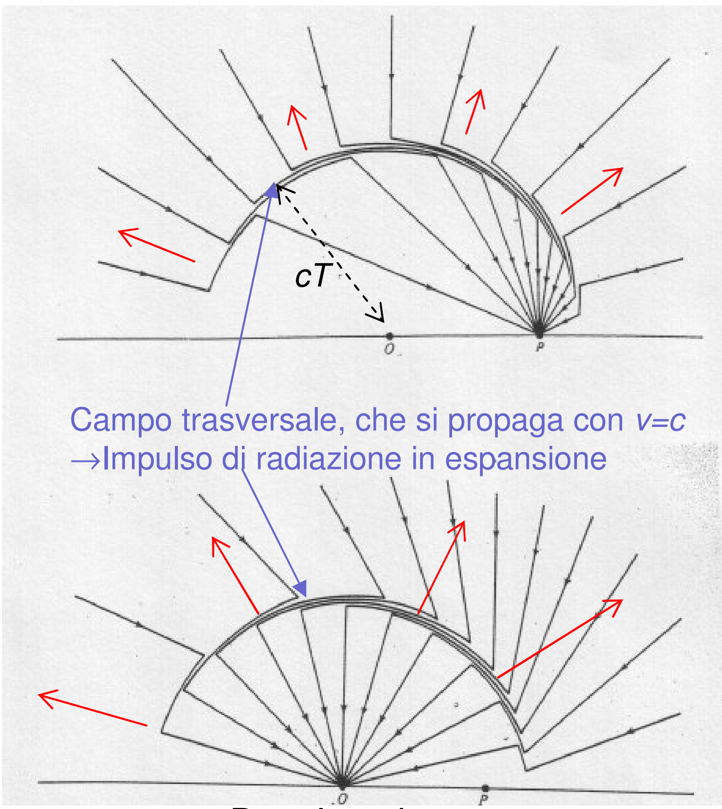
La potenza irraggiata totale si ottiene integrando su tutto l'angolo solido, e viene:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} |\mathbf{a}|^2$$

Questa e' la *formula di Larmor* per la potenza emessa (quando la velocita' e' bassa in confronto a *c)*

L'origine del campo di radiazione

Accelerazione



Decelerazione

<u>Accelerazione</u>: si considera una carica che e' inizialmente ferma$\rightarrow$ il campo e' Coulombiano.
*Poi si 'fotografa' il campo dopo che la carica ha e' stata soggetta a un'accelerazione **a**, di durata T $\rightarrow$ il campo e' quello di una carica in moto con velocita'* $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}T$
<u>Decelerazione</u>: sequenza opposta
In entrambi i casi:
La velocita' finita di propagazione dei campi e.m. mostra che ci deve essere necessariamente una zona di transizione, con campo+i trasversali che si spostano a velocita' c verso l'esterno

(Grafici da Purcell, Electricity & Magnetism)