

Radiazione e Relativita' Ristretta

III – Potenziali elettromagnetici - Radiazione di dipolo

Eq. di Maxwell

Equazioni di Maxwell :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

E' possibile e utile introdurre due nuove funzioni di $(\mathbf{r}, t)$ che rendono piu' semplice la risoluzione delle equazioni: i potenziali scalare e vettore, ϕ e $\mathbf{A}$

Potenziale elettrostatico

Proprieta' fondamentale del campo elettrico per il caso statico:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0 \text{ per campi statici}$$

Proprieta' generale del rotore:

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0 \quad (\text{Proprieta' derivate seconde miste..})$$

Quindi un campo elettrostatico si puo' sempre scrivere come

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{r}) \text{ funzione scalare di } (x, y, z)$$

ϕ si chiama *potenziale elettrostatico*, ed e' definito a meno di una costante

Potenziale vettore

Proprietà fondamentale del campo magnetico:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Proprietà generale della divergenza:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \equiv 0$$

Quindi un campo magnetico si può sempre scrivere come:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \text{ } \mathbf{A} \text{ funzione vettoriale di } (x, y, z)$$

$\mathbf{A}$ si chiama *potenziale vettore*, ed è definito a meno del gradiente di una funzione qualsiasi (perché il rotore di un gradiente è identicamente nullo)

Potenziali e gauge

ϕ e $\mathbf{A}$ definiti a meno di

una costante

una funzione di $\mathbf{r}$

→ Possibile richiedere che ϕ ed $\mathbf{A}$ soddisfino condizioni extra

Condizioni extra chiamate *condizioni di gauge*
(nome con origini lontane..)

Non ovvio trovare quali condizioni di gauge sono compatibili con le equazioni di Maxwell

ϕ ed $\mathbf{A}$

Sempre vero:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Quindi l'argomento del rotore si puo' scrivere come il gradiente di una funzione scalare:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Significato dei potenziali

Quindi:

Se si trovano le equazioni per $\phi, \mathbf{A}$, dalle loro soluzioni si possono poi ricavare $\mathbf{E}, \mathbf{B}$

Per trovare le soluzioni occorre *fissare il gauge* (un po' come decidere il sistema di riferimento...)

Le equazioni per ϕ ed $\mathbf{A}$

Dalla I e IV equazione di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Gauge di Coulomb e di Lorentz

Le equazioni per ϕ ed $\mathbf{A}$ si possono semplificare e separare fissando il gauge.

Varie scelte possibili, fra le altre:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{gauge di Coulomb}$$

oppure

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{gauge di Lorentz}$$

Si puo' dimostrare che ciascuna di queste condizioni aggiuntive e' compatibile con le eq. di Maxwell

Gauge di Coulomb - I

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Le equazioni per ϕ e per $\mathbf{A}$ diventano:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}_\perp$$

Spiegazione: si puo' fare vedere che nella II equazione il termine con $\partial \phi / \partial t$ si combina con $\mathbf{j}$, lasciando a secondo membro solo la parte *trasversale* della densita' di corrente

Gauge di Coulomb – II

Nel caso statico, le equazioni per i potenziali nel gauge di Coulomb diventano *equazioni di Poisson*:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Equazioni diff. alle derivate parziali, non omogenee

Integrale generale:

Int. generale omogenea associata + Int. particolare non omogenea

Gauge di Lorentz - I

Applicando la condizione di Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

le equazioni per i potenziali diventano:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

ossia *equazioni d'onda inhomogenee*

Gauge di Lorentz - II

Si osservi come nel caso statico i due gauges coincidano...

Le soluzioni delle eq. statiche (Poisson) sono quindi le stesse, sia nel gauge di Coulomb, sia nel gauge di Lorentz

Soluzione eq. di Poisson - I

Metodo della funzione di Green

Carica *unitaria*, puntiforme, in $\mathbf{r}' \rightarrow \rho_G(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

Sol. eq. di Poisson per questo caso: *funzione di Green*

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \nabla^2 G = -\frac{\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\varepsilon_0}$$

Laplaciano della distanza inversa, integrato su un volume V :

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r} = \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{u} \right) d^3\mathbf{u} = \int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{u} \right) \right] d^3\mathbf{u}$$

Teo. della divergenza, su sfera S di raggio R che delimita V

$$\int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{u} \right) \right] d^3\mathbf{u} = \int_S \left[\nabla \left(\frac{1}{u} \right) \right] \cdot d\mathbf{A} = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{u} \right) \hat{\mathbf{u}} \right] \cdot d\mathbf{A} = \int_S \left(-\frac{1}{u^2} \right) \hat{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A}$$

Soluzione eq. di Poisson - II

$$\int_S \left(-\frac{1}{u^2} \right) \hat{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{4\pi R^2}{u^2}$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_S \left(-\frac{1}{u^2} \right) \hat{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A} = \begin{cases} 0 & \text{se } u \neq R \\ -4\pi & \text{se } u = R \end{cases}$$

$$\rightarrow \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv -4\pi \rho_G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 4\pi \varepsilon_0 \nabla^2 G$$

$$\rightarrow G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Il potenziale Coulombiano e' la funzione di Green dell'eq. di Poisson

Soluzione eq. di Poisson - III

Potenziale per densità generica ρ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) &= \nabla^2 \left[\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \underbrace{\nabla^2}_{\text{der. rispetto a } \mathbf{r}, \mathbf{r}' = \text{cost}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Eq. delle onde non omogenea - I

Sviluppo in integrale di Fourier della soluzione:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Inserendo nell'equazione:

$$\int \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{\varphi}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{\varphi}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0}$$

Eq. di Helmholtz non omogenea

Eq. delle onde non omogenea - II

Metodo delle funzioni di Green:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) = - \frac{\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\varepsilon_0}$$

G a simmetria sferica, dipendente solo da $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \equiv u$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(u, \omega) = \underbrace{\frac{1}{u} \frac{d^2(uG)}{du^2}}_{\substack{\Delta \text{ in coord. sferiche} \\ \text{Indip. dagli angoli}}} + \frac{\omega^2}{c^2} G = 0, \quad u > 0$$

Eq. dei moti armonici; soluzione per $r > 0$:

$$G(u, \omega) = \frac{1}{u} \left(c_1 e^{i\omega u/c} + c_2 e^{-i\omega u/c} \right), \quad u > 0$$

Eq. delle onde non omogenea - III

Passando dalle trasformate alle funzioni di t :

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \hat{\varphi}(\mathbf{r}, \omega) e^{+i\omega t} d\omega = \int e^{+i\omega t} d\omega \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \hat{\rho}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \int \left(c_1 e^{i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c} + c_2 e^{-i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c} \right) e^{+i\omega t} \hat{\rho}(\mathbf{r}', \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \underbrace{\int \left(c_1 e^{+i\omega(t+|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)} + c_2 e^{-i\omega(-t+|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)} \right) \hat{\rho}(\mathbf{r}', \omega) d\omega}_{c_1 \rho(\mathbf{r}', t+|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + c_2 \rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \left(c_1 \rho(\mathbf{r}', t+|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + c_2 \rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \right) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \left(c_1 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t+|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + c_2 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \right)\end{aligned}$$

Potenziali anticipati e ritardati

Potenziali ritardati

Modo di interpretare la soluzione: poiche' le onde e.m. viaggiano nel vuoto a velocita' c , bastera' sostituire nella soluzione statica $\rho(\mathbf{r}')$ con $\rho(\mathbf{r}', t_r)$, essendo il tempo ritardato $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

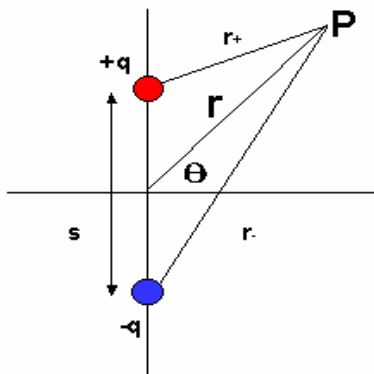
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

Quindi, il valore del potenziale in un dato punto a un dato istante dipende dalla densita' in tutti gli altri punti, a istanti tanto piu' antichi quanto piu' i punti-sorgente sono distanti dal punto-campo

I potenziali anticipati non si considerano perche' violano il principio di causalita'

Radiazione di dipolo elettrico- I

Modello di un dipolo: posizioni fisse, cariche variabili



$$r_+ = \sqrt{r^2 - rs \cos \theta + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + rs \cos \theta + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

Approssimazioni:

$$s \ll r$$

$$s \ll c/\omega$$

$$\mathbf{p}(t) = q(t)\mathbf{s} = q_0 s \hat{\mathbf{k}} \cos \omega t$$

$$r_{\pm} \cong r \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{s}{r} \cos \theta \right) \rightarrow \frac{1}{r_{\pm}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{s}{r} \cos \theta \right)$$

Radiazione di dipolo elettrico - II

Potenziale scalare in P:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0 \cos \omega(t - r_+/c)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega(t - r_-/c)}{r_-} \right]$$

Con le approssimazioni citate:

$$\begin{aligned} \cos \omega(t - r_{\pm}/c) &= \cos \left[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right] \\ &= \cos \omega(t - r/c) \cos \left(\frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right) \mp \sin \omega(t - r/c) \sin \left(\frac{\omega s}{2c} \cos \theta \right) \\ &\cong \cos \omega(t - r/c) \mp \frac{\omega s}{2c} \cos \theta \sin \omega(t - r/c) \end{aligned}$$

Radiazione di dipolo elettrico - III

Il potenziale scalare si scrive:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) + \frac{1}{r} \cos \omega(t - r/c) \right]$$

Osservazioni:

- 1) Il II termine va come $1/r^2 \rightarrow$ analogo al caso statico
- 2) Il I termine va come $1/r$
- 3) Se $r \gg c/\omega$ ($\leftarrow$ zona d'onda) allora

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \cong \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) \right]$$

Radiazione di dipolo elettrico- IV

Per il potenziale vettore si procede in maniera simile, e si trova

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \hat{\mathbf{k}} \sin \omega(t - r/c)$$

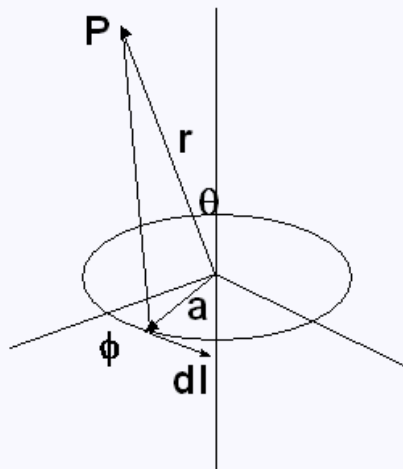
Dai potenziali si trovano i campi ***E*** e ***B***:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

θ e ϕ sono i versori sferici

Radiazione di dipolo magnetico - I



Spira, corrente oscillante, scarica:

$$\varphi \equiv 0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega(t - (|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} d\mathbf{l}$$

Con la geometria della figura:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \cos \omega t \\ \mathbf{m}(t) &= \pi a^2 I(t) \hat{\mathbf{k}} \\ &= m_0 \hat{\mathbf{k}} \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 a \hat{\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega(t - (|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \cdot \cos \phi d\phi$$

Radiazione di dipolo magnetico - II

Procedendo come nel caso precedente, con le solite approssimazioni:

1) $a \ll r$

2) $a \ll c/\omega$

3) $r \gg c/\omega$ *zona d'onda*

si trova per il potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \omega(t - r/c) \hat{\phi}$$

Radiazione di dipolo magnetico - III

Si ottengono i campi, il flusso di energia e la potenza irradiata:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\phi}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \hat{\theta}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \right]^2 \hat{\mathbf{r}}$$

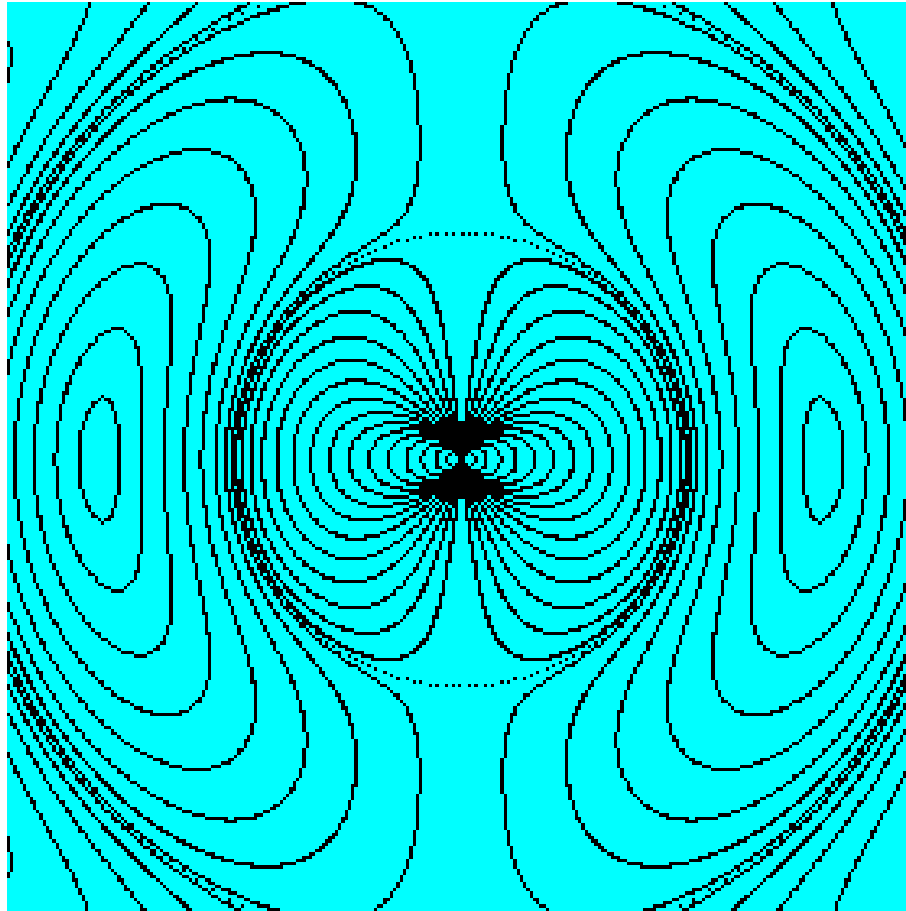
$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^5}$$

Rapporto fra potenze per
dip. elettrico e magnetico:

$$P_{\text{magn}} / P_{\text{elett}} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 \sim \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2$$

Il campo E di un dipolo



Onde sferiche

Il campo di un dipolo elettrico/magnetico oscillante, nella zona d'onda, ha la componente elettrica e quella magnetica con le seguenti caratteristiche:

- 1) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono in fase**
- 2) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali fra loro**
- 3) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali al versore $\mathbf{r}$**
- 4) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si propagano con velocità c**
- 5) $\mathbf{B} = \mathbf{E}/c$**
- 6) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si attenuano come $1/r$**

Queste sono le caratteristiche di un'onda elettromagnetica; si tratta di un' *onda sferica*, che si propaga in tutte le direzioni

Dipolo elettrico: Flusso di energia

Calcoliamo il vettore di Poynting per il campo di dipolo el.:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \omega(t - r/c) \right]^2 \hat{\mathbf{r}}$$

Media su un periodo:

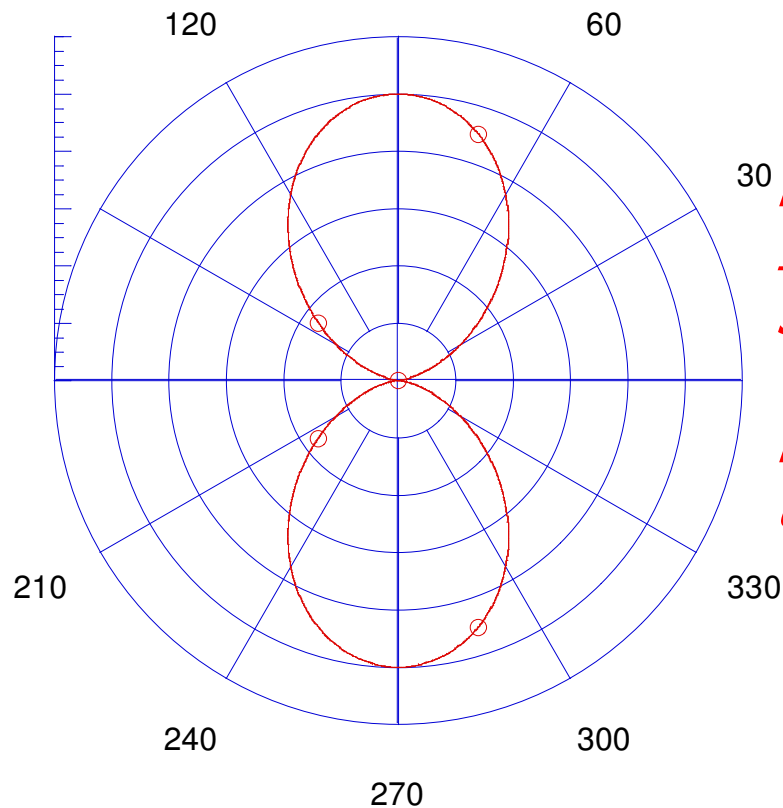
$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Integrale sull'angolo solido (= potenza irradiata):

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}$$

Dipolo el./mag.: $\langle S \rangle$ vs. angolo

Intensita' vs. angolo
Campo di radiazione di un dipolo elettrico oscillante



30 *L'asse del dipolo e' a 0 gradi*
Intensita' max. a 90 gradi
Simmetria assiale

0
Nello spazio, la figura sembra
una "ciambella" senza buco