Radiazione e Relativita' Ristretta

I – Onde

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$$

Non esistono cariche o correnti magnetiche

Cariche e correnti elettriche

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

8 equazioni differenziali alle derivate parziali del I ordine, accoppiate

Equazione delle onde

$$\nabla\times(\nabla\times\cdots=\nabla(\nabla\cdot\ \cdots\ \ \text{-}\Delta\cdots$$

Identita' vettoriale; applicata alla III e IV eq. di Maxwell
Tenuto conto delle prime due:

$$\Delta\mathbf{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\Delta\mathbf{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0$$

Equazioni delle onde→
6 eq. differenziali alle der. parziali del II ordine, disaccoppiate

$$\rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\ \text{!!!}$$

Soluzioni equazione delle onde

Caso unidimensionale

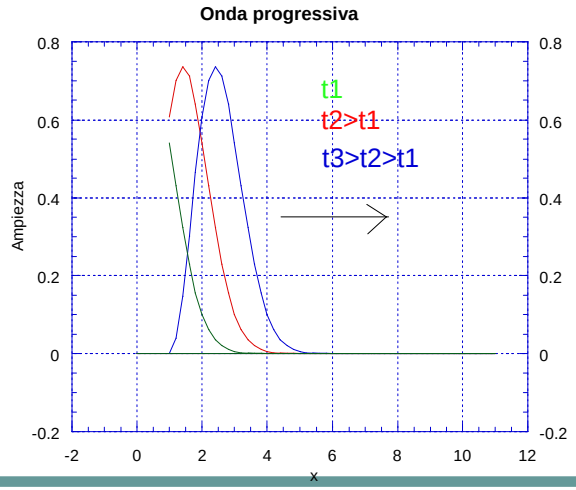
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad v = velocita'$$

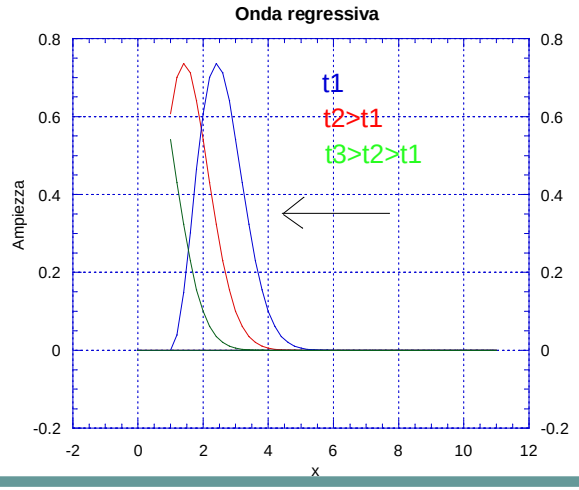
f=f(x,t) funzione di 2 variabili

g, h funzioni qualsiasi

Soluzione piu' generale

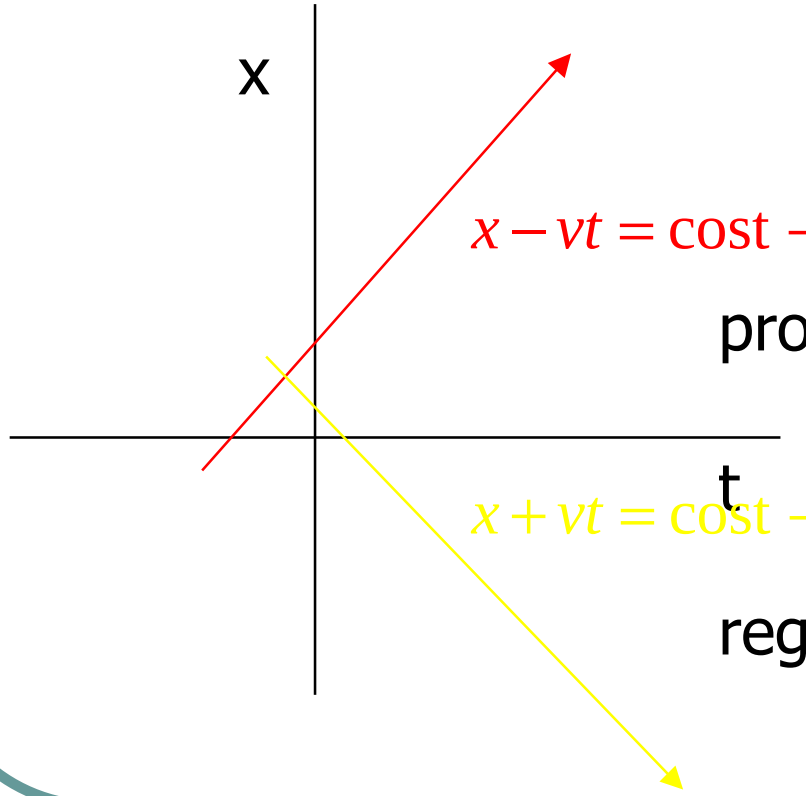
$$f = g(x - vt) \quad + \quad h(x + vt)$$





Onde progressive e regressive

Luogo dei "punti" *(x,t)* in cui la funzione ha un dato valore



$x - vt = \text{cost} \rightarrow$ se t aumenta, x aumenta

progressiva

$x + vt = \text{cost} \rightarrow$ se t aumenta, x diminuisce

regressiva

Onde armoniche - I

Soluzione particolare:

$$f(x,t) = A\cos\left[k\left(x - vt\right) + \delta\right]$$

Ampiezza — Numero d'onda — Fase

Relazioni fondamentali e definizioni:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}$$

k: *frequenza spaziale*
ν: *frequenza temporale*

Onde armoniche - II

$$f_P(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{progressiva}$$

$$f_R(x,t) = A\cos(kx + \omega t - \delta) \quad \text{regressiva}$$

Perche' il -?

$$f_P(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = A\cos(kx - (\omega t - \delta))$$

←la fase si assegna per convenzione alla componente temporale dell'argomento, che cambia segno nel passare da un'onda progressiva a una regressiva. Allora:

$$f_R(x,t) = A\cos(kx + (\omega t - \delta)) = A\cos(-kx - (\omega t - \delta))$$

→ Per passare da o.progressiva a o.regressiva $k \rightarrow -k$

Uso degli esponenziali complessi

$$A\cos(kx-\omega t+\delta)=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t+\delta)}\right]$$

In luogo delle funzioni trigonometriche si usano le funzioni esponenziali complesse

Si sottintende sempre di prendere alla fine dei calcoli la parte reale del risultato

Formalismo utile per operazioni lineari, in cui ω non cambia.

Vantaggio: grande semplificazione dei calcoli!

$$A_1\cos(kx-\omega t+\delta_1)+A_2\cos(kx-\omega t+\delta_2)=A_3\cos(kx-\omega t+\delta_3)$$

$$\rightarrow \underbrace{A_1e^{i\delta_1}}_{\tilde{A}_1}e^{i(kx-\omega t)}+\underbrace{A_2e^{i\delta_2}}_{\tilde{A}_2}e^{i(kx-\omega t)}=\underbrace{A_3e^{i\delta_3}}_{\tilde{A}_3}e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\rightarrow \tilde{A}_1+\tilde{A}_2=\tilde{A}_3$$

$\rightarrow$*Le ampiezze complesse si sommano*

Teorema di Fourier

Qualsiasi onda si puo' esprimere come combinazione lineare di onde sinusoidali di diverse lunghezze d'onda. In generale, per un'onda piana che si propaga lungo *x*:

$$\tilde{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

Occorrono anche le onde regressive (con *k* –vo) se si vuole poter comporre qualsiasi onda

$\rightarrow$*Ci si puo' limitare a studiare le proprieta' generali delle onde sinusoidali*

Onde piane nello spazio vuoto

Caso particolare: *onda piana monocromatica*

propagazione nella direzione x
non dipendenza da (y,z)
k valore definito e unico

$$\tilde{\mathbf{E}}(r,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(r,t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

Nota: ogni soluzione delle eq. di Maxwell in assenza di cariche e correnti e' un'onda
Non e' vero il contrario: infatti ***E*** *e* ***B*** *soddisfano*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Proprieta' delle onde piane

1) Trasversalita' dei campi

$$\tilde{\mathbf{E}}(r,t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tilde{E}_{0x}}{\partial x} = 0 \quad \text{non dipendenza da (y,z)}$$

$$\rightarrow ik\tilde{E}_{0x} e^{i(kx-\omega t)} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{0x} = 0$$

2) Ortogonalita' di ***E,B***

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \rightarrow k\tilde{E}_{0y} = \omega \tilde{B}_{0z},\ k\tilde{E}_{0z} = -\omega \tilde{B}_{0y}$$

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega}\left(\hat{\mathbf{x}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0\right) \rightarrow B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c}$$

Onde piane in direzione generica

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)} = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}}\times\tilde{\mathbf{E}}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$$

n: versore polarizzazione
k: n. d'onda

Si noti: argomento reale $\rightarrow$ ampiezza costante
argomento complesso $\rightarrow$ ampiezza smorzata

n non necessariamente costante nel tempo

Energia, quantita' di moto

$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$	Densita' di energia elettromagnetica
$\rightarrow U = \varepsilon_0 E^2$	*←per un'onda piana*
$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$	Vettore di Poynting: flusso di energia elettromagnetica
$\rightarrow \mathbf{S} = cU\hat{\mathbf{k}}$	*←per un'onda piana*
$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$	Flusso di quantita' di moto
$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{U}{c}\hat{\mathbf{k}}$	*←per un'onda piana*

Polarizzazione

Proprieta' dei campi ***E*** e ***B***: sempre ortogonali a ***k***
Direzione di ***E***: insieme a ***k***, definisce il *piano di vibrazione* di ***E***

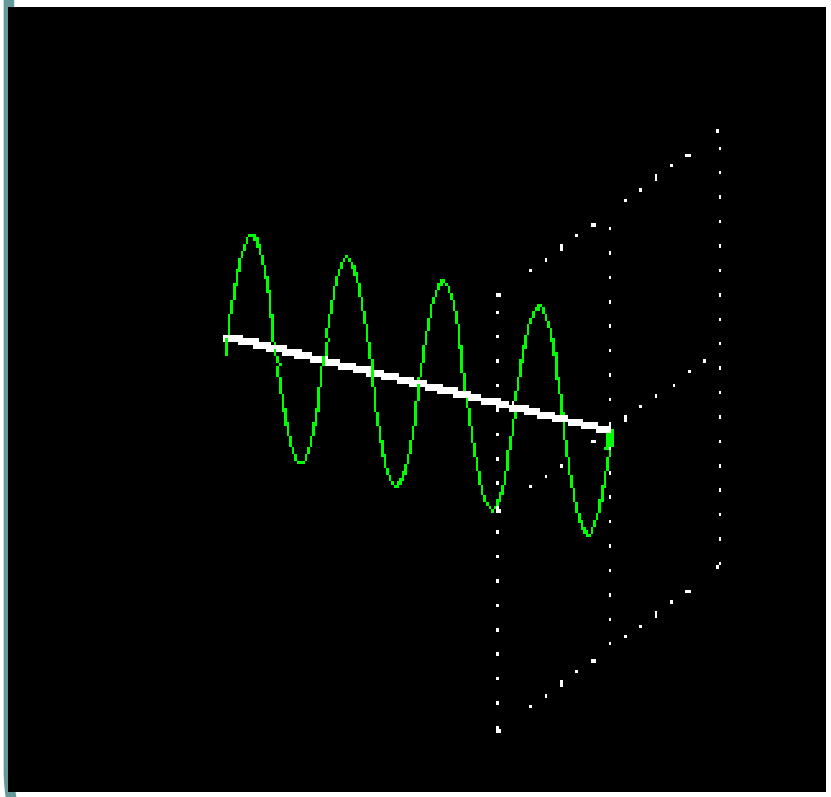
Non necessariamente costante nel tempo (ma $\perp$ ***k***). Per onde piane:

Costante: onda piana *polarizzata linearmente*

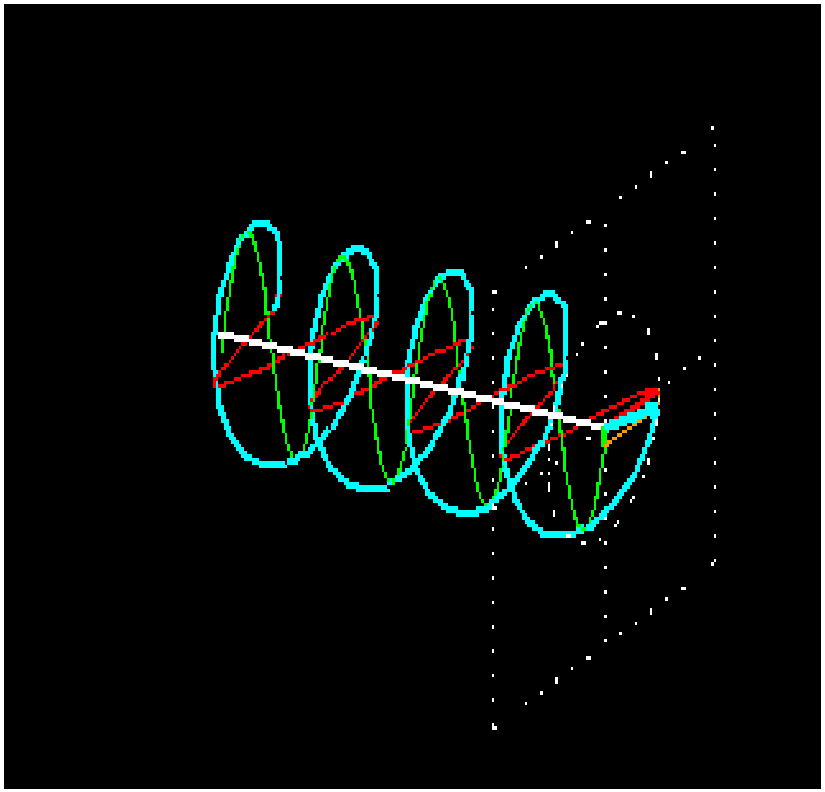
Rotante attorno a ***k***: onda piana *polarizzata ellitticamente (circolarmente,* se ampiezza di oscillazione costante)

Vettore ***E*** per onde polarizzate

Lineare



Circolare



Mezzi materiali

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$$

Relazioni costitutive, semiempiriche dal punto di vista macroscopico. Permittivita' e permeabilita':

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \ , \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

←nell'ipotesi in cui ε,μ siano costanti, scalari (isotropia del mezzo), assenti cariche e correnti libere

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \equiv \frac{c}{n}$$

Onde nei mezzi materiali

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

Velocita' di propagazione

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Indice di rifrazione

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)$$

Densita' di energia

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Vettore di Poynting