

Radiazione e Relativita' Ristretta

II – Onde nei dielettrici e nei conduttori

Onde nei dielettrici

Leggi delle riflessione e rifrazione

Formule di Fresnel

Riflessione totale

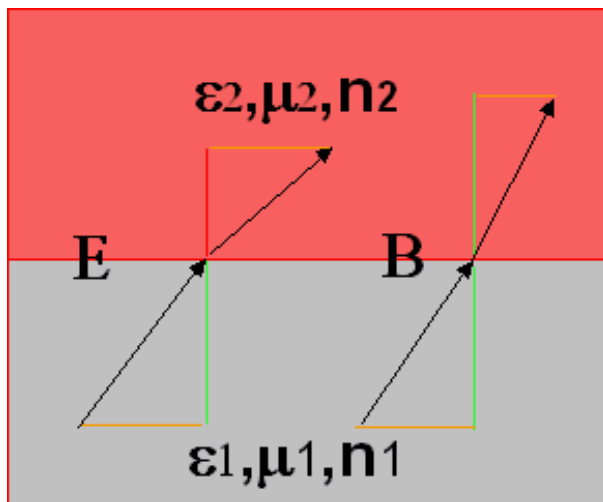
Polarizzazione per riflessione

Condizioni al contorno

Sulla frontiera fra due mezzi valgono sempre le relazioni:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad \mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel}$$



Le condizioni derivano da

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

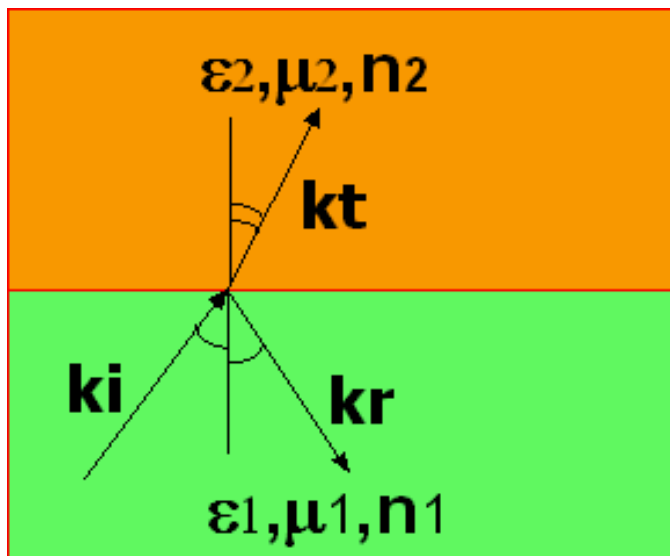
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

applicate a linee e volumi chiusi che attraversano la superficie

Riflessione e trasmissione - I

Si applicano le condizioni al contorno alla situazione descritta in figura



Risultati

3 vettori d'onda complanari

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \vartheta_T}{\sin \vartheta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

Componenti:

$$\epsilon_1 (\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_x = \epsilon_2 (\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_x$$

$$(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_{y,z} = (\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_{y,z}$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_{y,z} = \frac{1}{\mu_2} (\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_{y,z}$$

$$(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_x = (\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_x$$

Riflessione e trasmissione - II

Le conseguenze sono diverse per i 2 casi

(i) Polarizzazione nel piano di incidenza

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa sono

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

(ii) Polarizzazione ortogonale al piano di incidenza

Le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa sono

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Riflessione e trasmissione - III

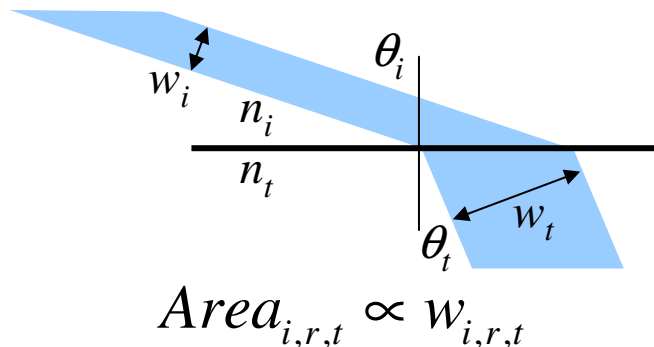
Formule di Fresnel per i coefficienti di riflessione e trasmissione, riferiti alle intensità:

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 ; R_{\perp} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

$$T_{\parallel} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} ; T_{\perp} = \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$$

Si osservi:

a)



b)

$$U = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right), v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, B = \frac{E}{v}$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon \left(E^2 + \frac{B^2}{\epsilon\mu} \right) = \frac{1}{2} \epsilon (E^2 + v^2 B^2) = \epsilon E^2$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2} U v = \frac{1}{2} \epsilon E^2 v = \frac{1}{2} n^2 E^2 \frac{c}{n} = \frac{1}{2} n c E^2$$

Riflessione e trasmissione - IV

Infatti:

$$R = \frac{I_{rifl} A_r}{I_{incid} A_i} = \frac{\frac{1}{2} c n_1 |E_r|^2 A_r}{\frac{1}{2} c n_1 |E_i|^2 A_i}, \quad A_{i,r,t} \text{ aree sottese in incidenza, riflessione, trasmissione}$$

$$A_r = A_i \rightarrow R = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

$$\begin{cases} A_i = A \cos \theta_i \\ A_t = A \cos \theta_t \end{cases} \rightarrow T = \frac{I_{tras} A_t}{I_{incid} A_i} = \frac{\frac{1}{2} c n_2 |E_t|^2 A_t}{\frac{1}{2} c n_1 |E_i|^2 A_i} = \frac{n_2}{\underbrace{n_1}_{\approx \beta}} \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 \underbrace{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}}_{\alpha} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

$$R = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

$$T = \frac{n_2}{\underbrace{n_1}_{\approx \beta}} \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta} \right)^2 \underbrace{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}}_{\alpha} = \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$$

Riflessione totale

Onda incidente da mezzo piu' denso a uno meno denso:

$$n_1 > n_2, \sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \rightarrow \theta_T = \frac{\pi}{2} \text{ per } \theta_I < \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{\text{lim}} \rightarrow \theta_{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Poiche' $\theta_T < \pi/2$, se $\theta_I > \theta_{\text{lim}}$ solo onda riflessa

Osservazione: come interpretare questo fisicamente?

$\sin \theta_T > 1 \rightarrow \theta_T$ e' complesso

$$\cos \theta_T = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = \pm i \sqrt{\sin^2 \theta_T - 1} = \pm i \sqrt{\sin^2 \left[\arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \right) \right] - 1}$$

$\cos \theta_T$ compare nell'esponenziale complesso che descrive

$\tilde{\mathbf{E}}_T \rightarrow$ *onda evanescente* lungo la superficie di separazione

Polarizzazione per riflessione

Riprendendo l'espressione per il campo riflesso con polarizzazione nel piano di incidenza:

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Si osserva che

$$\tilde{E}_{0R} = 0 \text{ quando } \alpha = \beta \rightarrow \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \sin \theta_I \right)^2}}{\cos \theta_I} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \tan \theta_I^B = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Angolo di Brewster
Quando $\theta_I = \theta^B$, l'onda riflessa non ha comp. nel piano di incidenza
Quindi:

l'onda e' polarizzata

Onde nei conduttori

Numero d'onda complesso

Propagazione e attenuazione

Riflessione e trasmissione

Eq. di Maxwell nei conduttori - I

Legge fondamentale nei conduttori:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{Legge di Ohm microscopica}$$

Riscrittura eq. di Maxwell per conduttori:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eq. di Maxwell nei conduttori - II

Eq. di continuit  per la carica:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sigma (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \rightarrow \rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

La costante di tempo ε/σ e' normalmente molto piccola:
dopo un transiente (di cui ci disinteressiamo) la carica libera va a zero. Quindi:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \underbrace{\mu\sigma\mathbf{E}}_{\text{termine aggiuntivo}} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Eq. delle onde nei conduttori

Solito trucco di prendere il rotore del rotore: viene

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Soluzione: per onde piane, soliti esponenziali complessi:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}, \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}, \Delta \mathbf{E} = (ik)^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$$

$$\rightarrow -k^2 \mathbf{E} + (\mu \epsilon \omega^2 + i\omega \mu \sigma) \mathbf{E} = 0$$

$$\rightarrow k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i\omega \mu \sigma$$

Numero d'onda complesso

Il numero d'onda (o vettore d'onda) ha una parte immaginaria

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \rightarrow k = k_+ + ik_-$$

$$k_{\pm} = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \pm 1 \right]^{1/2}$$

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(x, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i[k_+ + ik_-]x} e^{-i\omega t} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

Quindi l'onda piana si *attenua* nel propagarsi dentro il conduttore.

Significato di $k_{\pm}$

Lunghezza di attenuazione e lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_+}, n = \frac{ck_+}{\omega}$$

$$d = \frac{1}{k_-}$$

Comportamenti diversi per *buoni* e *cattivi* conduttori

$$\text{Cattivi: } \frac{\sigma}{\varepsilon} \ll \omega \rightarrow \begin{cases} k_+ \cong \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \\ k_- \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon} \sqrt{\varepsilon \mu} \end{cases} \quad \text{Buoni: } \frac{\sigma}{\varepsilon} \gg \omega \rightarrow \begin{cases} k_+ \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ k_- \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{cases}$$

In termini di lunghezze caratteristiche: $d \propto \frac{1}{k_-} \propto \frac{\varepsilon}{\sigma}, \lambda \propto \frac{1}{k_+} \propto \frac{1}{\omega}$

$$\rightarrow d \gg \lambda$$

$$d \ll \lambda$$

Propagazione di un'onda piana

Campo elettromagnetico: **E** oscilla nel piano (x,y)

$$\tilde{\mathbf{E}}(x,t) = \hat{\mathbf{y}} \tilde{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,t) = \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{k}{\omega} \right) \tilde{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$$= \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{|k| e^{i\varphi}}{\omega} \right) \tilde{E}_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

*Si osserva che **E** e **B** non oscillano in fase; **B** ha un ritardo di fase ϕ*

Conseguenze:

- *Densita' di energia quasi tutta magnetica*
- *Densita' di energia decresce lungo il percorso dell'onda*
- *Il conduttore viene scaldato dall'onda*

$$|k| = \sqrt{k_+^2 + k_-^2} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{k_-}{k_+} \right)$$

Riflessione e trasmissione - I

L'applicazione delle condizioni al contorno per **E , B , D e H** alla superficie di separazione fra 2 mezzi e' piu' laboriosa quando si e' in presenza di conduttori.

Nel caso piu' interessante dielettrico-conduttore, ci si attende in linea di principio presenza di carica e corrente superficiali alla separazione fra i due mezzi :

$$\epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = \sigma \quad \mathbf{E}_{1\parallel} - \mathbf{E}_{2\parallel} = 0$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel} = \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Riflessione e trasmissione - II

Ma: sia σ , sia $\mathbf{j}$ devono essere nulli (perché $E_{\perp}$ è nullo da entrambi i lati; e perché ci vorrebbe un campo infinito per avere una corrente superficiale finita), si trovano le solite espressioni per le polarizzazioni parallela e ortogonale al piano di incidenza

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{0I}; \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

dove però adesso β è un numero complesso

Riflessione e trasmissione - III

- Per un conduttore ideale, $\sigma \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$ e si ha

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0$$

quindi l'onda e' totalmente riflessa, con sfasamento di π

- Se abbiamo un conduttore reale, σ e' grande ma $< \infty$, e β e' grande in modulo; quindi, sviluppando in serie di potenze di $1/\beta$:

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} \cong -\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \cong \frac{2}{\beta} - 1$$

$$\rightarrow R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \cong \left(\frac{2}{\beta} - 1\right)^2 \cong 1 - \sqrt{8 \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma}}$$

*Il coefficiente di riflessione dipende dalla frequenza...
→ Colore dei metalli*

Dispersione

Dispersione nei dielettrici

Dispersione nei conduttori

Dispersione

Evidenza che la propagazione dipende da 3 "costanti": ϵ , μ , σ .
In realta', nessuna delle 3 e' una costante: la dipendenza dalla frequenza e' l'aspetto piu' interessante del problema.

In sintesi, la dipendenza di ϵ, μ dalla frequenza e' dovuta alla variazione della velocita' di propagazione dell'onda con la frequenza

Questo e' complessivamente non inaspettato alla luce della struttura microscopica della materia: ci sono elettroni (liberi o legati alle molecole) che possono scambiare energia con campi elettromagnetici esterni; il confronto fra la frequenza del campo esterno e quelle proprie di oscillazione (atomiche/molecolari) fissa le caratteristiche della propagazione, inclusa la velocita'

Dispersione nei dielettrici

Modello semplificato: elettrone legato elasticamente nell'atomo, o molecola. Forza di richiamo armonica:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Giustificazione: configurazione atomica stabile → elettrone in un minimo di potenziale. Sviluppo vicino al minimo:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

Ora: I termine si può porre $= 0$, II termine deve essere $= 0$ (*forza* $= 0$ in un minimo di U), III termine è quello di un oscillatore armonico

Modello classico semplificato

Equazione del moto per elettrone legato, con termine di smorzamento (p.es., dovuto a *radiazione*):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m \frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

con $E_{ext}(t)$ sinusoidale.

Cerchiamo soluzioni stazionarie, usando il solito formalismo degli esponenziali complessi:

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{d\tilde{x}}{dt} = -i\omega \tilde{x}(t), \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = -\omega^2 \tilde{x}(t)$$

Soluzione equazione del moto

$$-\tilde{x}(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega\tilde{x} = -e\frac{\tilde{E}_0}{m}$$

$$\tilde{x}_0(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega\tilde{x}_0 = e\frac{\tilde{E}_0}{m}$$

$$\rightarrow \tilde{x}_0 = \frac{e\tilde{E}_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Si nota che:

- 1) La coordinata dell'elettrone e' sfasata rispetto a E_0 (il coefficiente di E_0 e' complesso); la fase varia da $-\pi$ a 0 al crescere della frequenza
- 2) L'ampiezza di oscillazione varia con ω , ed e' max. per $\omega=\omega_0$

Costante dielettrica complessa - I

Momento di dipolo indotto:

$$\tilde{p}(t) = e\tilde{x}(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} \tilde{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Se ci sono diverse classi di elettroni in ogni molecola, con f_j elettroni nella classe j -esima, e se ci sono N molecole/unita' di volume:

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{P}} = \frac{Ne^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}}_0$$

Costante dielettrica complessa - II

Ricordando la definizione di suscettività' e costante dielettrica:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \left(\sum_j \frac{f_j e^2 / m}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j \omega} \right) \right]$$

che quindi si ritrova come quantità complessa

Propagazione di un'onda piana

Onde piane in un mezzo dispersivo:

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\epsilon} \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(x, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}x - \omega t)}$$

$$-\tilde{k}^2 \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\epsilon} \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0$$

$$\rightarrow \tilde{k}^2 = \tilde{\epsilon} \mu_0 \omega^2 \rightarrow \tilde{k} = \sqrt{\tilde{\epsilon} \mu_0} \omega$$

Anche qui, il numero d'onda e' complesso:

$$\tilde{k} = k_+ + ik_- \rightarrow E = E_0 e^{-k_- x} e^{i(k_+ x - \omega t)}$$

$\alpha = 2k_-$ coefficiente di assorbimento

$$v = \frac{\omega}{k_+} \quad \text{velocita'} \rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{ck_+}{\omega} \quad \text{indice di rifrazione}$$

Notare che qui il numero d'onda complesso non e' dovuto alla conduttivita', ma al termine *dissipativo* nella forza

Parametri della dispersione

$$n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

$$\alpha = 2k_- \cong \frac{Ne^2 \omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

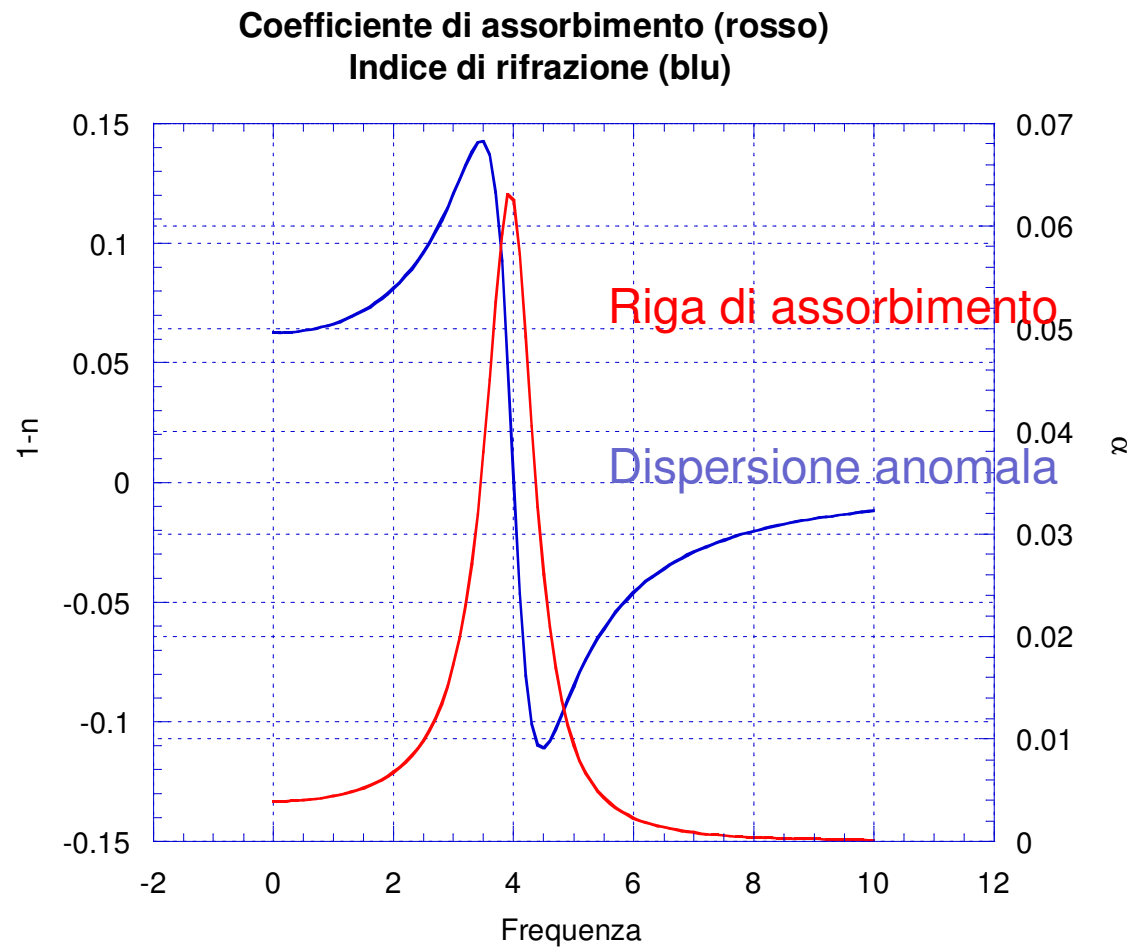
Se $\omega < \omega_j$:

$$\frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + \left(\frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left(\frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{legge di Cauchy}$$

Dispersione: n e α per $\omega \sim \omega_0$



Indice di rifrazione complesso

Si puo' definire un indice di rifrazione complesso, utile per trattare dielettrici assorbitivi

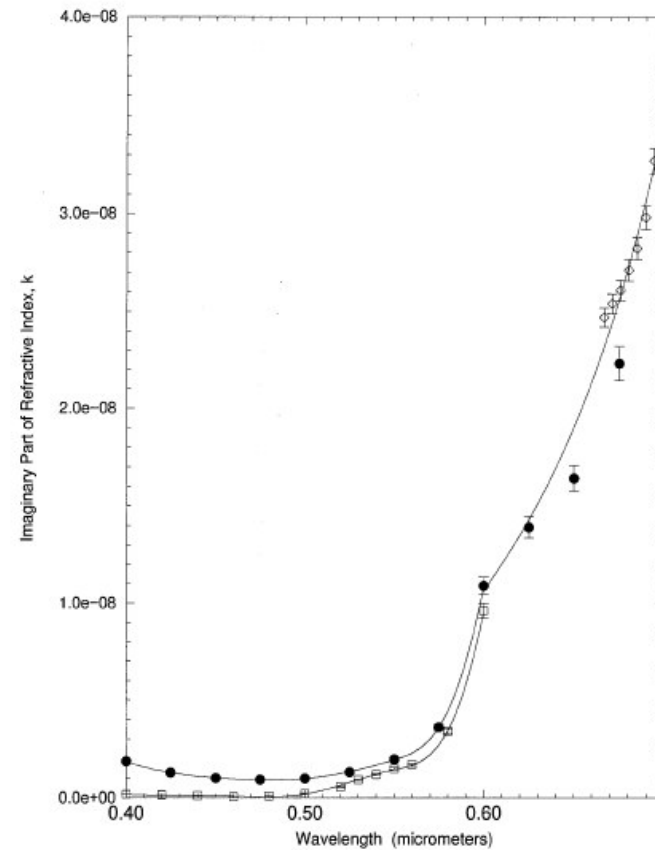
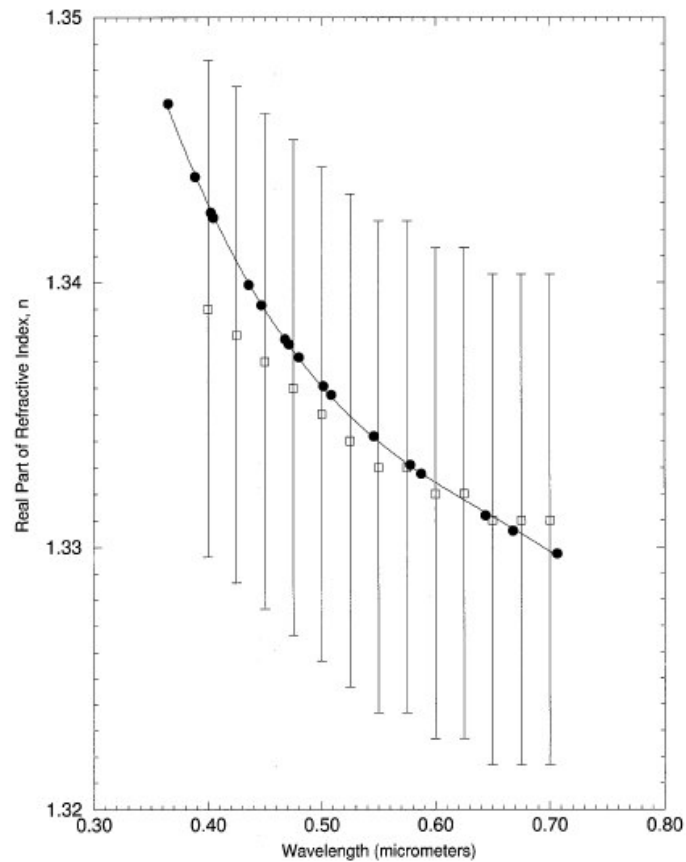
$$\tilde{n} = n_+ + in_-$$

$$n_+ = n = \frac{ck_+}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

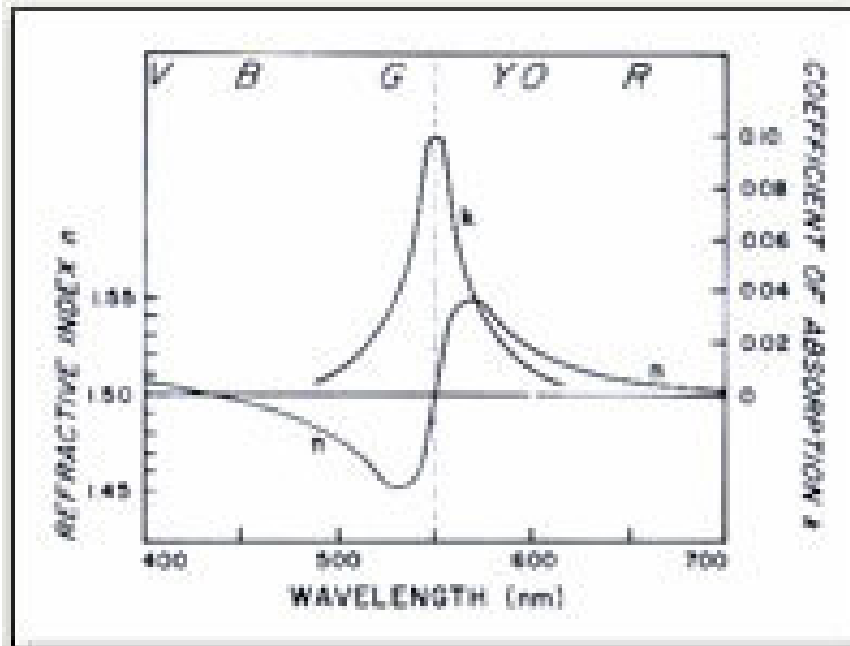
$$n_- = \frac{c\alpha}{2\omega} = \frac{ck_-}{\omega} \cong \frac{Ne^2\omega}{2m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Approssimazioni valide quando $n - 1, n_- \ll 1$, p.es. nei gas

Acqua a 25°



Filtro violetto



Dispersione nei conduttori

Modello semplificato: elettroni liberi
Differenze rispetto ai dielettrici:

- 1) *Nessuna forza di richiamo → Nessuna frequenza propria*
- 2) *Generazione di corrente, invece che di polarizzazione*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma m \frac{dx}{dt} - e E_{ext}(t)$$

$$\rightarrow -\omega^2 \tilde{x} = +i\gamma\omega\tilde{x} - e \frac{\tilde{E}_0}{m}$$

$$\omega^2 \tilde{x}_0 + i\gamma\omega\tilde{x}_0 = -e \frac{\tilde{E}_0}{m} \rightarrow \tilde{x}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

Conduttività complessa

Densità di corrente generata:

$$\tilde{x}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = -i\omega\tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = Ne \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} \rightarrow \tilde{\mathbf{J}} = \frac{Ne^2 i \omega}{m} \frac{\tilde{\mathbf{E}}}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \underbrace{\frac{Ne^2 i}{m(\omega + i\gamma)}}_{\sigma} \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma + i\omega}{\gamma^2 + \omega^2}$$

Generalizzazione della definizione di conduttività'
Significato: corrente e campo non sono in fase

Indice di rifrazione complesso - I

Ricordando l'espressione del numero d'onda complesso, vediamo l'effetto della conduttività anche lei diventata complessa:

$$\begin{aligned}k^2 &= \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma \rightarrow k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu \frac{Ne^2/m}{-i\omega + \gamma} \\&= \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu \frac{Ne^2/m}{\omega^2 + \gamma^2} (+i\omega + \gamma) = \mu\epsilon\omega^2 + \frac{Ne^2/m}{\omega^2 + \gamma^2} (-\omega^2\mu + i\omega\mu\gamma) \\&\rightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \left(\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}\end{aligned}$$

Si può definire un indice di rifrazione anche per i conduttori:

$$\tilde{n} = \frac{c\tilde{k}}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}}$$

Indice di rifrazione complesso - II

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \left(\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \equiv c^2 \tilde{n}^2$$

$$\tilde{n} \equiv n' + in'' \rightarrow \tilde{n}^2 = (n' + in'')^2 = n'^2 - n''^2 + 2in'n'' \underset{n'' \ll n'}{\approx} n'^2 + 2in'n'' = n'(n' + 2in'')$$

$$\rightarrow \begin{cases} n' \simeq \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{Ne^2\mu}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}} \right) \\ n'' \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\frac{Ne^2}{mc} \frac{\omega\mu\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}}{\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}}} \end{cases}$$

Propagazione nel plasma - I

Plasma: stato particolare della materia, in cui (normalmente ad alta T) elettroni e nuclei restano slegati

- In un plasma si trovano molte cariche libere
- Conduttività elevata

Es.: Propagazione onde radio nella ionosfera

In un plasma diluito, $\gamma \sim 0$, σ è immaginaria pura e si ha:

$$\mu \cong \mu_0, \varepsilon \cong \varepsilon_0, \omega_p \equiv e \sqrt{\frac{N}{m\varepsilon_0}}$$

$$\rightarrow k^2 \cong \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

ω_p è la *frequenza di plasma* del mezzo

Propagazione nel plasma - II

Onde con frequenza $> \omega_p$: numero d'onda reale
→ Propagazione regolare

$$v = \frac{\omega}{k} = c \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Onde con frequenza $< \omega_p$: numero d'onda complesso
→ Attenuazione con lunghezza caratteristica

$$d = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$