SISTEMA DI RIFERIMENTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO E PARADOSSO DEI GEMELLI

Il paradosso dei gemelli - I

Il paradosso dei gemelli è basato sull'uso improprio delle equazioni della relatività ristretta.

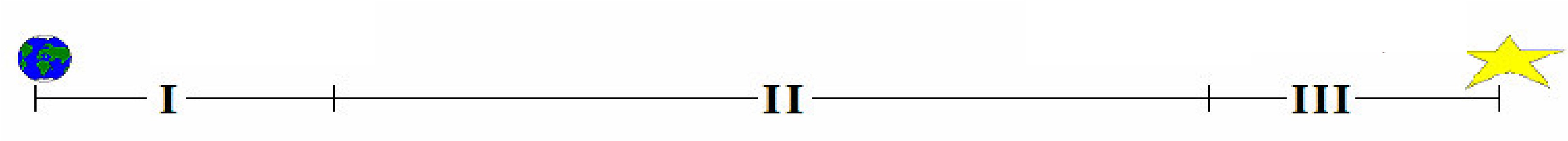
Questo prende in considerazione due gemelli uno sulla Terra ed uno in viaggio a grande velocità verso una stella;

dopo un tot di anni il gemello viaggiatore ritorna e a causa della dilatazione dei tempi dovrebbe essere più giovane di quello rimasto sulla Terra.

Introducendo alcune nozioni di relatività generale si smentisce questa tesi.

Conclusione errata… EM

Il paradosso dei gemelli - II



Il viaggio di andata è diviso in 3 parti:

I) La navicella parte con accelerazione costante pari a 4,76 m/sec^2 per 2 anni

II) La navicella per 4 anni viaggia a velocità costante (v=0,71c m/sec^2)

III) La navicella decelera in modo analogo ad I

Dopo aver trascorso 2 anni sulla stella la navicella ritorna sulla Terra seguendo la stessa procedura dell'andata.

Il passaggio del tempo è scandito da un impulso luminoso emesso annualmente dalla Terra.

Parte 1 dell'andata - I

(nel sistema di riferimento della Terra)

Utilizzando la legge di trasformazione delle velocità ottengo:

$$\beta_s = \frac{\beta_s' + \beta}{1 + \beta\beta_s'}$$

Derivo $d\beta_s = \dfrac{1-\beta^2}{(1+\beta_s'\beta)^2} d\beta_s'$ e considerando β_s piccolo $d\beta_s = (1-\beta^2)(g/c)dt'$

Così ho introdotto l'accelerazione della navicella rispetto all'ICIF*

*ICIF= Instantaneously Co-moving Inertial Frame → cioè un sistema di riferimento che ha posizione, velocità e tempo diversi di poco rispetto a quello dalla navicella

Parte 1 dell’andata - II

(nel sistema di riferimento della Terra)

Sostituendo nell’equazione precedente la dilatazione dei tempi nella forma

$\Delta t = \gamma \Delta t'$ trovo $d\beta_s = (1-\beta^2)^{3/2}(g/c)dt$

che integrata mi da $\beta_s = 1/[1+(c/gt)^2]^{1/2}$

Definendo $\beta_s = dx_s / c \cdot dt_s$

ottengo la posizione della navicella $x_s = (\gamma_s - 1)c^2 / g$

il tempo invece segue la relazione $\tau_s = (c/g)\sinh^{-1}(gt/c)$

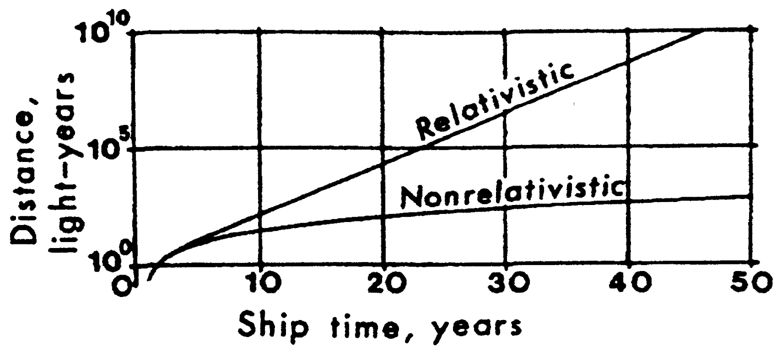
(τ_s è il tempo proprio della navicella)

Parte 1 dell'andata - III

(nel sistema di riferimento della Terra)

Confronto dei dati relativistici ottenuti con le formule ricavate in precedenza con i risultati che si otterrebbero se si utilizzasse l'equazione non relativistica

$$x_s = \frac{1}{2} g \tau_s^2$$



Dal grafico si vedono gli effetti relativistici della dilatazione dei tempi se si considera il sistema di riferimento della Terra o della contrazione delle lunghezze in quello della navicella.

Parte 2 dell'andata

(nel sistema di riferimento della Terra)

Nella parte centrale del viaggio di andata la navicella ha raggiunto la sua velocità massima.

La sua posizione è definita come $x_s = D + c\beta(\max)\ t$

Il tempo invece è $\tau_s = t/\gamma(\max)$

Dove D è la lunghezza del tratto percorso in accelerazione

Parte 3 dell'andata

(nel sistema di riferimento della Terra)

In questo tratto di viaggio la navicella sta decelerando (g<0).

La sua posizione è definita come $x_s = L + D + (\gamma_s - 1)c^2 / g$

Il tempo invece è $\tau_s = (c / g) \sinh^{-1}(gt / c)$

Dove D è il tratto percorso in accelerazione e L quello a velocità costante

Parte 1 dell'andata - I

(nel sistema di riferimento della navicella)

Dalle equazioni del tempo e dello spazio precedentemente ricavate sfruttando la reciprocità delle trasformazione di Lorentz → $\beta_e^{'} = -\beta_s$ trovo $\beta_e^{'} = -\tanh(gt_s / c)$ in questo modo ho ottenuto la velocità della Terra nel nuovo sistema di riferimento

Dopo una serie di passaggi matematici trovo

$$\beta_e = \beta_e^{'}\left(1 + \frac{gx_e}{c^2}\right)$$

$$\frac{d\tau_e}{dt_s} = \frac{1}{\gamma_e^{'}}\left(1 + \frac{gx_e}{c^2}\right)$$

Eventi orizzonte - I

L’equazione precedente implica l’esistenza degli eventi orizzonte

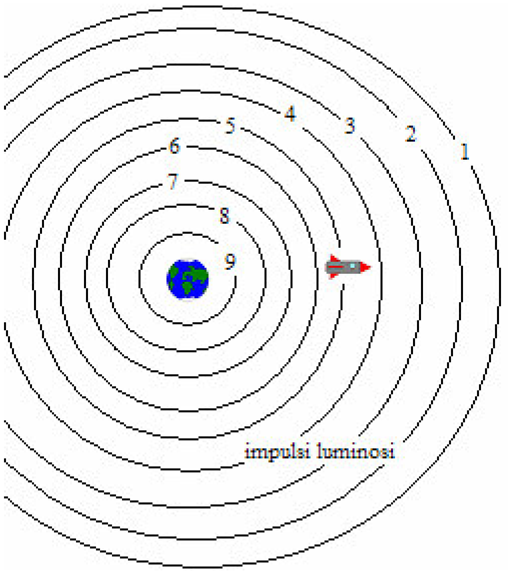
$$x_e = -c^2 / g$$

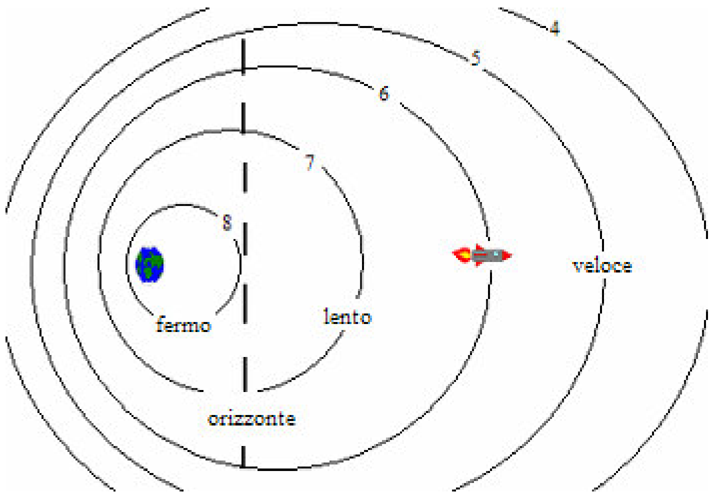
in questa zona il tempo e il “movimento” sono fermi.

Al di là dell’orizzonte la luce e gli orologi vanno all’indietro, ed inoltre segnali non possono oltrepassarlo, rendendo la regione dietro ad esso inaccessibile ad un osservatore.

Rimuovere questo fenomeno è possibile in ogni momento basta interrompere l’accelerazione.

Eventi orizzonte - II





Il primo disegno raffigura come la navicella all'inizio dell'accelerazione vede l'arrivo dei vari impulsi luminosi

Nel secondo invece è già a metà del periodo di accelerazione; sull'immagine sono segnate le velocità relative degli impulsi luminosi.

A causa dell'orizzonte non riceverà l'ottavo.

Parte 1 dell'andata - II

(nel sistema di riferimento della navicella)

Utilizzando la relazione $\beta_e c = dx_e / dt_s$ che lega β_e alla posizione posso ricavarmi:

La posizione della Terra è $x_e = -(1 - 1/\gamma_e^{'})\, c^2/g$

Invece il tempo è $\tau_e = -\beta_e^{'}\, c/g$

Parte 2 dell'andata

(nel sistema di riferimento della navicella)

Nella parte centrale del viaggio di andata la navicella ha raggiunto la sua velocità massima.

La sua posizione è definita come $x_e = -D - c\beta(\max)t_s$

Il tempo invece è $\tau_e = t/\gamma(\max)$

Dove D è la lunghezza del tratto percorso in accelerazione

Parte 3 dell'andata

(nel sistema di riferimento della navicella)

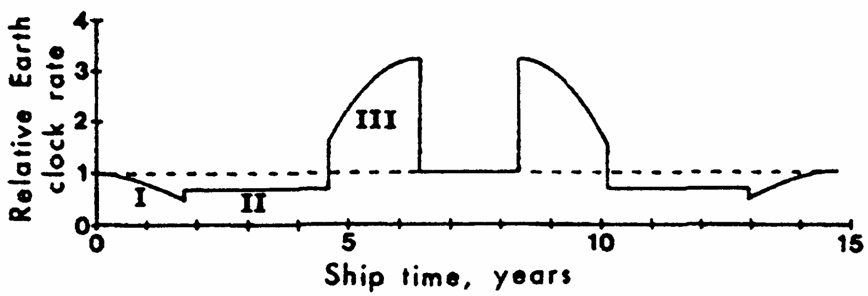
In questo tratto di viaggio la navicella sta decelerando (g<0).

La sua posizione è definita come $x_e = -(L+D)/\gamma_e' - (1-1/\gamma_e')\,c^2/g$

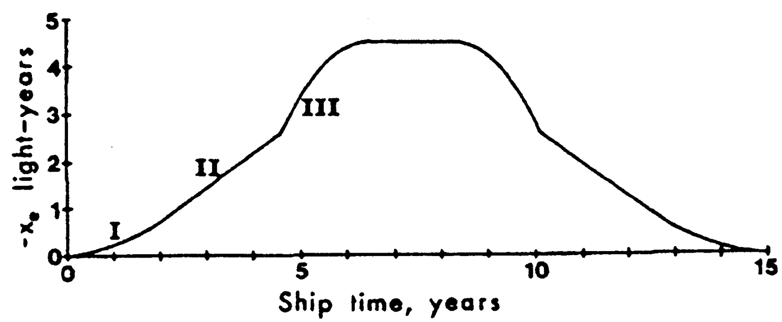
Il tempo invece è $\tau_e = (L + D - c^2/g)\,\beta_e' / c$

Dove D è il tratto percorso in accelerazione e L quello a velocità costante

Grafici



Andamento dell'orologio della Terra rispetto a quello della navicella.



Distanza Terra-navicella nel sistema di riferimento della navicella su tempo della navicella

Conclusioni

Adesso che si conoscono tutte le relazioni necessarie a descrivere in modo completo il viaggio fatto dal gemello ci si accorge che la contraddizione esposta nel paradosso è fittizia infatti il "tempo vissuto" dai due fratelli è uguale. La tabella lo mostra in chiaramente

	Sistema di riferimento della Terra			**Sistema di riferimento della navicella**			
parte	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	totale
Distanza (anni-luce)	0,83	2,83	0,83	0,59	2,00	1,90	4,49
Tempo della Terra (anni)	2,00	4,00	2,00	1,41	2,00	4,59	8,00
Tempo della navicella (anni)	1,76	2,83	1,76	1,76	2,83	1,76	6,35