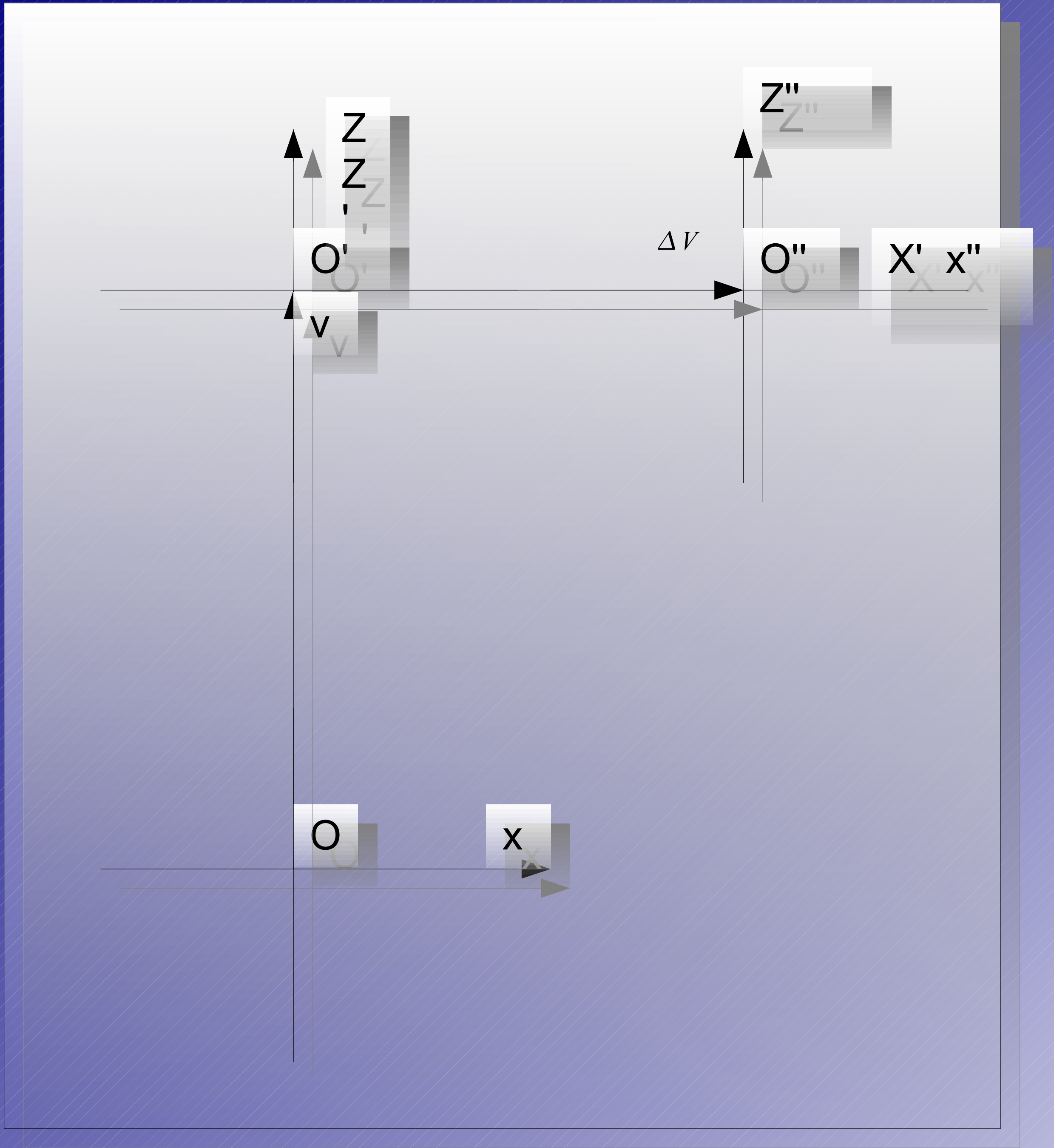


TRE SISTEMI DI RIFERIMENTO O O' O'' IN MOTO RELATIVO TRA LORO

- O (SISTEMA RIFERIMENTO DEL LABORATORIO)

- O' SI MUOVE CON VELOCITA' UNIFORME v (DIREZIONE IDENTIFICATA CON L'ASSE Z E Z') RISPETTO AL RIFERIMENTO INERZIALE DEL LABORATORIO O

- O'' SI MUOVE RISPETTO A O' CON VELOCITA' **Δ v** NEL RIFERIMENTO INERZIALE O LA DIREZIONE DI **Δ v NEL SISTEMA O VIENE PRESA COME ASSE X**

APPLICANDO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ POSSO ESPREMERE LE COORDINATE DI UN PUNTO DEL SISTEMA O IN FUNZIONE DELLE COORDINATE DI O' RISPETTO A CUI O SI MUOVE CON VELOCITA -v NELLA DIRAZIONE DI z' :

$$x = x',$$

$$z = \gamma(z' + vt'),$$

$$t = \gamma(t' + vz'/c^2),$$

PER ESPRIMERE LE COORDINATE DI UN PUNTO NEL SISTEMA O'' IN FUNZIONE DELLE COORDINATE DI O , RISPETTO A CUI O'' SI MUOVE CON VELOCITA' v LUNGO z E CON VELOCITà Δv LUNGO x DEVO APPLICARE AL VETTORE SPAZIO TEMPO (x,y,t) LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE A CONSIDERANDO CHE IL SISTEMA O'' SI MUOVE CON VELOCITA' DI MODULO v IN UNA DIREZIONE LIEVEMENTE DIFFERENTE RISPETTO A z

$$A := \begin{pmatrix} \gamma \cdot \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta & \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & -v \cdot \gamma \cdot \cos\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & \gamma \cdot \mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta & -v \cdot \gamma \cdot \mathrm{sen}\,\theta \\ \dfrac{-v \cdot \gamma \cdot \cos\theta}{c^2} & \dfrac{-v \cdot \gamma \cdot \mathrm{sen}\,\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

$$A * \begin{matrix} x \\ z \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} x'' \\ z'' \\ y'' \end{matrix}$$

$$x'' = x - (\Delta v/v)z + \gamma(\Delta v/v)(z - vt),$$

$$z'' = \gamma(z - vt) + (\gamma - 1)(\Delta v/v)x,$$

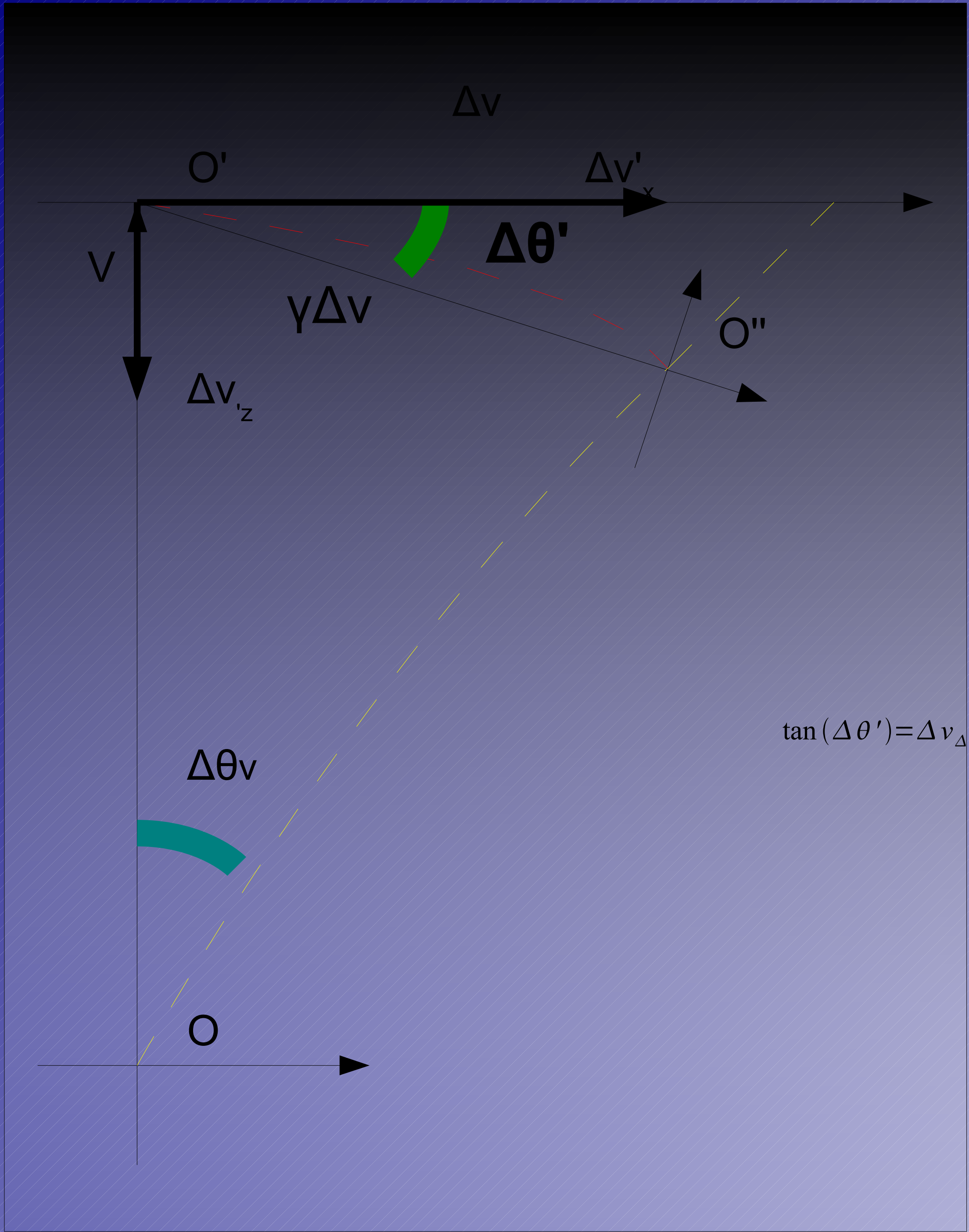
$$t'' = \gamma\left(t - \frac{vz + \Delta v x}{c^2}\right),$$

POSSIAMO ORA ESPRIMERE LE COORDINATE DI UN PUNTO IN O'' IN TERMINI DELLE COORDINATE DI O' SOSTITUENDO LA PRIMA ESPRESSIONE NELLA SECONDA PER OTTENERE :

$$x'' = x' - (\gamma - 1)(\Delta v/v)z' - \gamma \Delta v t',$$

$$z'' = z' + (\gamma - 1)(\Delta v/v)x',$$

$$t'' = t' - \gamma(\Delta v x'/c^2).$$



PER INDIVIDUARE LA DIREZIONE IN CUI SI MUOVE O'' NELLE COORDINATE O' OTTENIAMO LE COORDINATE DELL'ORIGINE DI O'' (x''=0,y''=0) IN FUNZIONE DELLE COORDINATE DI O' APPROSSIMANDO PER x' Δv/v ≈ 0

$$x' = \gamma \Delta v t',$$

$$z' = -(\gamma - 1)\Delta v x'/v = -\gamma(\gamma - 1)(\Delta v)^2 t'/v,$$

PER PICCOLI ANGOLI POSSIAMO APPROSSIMARE $\Delta v_{'z}$ CON L'ARCO DI CIRCONFERENZA PASSANTE PER O'' ED OTTENERE LA DIRAZIONE DEL MOTO DI QUEST'ULTIMO COME RAPPORTO TRA LE COMPONENTI DELLE VELOCITà :

$$\Delta\theta' \approx (dz'/dt')/(dx'/dt') \approx (\gamma - 1)\Delta v/v$$

MA $\Delta v/v$,ESSENDO Δv PERPENDICOLARE A v NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO CEL LABORATORIO , E' L'ANGOLO CON CUI O VEDE ALLONTANARSI O'' RISPETTO AD O ' :

$$\Delta\theta' = (\gamma - 1)\theta_v$$

QUESTA ROTAZIONE VIENE CHIAMATA PRECESSIONE DI THOMAS ,IN PARTICOLARE IN QUESTO CASO ESSA AVVIENE NELLA MEDESIMA DIREZIONE DI θ_v (LA ROTAZIONE DELL'ASSE z'' AVVIENE NELLA STESSA DIREZIONE DI θ_v)

CONSIDERIAMO ORA IL CASO IN CUI UN SISTEMA O''' SI MUOVA NEL RIFERIMENTO DI O' PERPENDICOLARMENTE AD z' CON VELOCITA' Δv'

QUALE SARA' LA DIREZIONE DEL MOTO DI O''' VISTA DA UN OSSERVATORE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL LABORATORIO O ?

ATTARAVERSO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ POSSO OTTENERE LE COORDINATE DI UN PUNTO IN O''' NEL RIFERIMENTO O' :

$$x''' = \gamma_\Delta (x' - \Delta v' t'),$$

$$z''' = z',$$

$$t''' = \gamma_\Delta [t' - (\Delta v' t' / c^2)],$$

DOVE

$$\gamma_\Delta = [1 - (\Delta v'/c)^2]^{-1/2}.$$

LE COORDINATE DI UN PUNTO IN O' POSSONO ESSERE ESPRESSE IN FUNZIONE DEL RIFERIMENTO O ATTRAVESO LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI :

$$x' = x$$

$$z' = \gamma (z - vt)$$

$$t' = \gamma (t - vz/c^2),$$

CHE SOSTITUITE NELLA PRECEDENTE ESPRESSIONE CI PERMETTONO DI OTTENERE LE COORDINATE DI UN PUNTO IN O''' IN FUNZIONE DI x z t

$$x''' = \gamma_\Delta [x - \gamma \Delta v' t + (\gamma v \Delta v'/c^2) z]$$

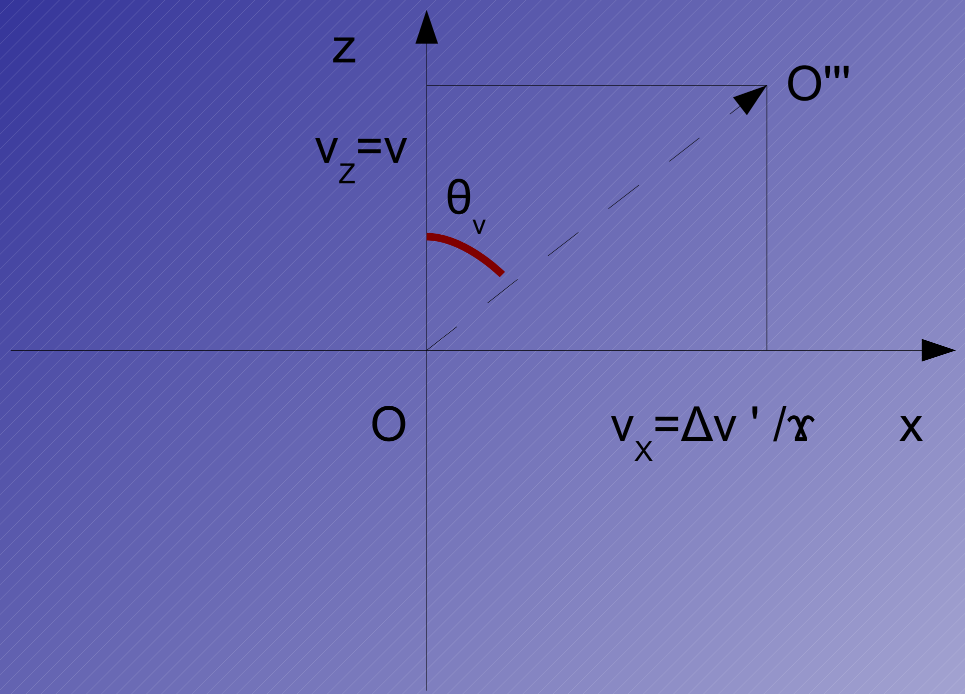
$$z''' = \gamma (z - vt)$$

$$t''' = \gamma_\Delta [\gamma t - (\gamma v/c^2) z - (\Delta v'/c^2) x].$$

SI POSSONO QUINDI RICAVARE LE COORDINATE DELL'ORIGINE DI O'''($x'''=0, z'''=0$) NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL LABORATORIO

$$x = \Delta v' t / \gamma \qquad\qquad z = vt$$

O''' SI STA MUOVENDO NEL RIFERIMENTO O CON UNA COMPONENTE z DELLA VELOCITà $v_z = v$ E UNA COMPONENTE LUNGO x $v_x = \Delta v' / \Upsilon$



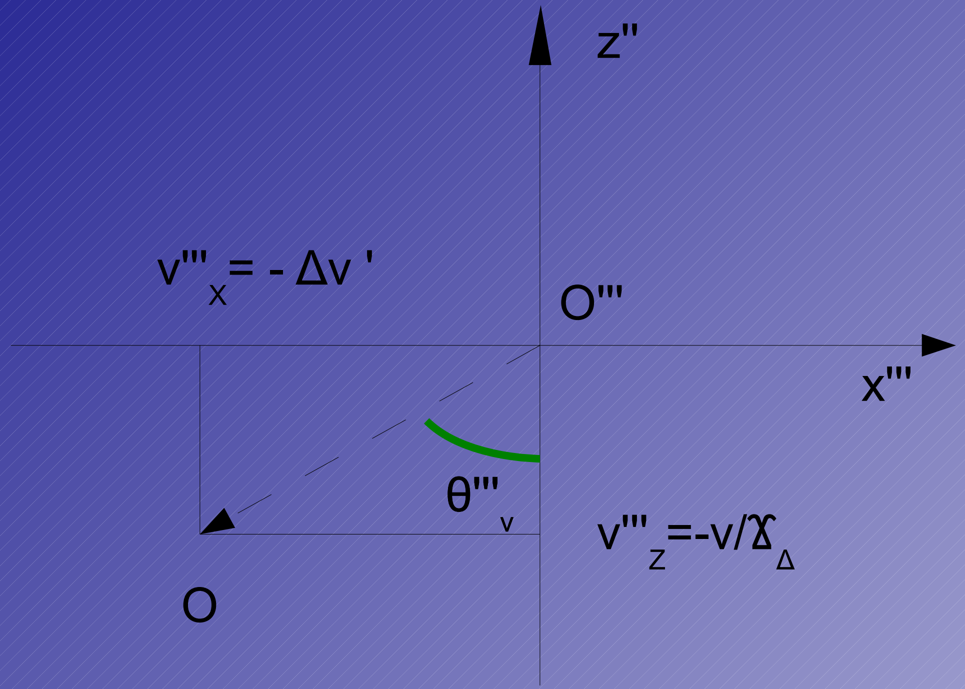
$$\tan(\theta_v) = v_x / v_z = 1/\Upsilon \quad \Delta v' / v$$

LE COORDINATE DI O (0,0) POSSONO ESSERE ESPRESSE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO O''' CONSIDERANDO LE PRECEDENTI TRASFORMAZIONI

$$t''' = \gamma_\Delta \gamma t,$$

$$x''' = -\gamma_\Delta \gamma \Delta v' t = -\Delta v' t''',$$

$$z''' = -\gamma v t = -(1/\gamma_\Delta) v t'''.$$



O''' SI STA MUOVENDO NEL RIFERIMENTO O CON UNA COMPONENTE z''' DELLA VELOCITà $v'''_{z'}=-v/\gamma_\Delta$ E UNA COMPONENTE LUNGO x $v'''_x = -\Delta v'$

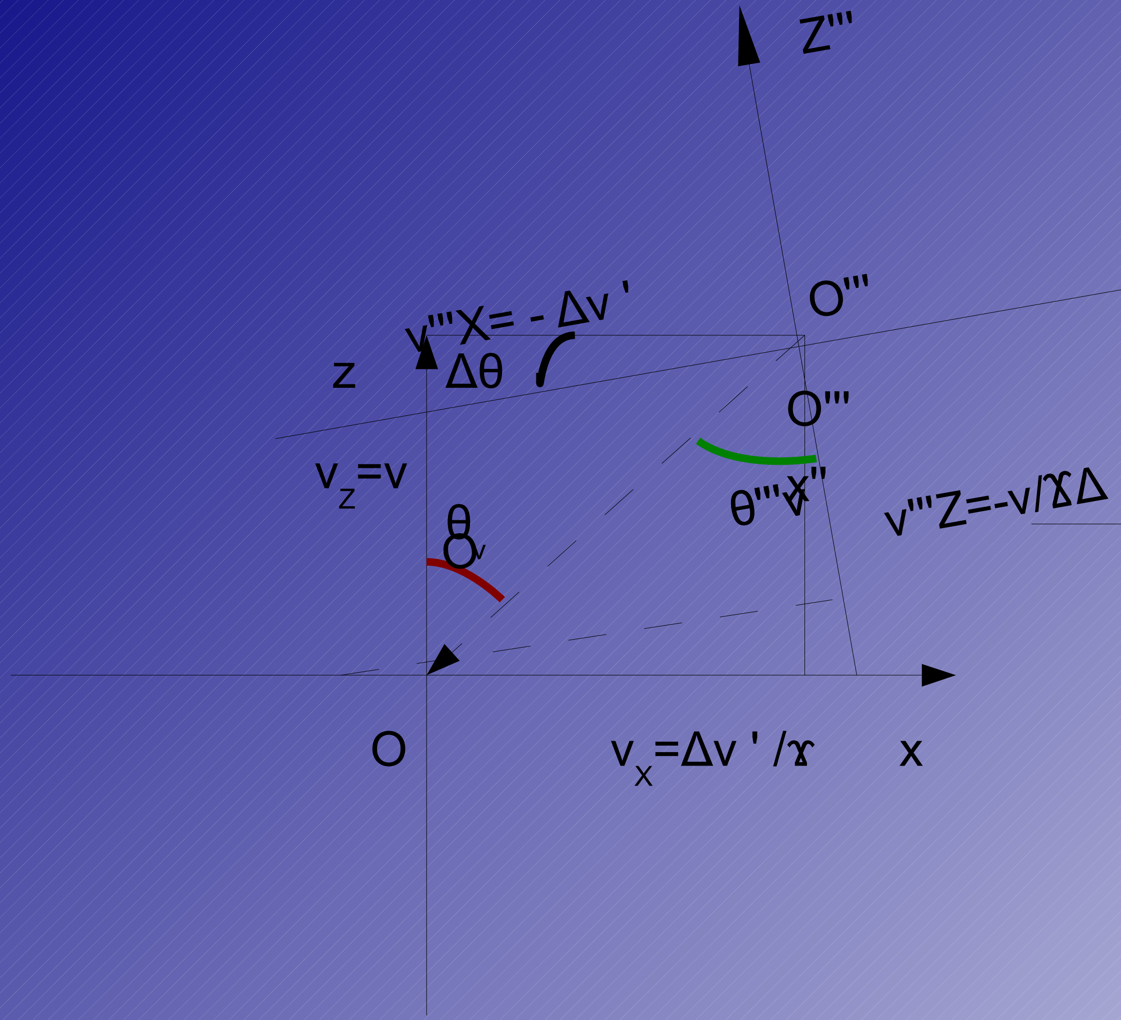
$$\tan\theta_v''' = \frac{v_x'''}{v_z'''} = \gamma_\Delta \frac{\Delta v'}{v}.$$

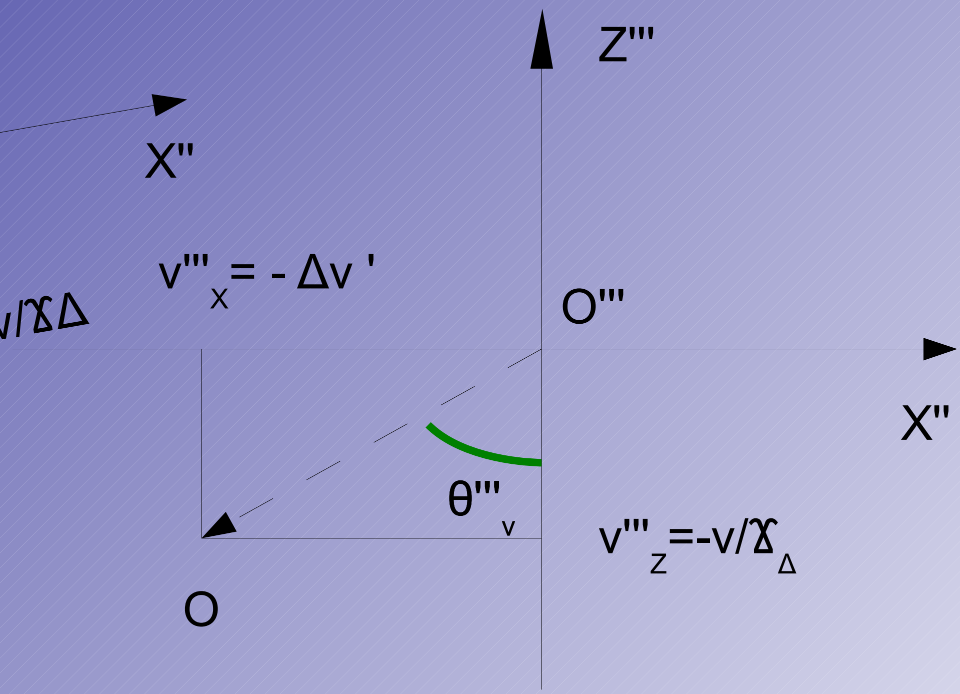
$$\theta'''_v > \theta_v$$

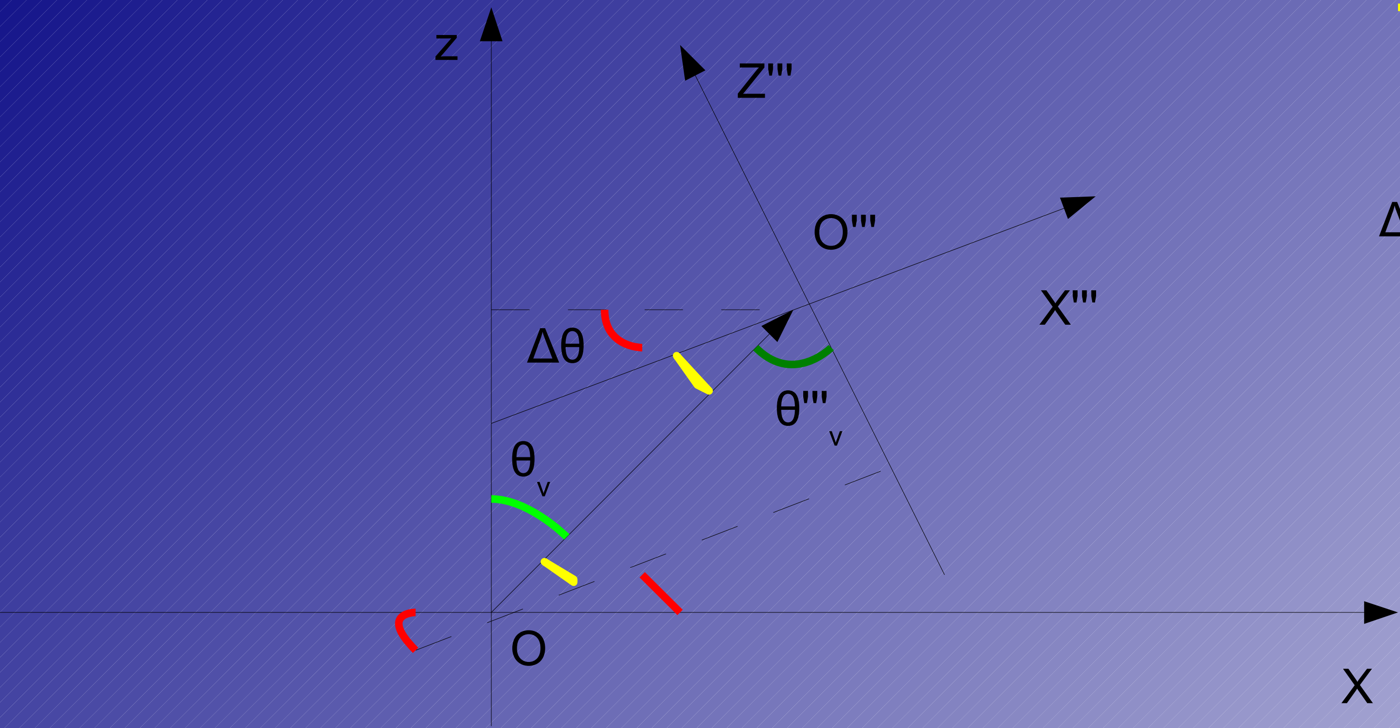
$$\gamma_\Delta > \gamma \Rightarrow \theta'''_v > \theta_v \Rightarrow$$

x E x''' NON SARANNO RETTE PARALLELE NA RUOTATE

PER PORTARE LE VELOCITà RELATIVE A COINCIDERE DOBBIAMO RUOTARE PER ESEMPIO IL SISTEMA O''' DI UN ANGOLO NELK SENSO OPPOSTO AL CAMBIAMENTO DI VELOCITA'







$\Pi/2 - \theta'''_v$

$\Delta\theta = \Pi/2 - \Pi/2 + \theta'''_v - \theta_v = \theta'''_v - \theta_v$

$$\tan\Delta\theta = \frac{\tan\theta_v''' - \tan\theta_v}{1 + \tan\theta_v''' \tan\theta_v}$$

$$= \frac{\gamma\gamma_\Delta}{\gamma + \gamma_\Delta} \cdot \frac{v\Delta v'}{c^2} \, .$$

COME VARIA Δθ PER UNA VARIZIONE INFINITESIMALE DI Δv' VISTA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE STA CAMBIANDO LA SUA VELOCITA' (O' E O''')

$\Delta v' = \gamma v \tan(\theta_v)$

$$\tan\Delta\theta = \frac{\gamma^2\gamma_\Delta}{\gamma+\gamma_\Delta}\frac{v^2}{c^2}\tan\theta_v = \frac{(\gamma^2-1)\gamma_\Delta}{\gamma+\gamma_\Delta}\tan\theta_v,$$

$\Delta v' \longrightarrow 0$

$\gamma_\Delta \longrightarrow 1$

$\tan(\Delta\theta) \longrightarrow \Delta\theta$

$$\Delta\theta = (\gamma-1)\theta_v.$$

PRECESSIONE DI THOMAS CHE AVVIENE PERò NEL SENSO OPPOSTO ALL'ANGOLO CHE INDIVIDUA LA VELOCITà IN O

VARIAZIONE VELOCITà Δv PERPENDICOLARE IN O

↓

ROTAZIONE NEL SENSO DI v

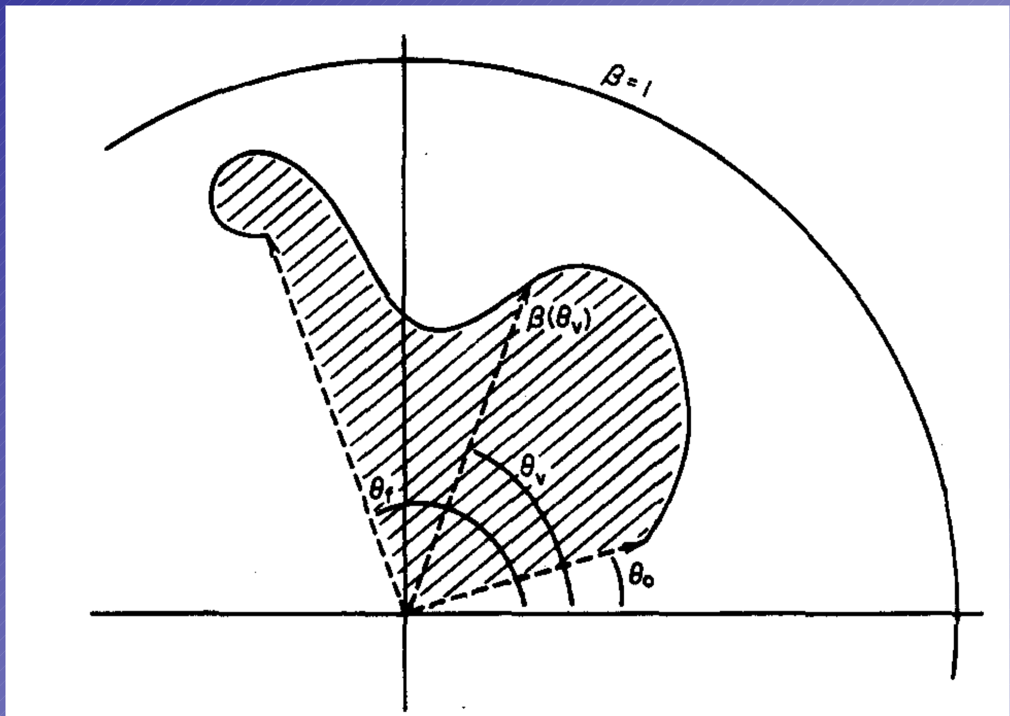
VARIAZIONE Δv' PERPENDICOLARE IN O' ,PARALLELA A x'''

↓

ROTAZIONE NEL SENSO OPPOSTO DI v

IN ENTRAMBI I CASI LA VARIZIONE TOTALE DELLA RELATIVA ROTAZIONE DEL LE COORDINATE DEI DUE SISTEMI SI Può OTTENERE INTEGRANDO LA FORMA DIFFERENZIALE DELL'ANGOLO DI PRECESIONE DI THOMAS ,NEL CASO NEL CASO IN CUI IL SISTEMA CHE VARIA LA VELOCITà SI MUOVA ATTRAVERSO PURE TRASLAZIONI RISPETTO A SE STESSO : OVVERO SE O''' AUMENTA LA SUA VELOCITà LUNGO x'''

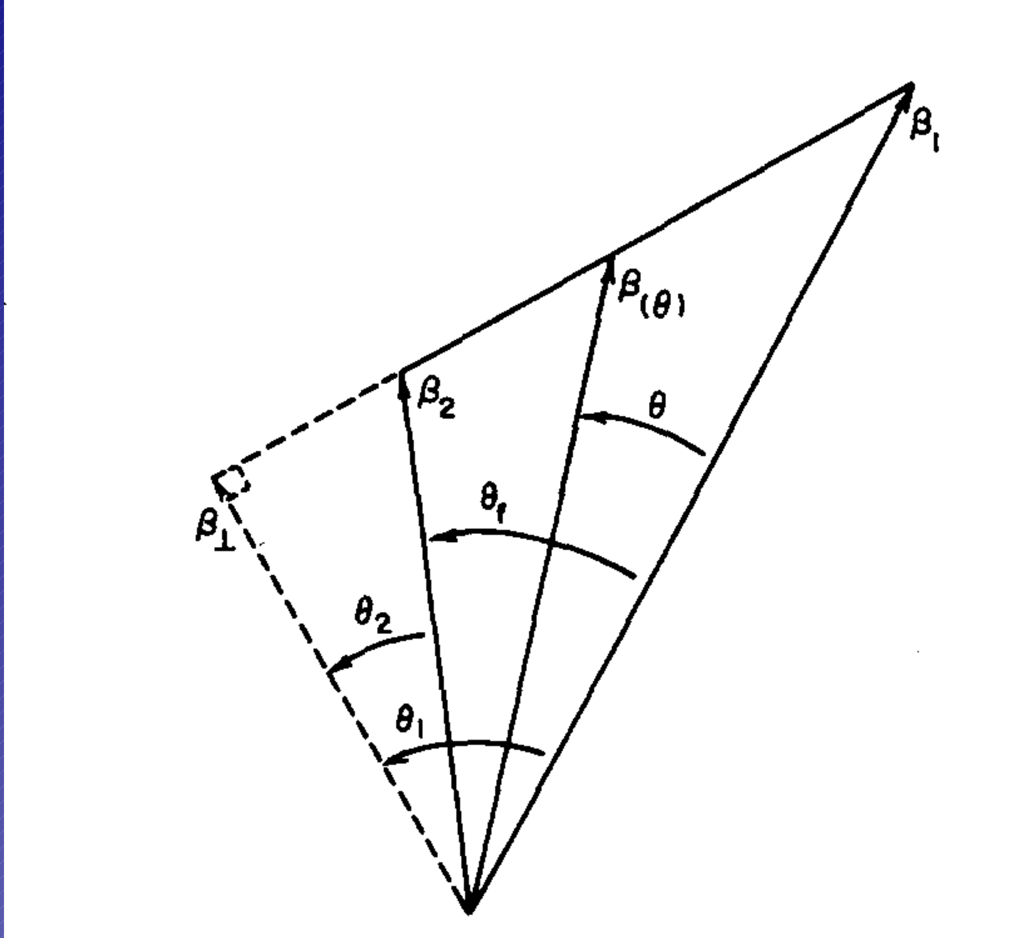
$$\Delta\theta_{tot} = \int_{\theta_0}^{\theta_f} [\gamma(\theta_v) - 1] d\theta_v,$$



θV $\theta 0$ RAPPRESENTANO LA DIREZIONE INIZIALE E FINALE DEL SISTEMA CHE STA VARIANDO VELOCITA' VISTA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL LABORATORIO E γ DIPENDE DALL'ANGOLO θ_v

(LA VARIAZIONE DI VELOCITà DI O''' LUNGO X''' MODIFICA LA VELOCITà CON CUI O''' VEDE O'' ALLONTANARSI DA O

CONSIDERIAMO ORA IL CASO DI UN SISTEMA O''' CHE SI MUOVE CON VARIAZIONE COSTANTE DELLA VELOCITA' VISTA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL LABORATORIO



UN SISTEMA

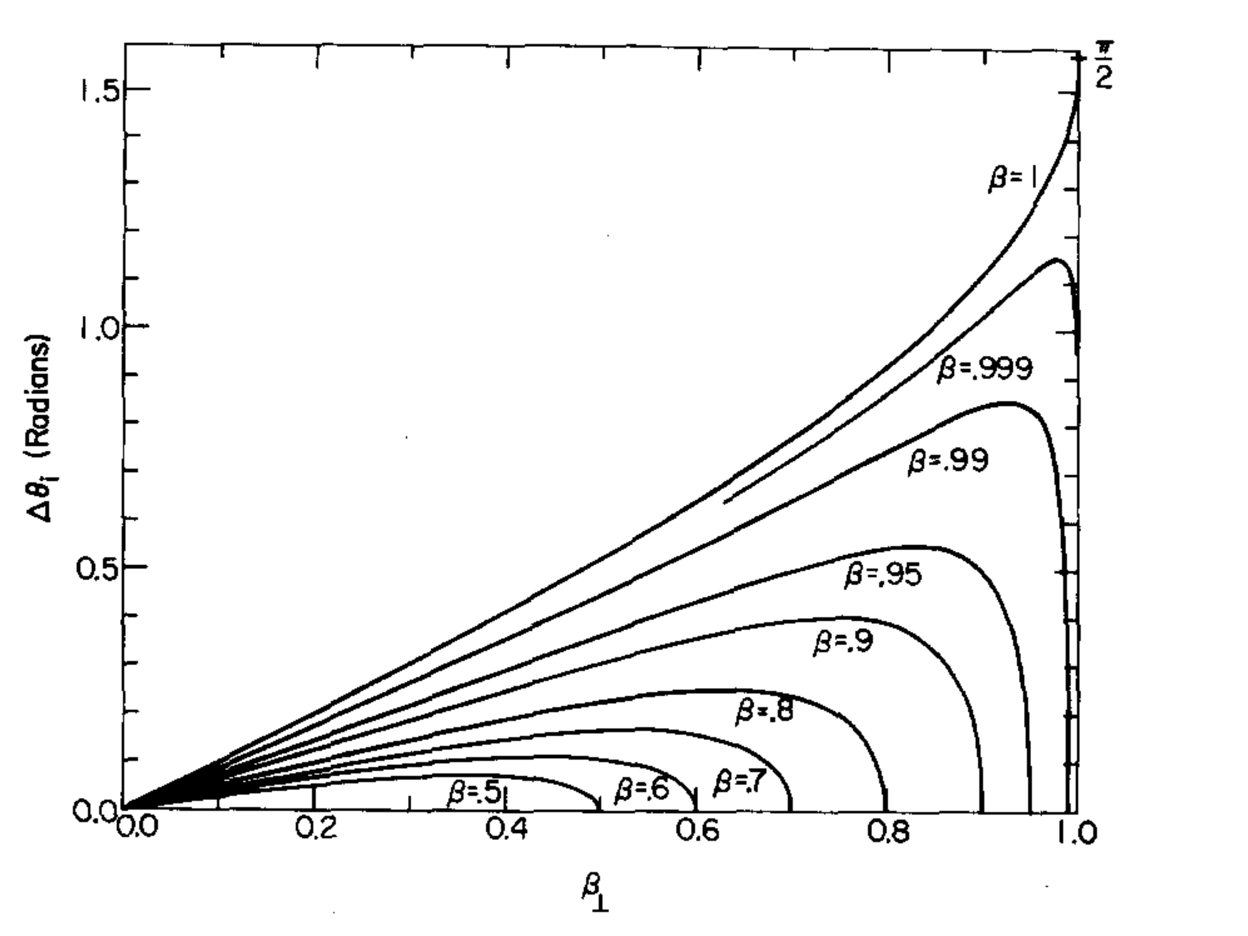
$$\beta(\theta) = \frac{\beta_1\beta_2 \sin\theta_f}{\beta_1 \sin\theta + \beta_2 \sin(\theta_f - \theta)} .$$

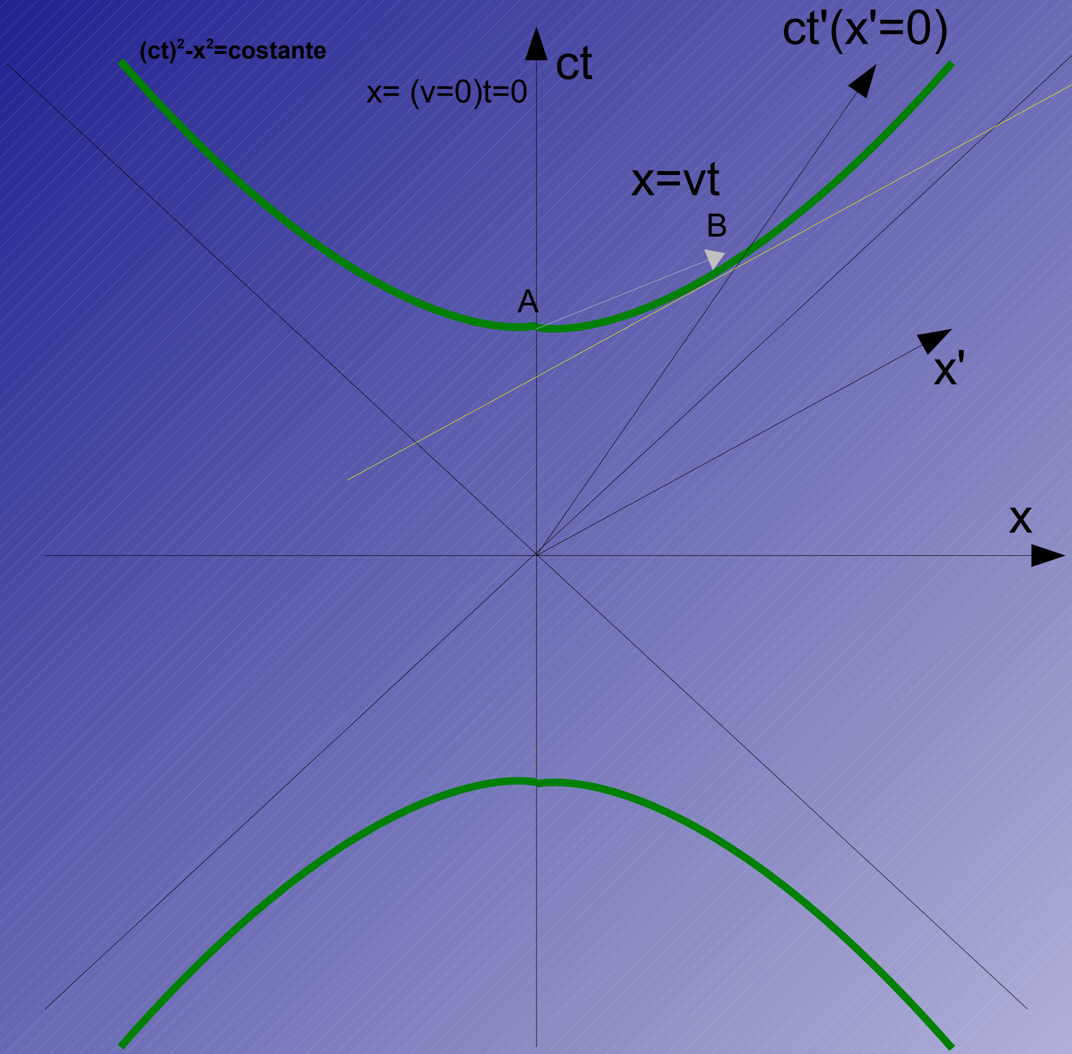
$$\Delta\theta = \int_0^{\theta_f} \{[1-\beta^2(\theta)]^{-1/2} - 1\} d\theta,$$

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 \pm \Delta\theta_2,$$

$$\beta(\theta) = \beta_\perp / \cos(\theta - \theta_i).$$

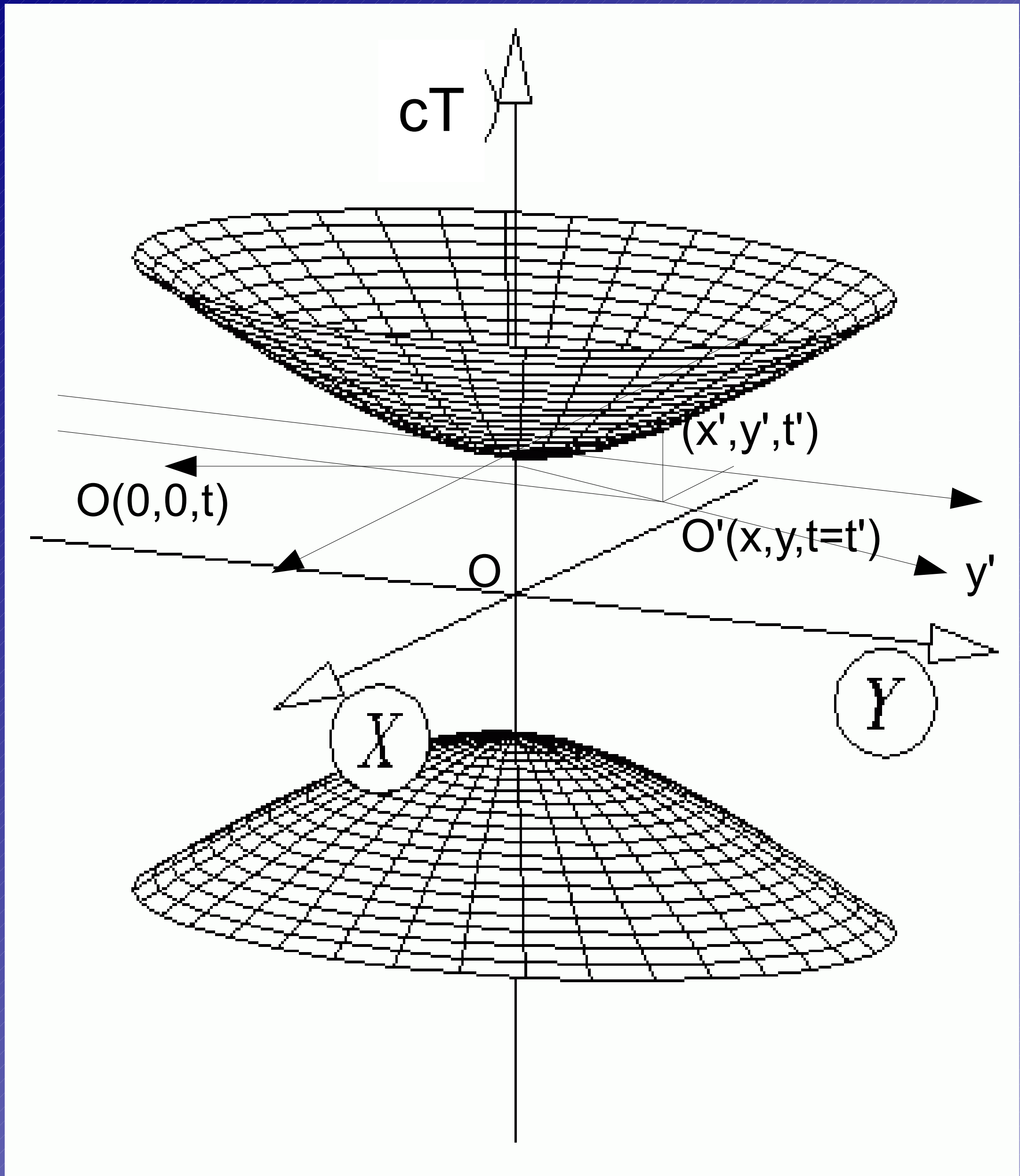
$$\Delta\theta_i = \int_0^{\theta_i} \{[1 - \beta^2(\theta)]^{-1/2} - 1\} d\theta,$$





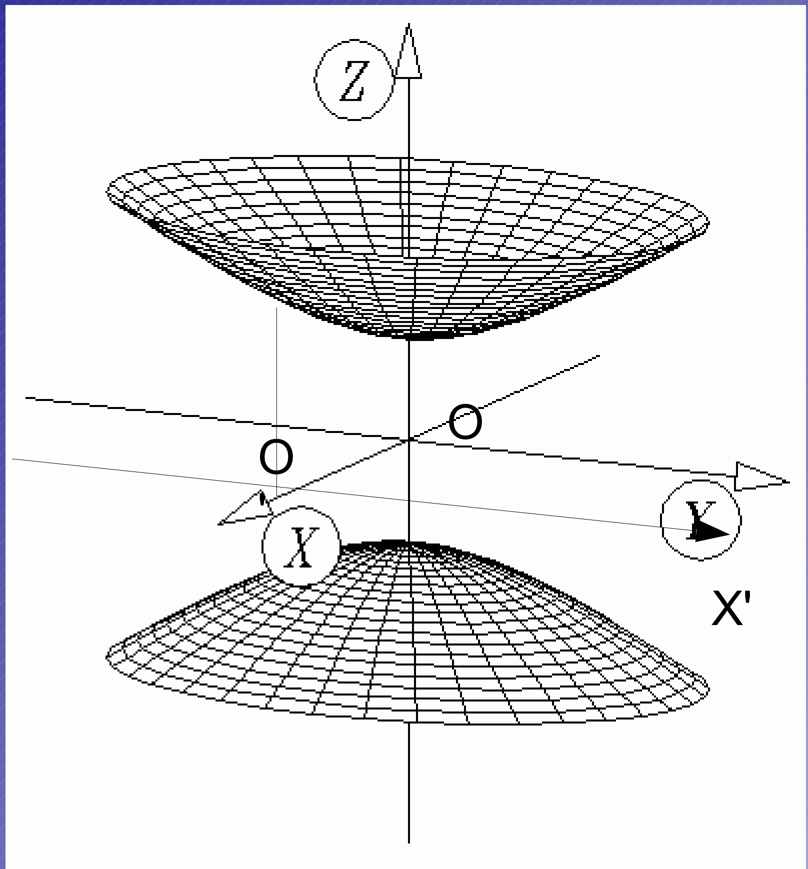
$\overline{AB}$ FUNZIONE CRESCENTE DELLE VELOCITà RELATIVE DEI DUE SISTEMI

RICORDIAMO CHE CAMBIAMENTI DI VELOCITA' INDUCONO ***TRASFORMAZIONI DI COORDINATE IN UNO SPAZIO CURVO*** E NON EUCLIDEO : E' COME SE I SISTEMI DI COORDINATE , RAPPRESENTATI DALLA RETTA X ,FOSSERO ***TANGENTI A UNA LINEA CURVA*** IN PUNTI LA CUI DITANZA è UNA FUNZIONE CRESCENTE DELLA VELOCITA' RELATIVA DEI DUE SISTEMI

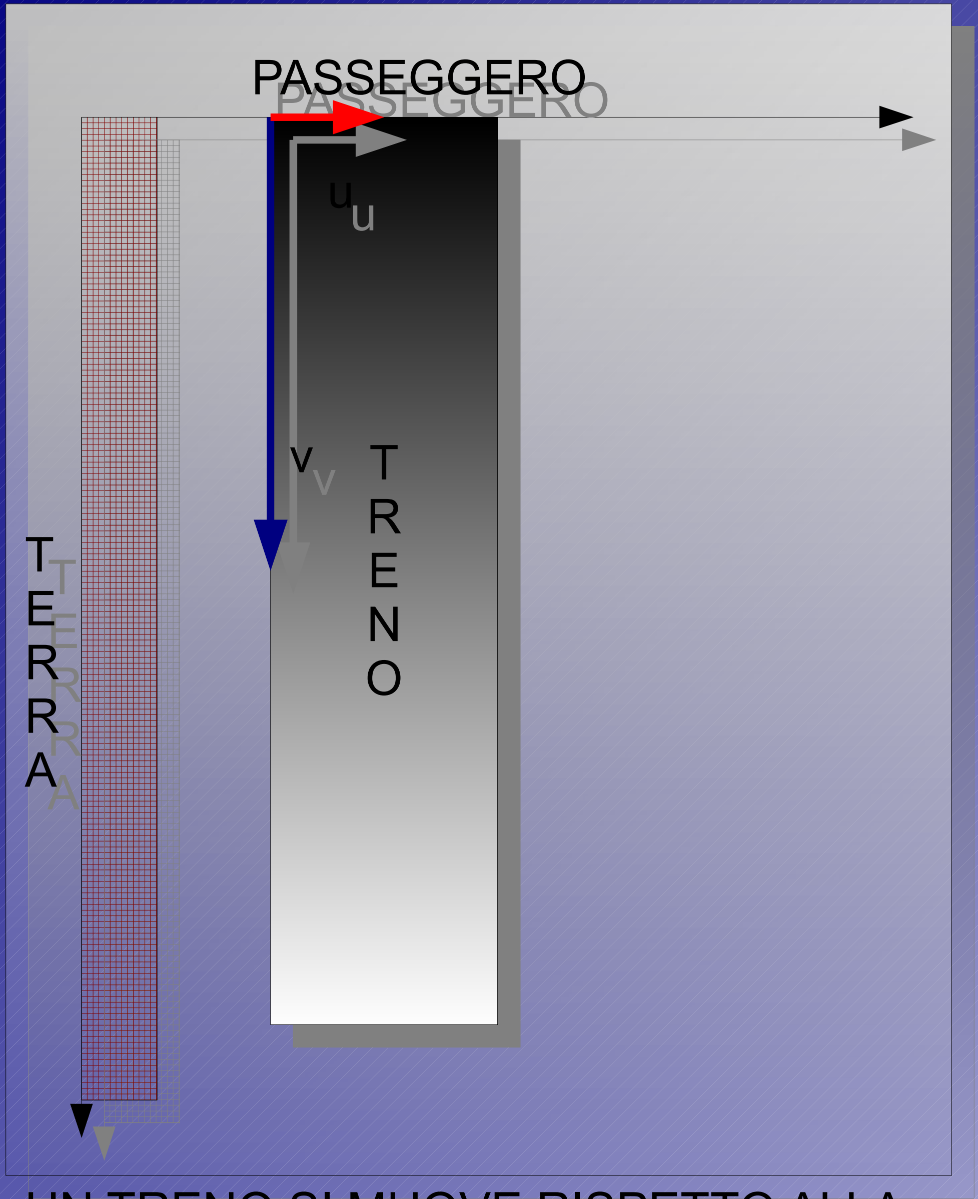


CON L'AGGIUNTA DELL'ASSE y IL DIAGRAMMA DI MINKOSKY SI TRASFORMA IN UN'IPERBOLE DI ROTAZIONE : QUANDO SI EFFETTUA UNA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ (PASSANDO ALLE COORDIANTE DI UN SISTEMA INERZIALE CHE SI MUOVE CON VELOCITà V) LE COORDINATE DI UN DATO EVENTO (x,y,t) CAMBIERANO IN (x',y',t') MA QUESTE NUOVE COORDINATE SI TROVERANNO SUL MEDESIMO IPERBOLOIDE DI (x,y,t)

IL SISTEMA O' SI MUOVE RISPETTO AD O CON VELOCITà SIA CON COMPONENTE X CHE CON COMPONENTE Y : O VEDRà MUOVERSI IL SISTEMA S' VERSO OO' CON VELOCITà v



S' SI MUOVE RISPETTO
A O CON VELOCITà CON
SOLO COMPONENTE
X : O'(x,y) A DIVERSE
VELOCITà SI TROVERà
SULL'ASSE X



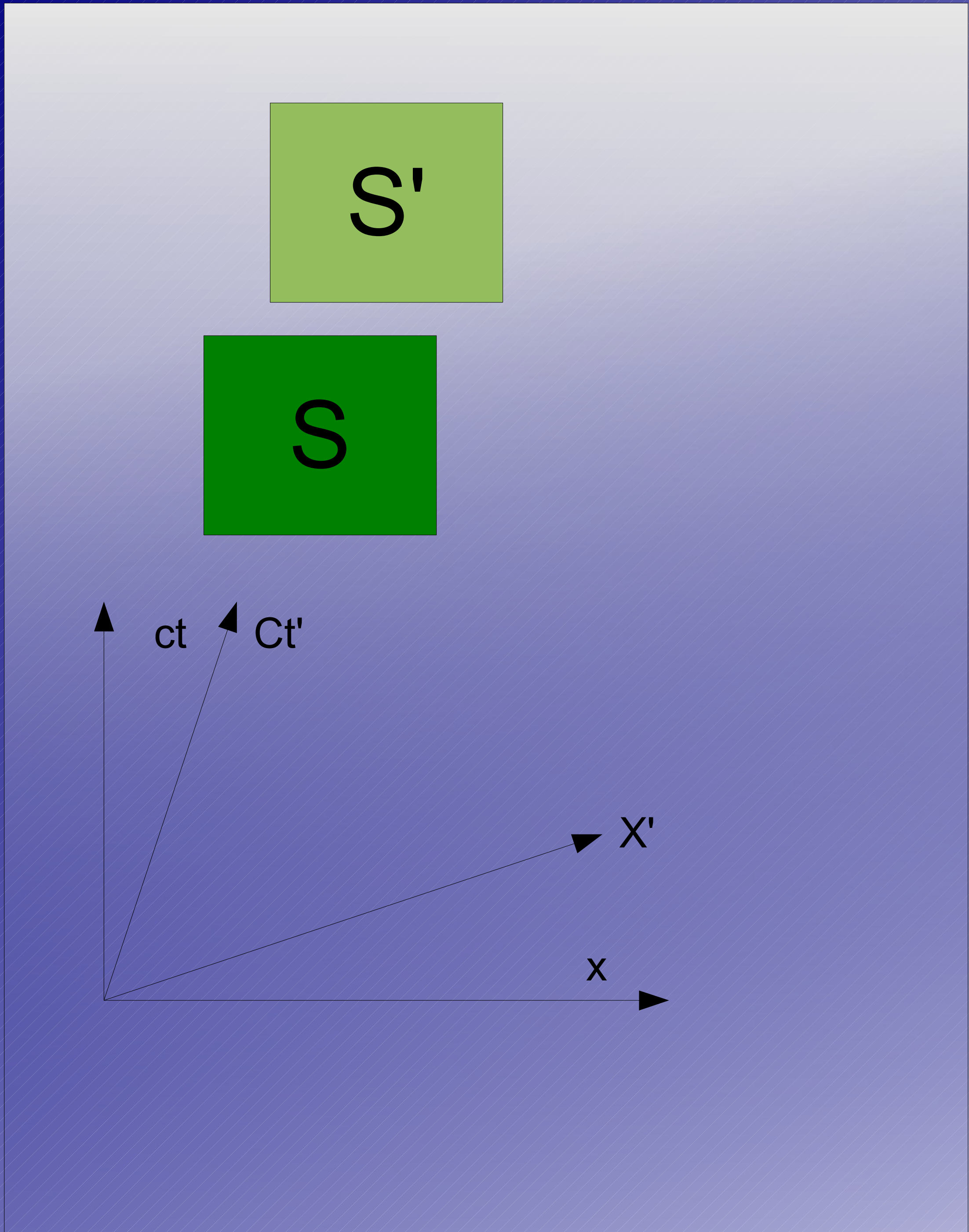
UN TRENO SI MUOVE RISPETTO ALLA TERRA CON VELOCITA' v MENTRE UN PASSEGGERO OSSERAVATO DALLA TERRA SI MUOVE PERPENDICOLARMENTE AL TRENO CON VELOCITA' u

APPLICANDO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SI PUO' TROVARE LA VELOCITA' u' CON CUI SI MUOVE IL PASSEGGERRO RISPETTO AL TRENO

$u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$	$u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2}$
$u_y' = \dfrac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}$	$u_y = \dfrac{u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x' v/c^2}$
$u_z' = \dfrac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}$	$u_z = \dfrac{u_z' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x' v/c^2}$

CONSIDERANDO CHE ABBIAMO SCELTO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI u x =0 OTTENIAMO

$$u'_y = u_y / \sqrt{1-(v^2/c^2)}$$
$$u'_Z = u_Z / \sqrt{1-(v^2/c^2)}$$



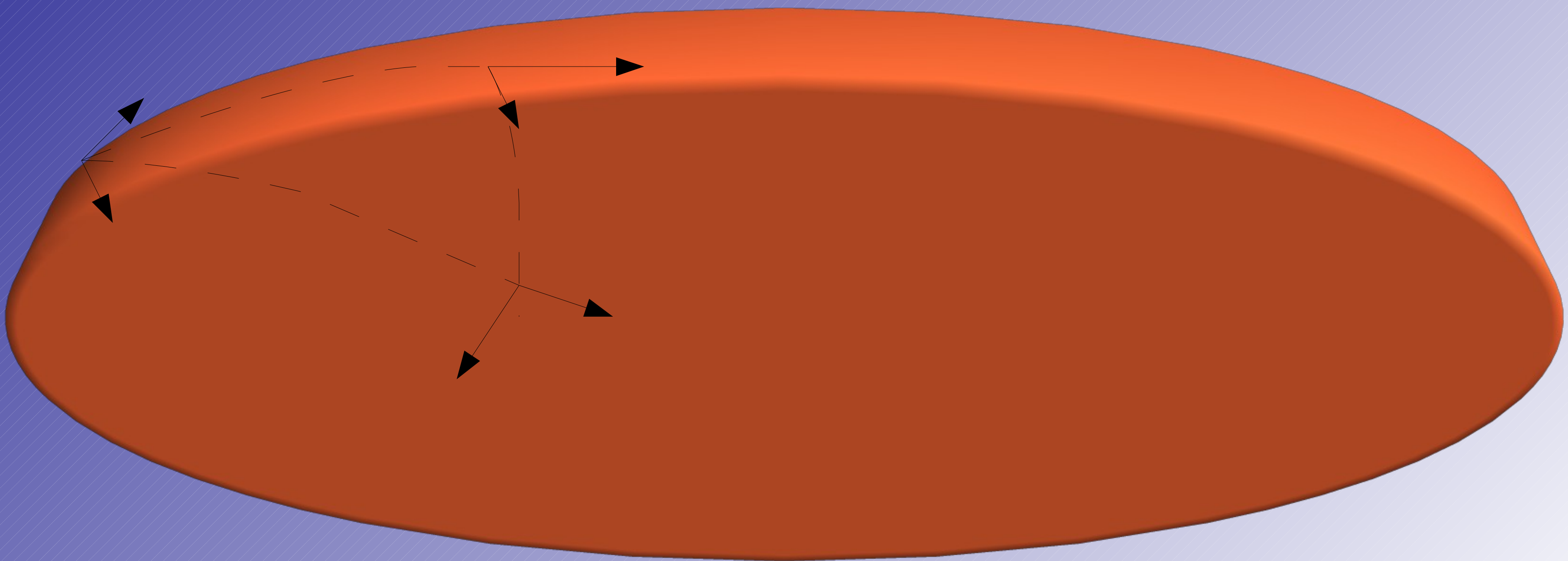
LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ CI PERMETTONO DI PASSARE DA UN SISTEMA DI COORDINATE S AD UN SISTEMA DI COORDINATE S' CHE SI MUOVE CON VELOCITA UNIFORME RIPSETTO A S

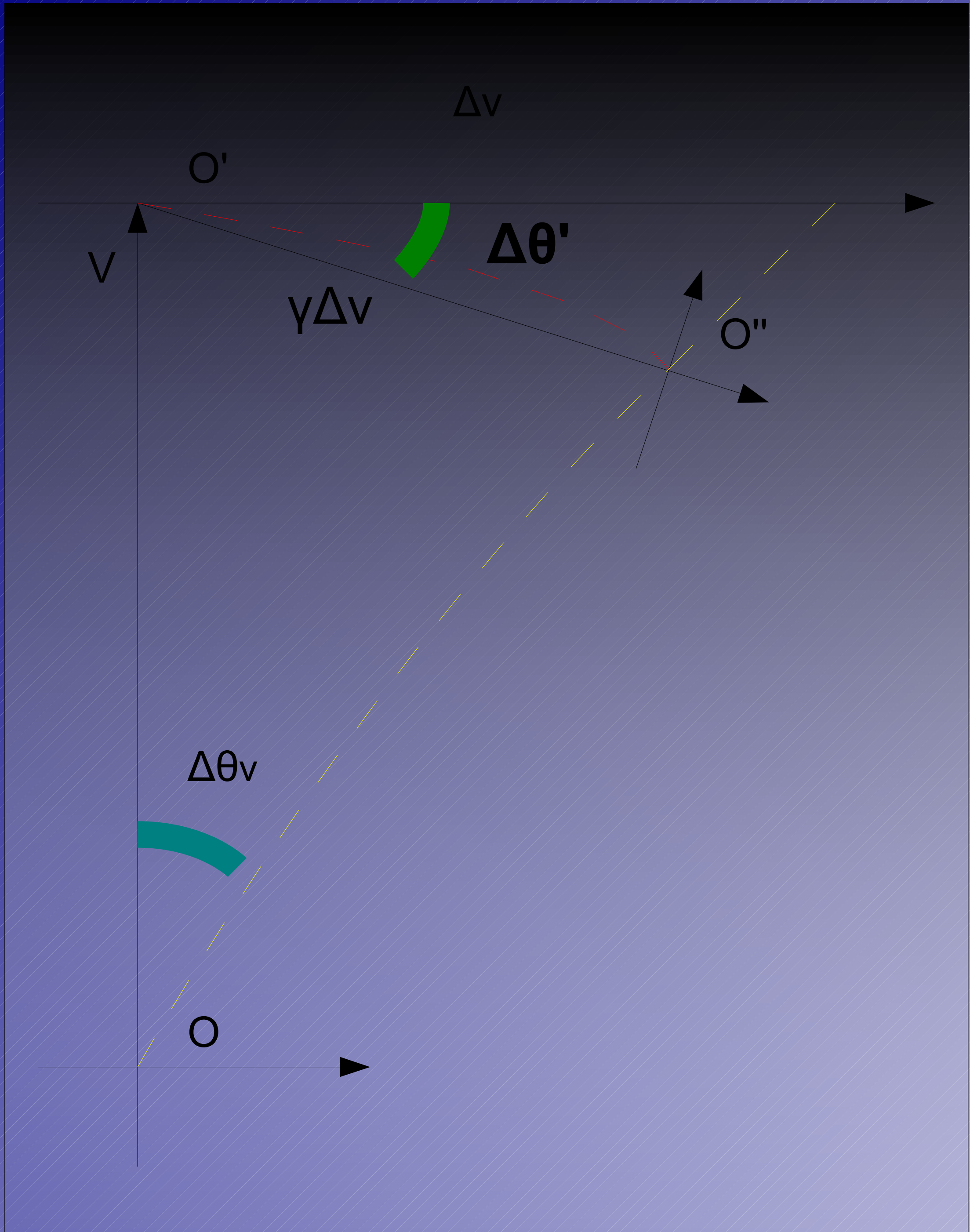
SE S' SI MUOVE RISPETTO AD S CON VELOCITA' v LUNGO L'ASSE X LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ ,CHE CI FANNO PASSARE DALLE COORDINATE x A QUELLE x' RELATIVE A S',PORTANO AD UNA ROTAZIONE DEGLI ASSI NELLO SPAZIO TEMPO

NEL NOSTRO CASO O' SI MUOVE RISPETTO AD O '' CON VELOCITA' dv => GLI ASSI x'' z'' SUBIRANNO UNA ROTAZIONE RISPETTO AGLI ASSI x' z'

DATO UN CAMBIAMENTO INFINITESIMO DI VELOCITA dv VISTO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL LABORATORIO DI QUALE ANGOLO RUOTERA' L'ASSE x'' RISPETTO A x' ?

RICORDIAMO CHE CAMBIAMENTI DI VELOCITA' INDUCONO ***TRASFORMAZIONI DI COORDINATE IN UNO SPAZIO CURVO*** E NON EUCLIDEO : E' COME SE I SISTEMI DI COORDINATE , RAPPRESENTATI DA ***PIANI X-Z*** ,FOSSERO ***TANGENTI A UNA SUPERFICIE CURVA*** IN PUNTI LA CUI DITANZA è UNA FUNZIONE RELATIVA DELLA VELOCITA' RELATIVA DEI DUE SISTEMI



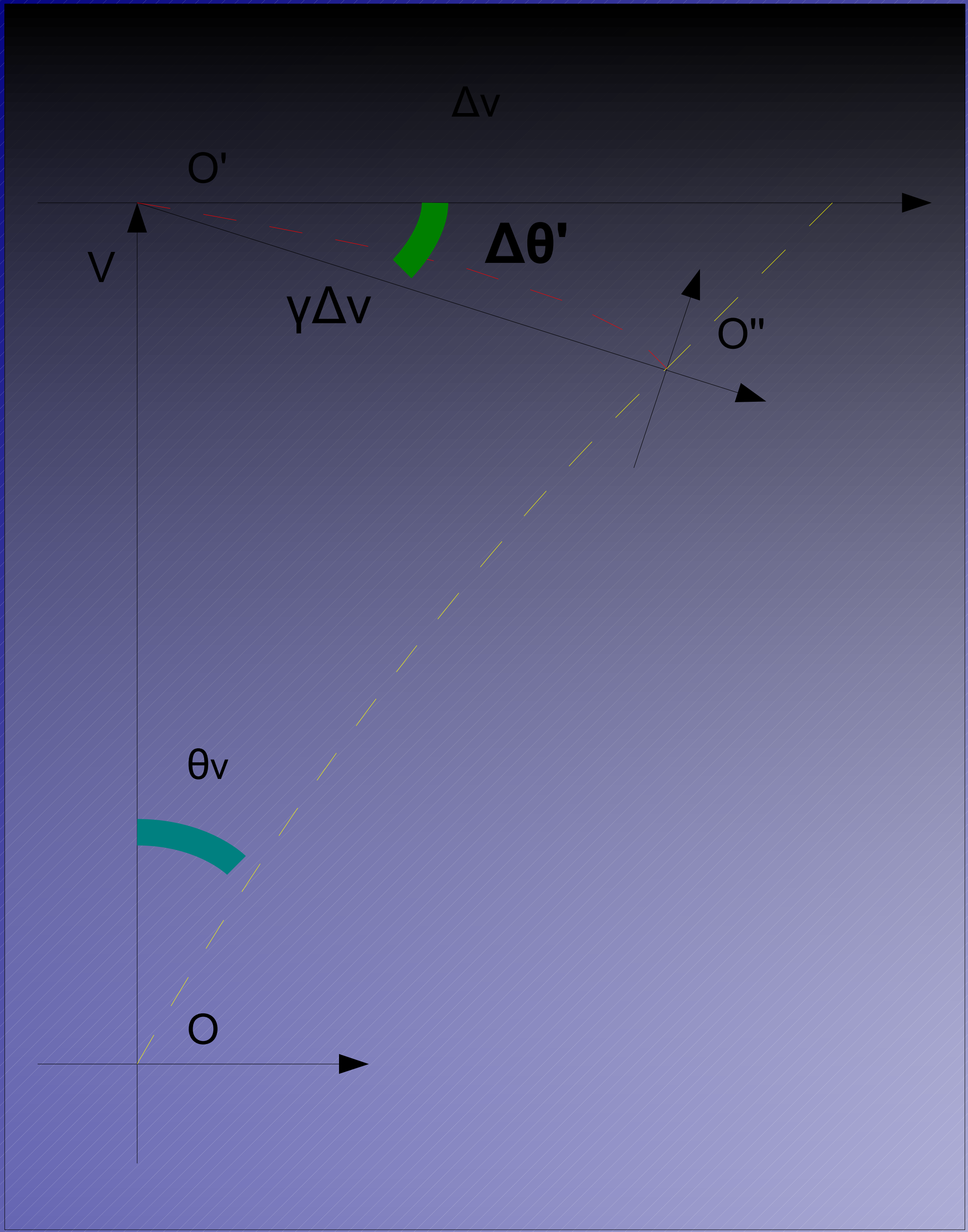


O' SI MUOVE RISPETTO AD O CON VELOCITà CON SOLA COMPONENTE z :O' SI MUOVE CON VELOCITà V LUNGO L'ASSE Z Z'

O'' SI MUOVE RISPETTO AD O LUNGO Z CON VELOCITà v , LUNGO X CON VELOCITà DELTAV A :ROTAZIONE DEGLIASSI

LE LINEE TRATTEGGIATE RAPPRESENTANO IL PERCORSO DI O'' NELLO SPAZIO DELLE VELOCITà DAL PUNTO DI VISTA DI O'(ROSSA) E O (LINEA GIALLA)

SI NOTI COME ERRONEAMENTE L'OSSERVATORE SOLIDALE CON O VEDE O' E O'' MUOVERSI PARALLELI TRA LORO :O' E O'' SI MUOVONO INFATTI LUNGO DUE GEODETICHE PERCEPITE COME RETTE : O' E O'' POSSONO SOVRAPPORSI AD O SOLO PER VIA TRASLATORIA , MA NELLO SPAZIO EUCLIDEO DUE SISTEMI POARALLEI AD UN TERZO SISTEMA SONO PARALLELI TRA LORO!!!!



LA CURVATURE DELLO SPAZIO
DELLE VELOCITA' E' NEGATIVA

LA ***SOMMA DEGLI ANGOLI DEL TRIANGOLO O O' O'' < π***

O'O''O E' IL COMPLEMENTARE
DELL'ANGOLO O'OO''

$$OO'O'' = -\pi/2 - \Delta\theta'$$

PER UN A VARIAZIONE dv
INFINITESIMA L'OSSERVATORE
IN O' VEDE MUOVERSI O''
VICINO LA DIREZIONE DI x' DI
UN ANGOLO $\theta v \approx \gamma(\Delta v/v)$

$$\Delta\theta' = [\gamma(\Delta v/v) - (\Delta v/v)] = (\gamma - 1)\theta_v$$

APPLICANDO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ OTTENIAMO LE COORDINATE DI UN PUNTO IN O NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO O' E LE COORDINATE DI O" IN O

$$x = x',$$
$$z = \gamma(z' + vt'), \quad (1)$$
$$t = \gamma(t' + vz'/c^2),$$

$$x'' = x - (\Delta v/v)z + \gamma(\Delta v/v)(z - vt),$$
$$z'' = \gamma(z - vt) + (\gamma - 1)(\Delta v/v)x,$$
$$t'' = \gamma\left(t - \frac{vz + \Delta v x}{c^2}\right), \quad (2)$$

SOSTITUENDO LA (1) NELLA (2) ESPRIMIAMO LE COORDINATE DI UN PUNTO IN O" IN FUNZIONE DELLE COORDINATE DI O'

$$x'' = x' - (\gamma - 1)(\Delta v/v)z' - \gamma \Delta v t',$$
$$z'' = z' + (\gamma - 1)(\Delta v/v)x',$$
$$t'' = t' - \gamma(\Delta v x'/c^2).$$

CONSIDERANDO IL MOTO DEL PUNTO O'' (X''=0 Z''=0) OTTENIAMO

$$x' = \gamma \Delta v t',$$

$$z' = -(\gamma - 1)\Delta v x'/v = -\gamma(\gamma - 1)(\Delta v)^2 t'/v,$$

POSSO ESPRIMERE QUINDI LA VELOCITA' LUNGO X' E LUNGO Z' DEL PUNTO O'' : DAL LORO RAPPORTO POSSO OTTENERE L'ANGOLO DI ROTAZIONE

$$-\Delta\theta' \approx \frac{dz'/dt'}{dx'/dt'} = -(\gamma - 1)\frac{\Delta v}{v}$$

MA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO O L'ANGOLO TRA Z' E x'' è PERPENDICOLARE ED è QUINDI PARI A dv/v

$$\Delta\theta' = (\gamma - 1)\theta_V$$

PRECESSIONE DI THOMAS